

# חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

## חוקי גזירה

נתון:  $k$  - מספר קבוע,  $u(x)$  ו-  $v(x)$  - שתי פונקציות שלהן קיימות נגזרות בקטע  $(a; b)$

$$(5x)' = 5(x)' = 5 \cdot 1 = 5$$

$$\left(\frac{1}{6} \sin x\right)' = \frac{1}{6} \cos x$$

$$(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$$

$$(ku \cdot (x))' = k \cdot u'(x)$$

את הגורם הקבוע מותר להוציא מחוץ לסימן הנגזרת.

$$y = x^3 + 4x^2 + 7x + 1$$

$$y' = (x^3)' + 4(x^2)' + 7(x)' + (1)' = 3x^2 + 8x + 7$$

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$$

נגזרת של הסכום האלגברי של מספר פונקציות שווה לסכום הנגזרות.

$$y = x^2 \cdot \sin x$$

$$y' = (x^2)' \cdot \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + x^2 \cos x$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

נגזרת המכפלה של שתי פונקציות.

$$y = \frac{x^3}{\sin x}; \sin x \neq 0$$

$$y' = \frac{(x^3)' \sin x - (x^3)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

נגזרת המנה של שתי פונקציות.

## נגזרת הפונקציה של פונקציה (פונקציה מורכבת)

אם  $y$  היא פונקציה של  $u$ :  $y = F(u)$ , כאשר  $u$  עצמה היא פונקציה של  $x$ :  $u = f(x)$  אז הפונקציה  $y = F(u) = F(f(x))$  נקראת פונקציה של פונקציה או פונקציה מורכבת.

$$y'(x) = F'(u) \cdot u'(x)$$

נגזרת של פונקציה מורכבת:

## נגזרות של פונקציות מורכבות

פונקציה	נגזרת	פונקציה	נגזרת
$(u)^n$	$n \cdot u^{n-1} \cdot u'$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{1}{u^2} \cdot u'$	$\sin u$	$(\cos u) u'$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\cos u$	$(-\sin u) u'$
$a^u$	$a^u \ln a \cdot u'$	$\operatorname{tg} u$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$e^u$	$e^u \cdot u'$	$\operatorname{ctg} u$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$
$\log_a u$	$\frac{u'}{u \cdot \ln a}$	$\sqrt[n]{u}$	$\frac{u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}}$

דוגמאות. מצאו נגזרות של הפונקציות הבאות

$u = x^2 + 3x, u' = 2x + 3$ $y = u^3, y' = (u^3)' = 3u^2 u' = 3(x^2 + 3x)^2 (2x + 3)$	$y = (x^2 + 3x)^3$
$u = 2x; u' = 2$ $y = \sin u; y' = (\sin u)' = (\cos u) u' = 2 \cos 2x$	$y = \sin 2x$
$u = 2x + 1, u' = 2$ $y = \ln u, y' = (\ln u)' = \frac{u'}{u} = \frac{2}{2x+1}$	$y = \ln(2x + 1)$
$u = x^3 + 4x, u' = 3x^2 + 4$ $y = \sqrt{u}; y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{3x^2 + 4}{2\sqrt{x^3 + 4x}}$	$y = \sqrt{x^3 + 4x}$
$u = 3x; u' = 3$ $y = e^u, y' = (e^u)' = e^u u' = 3e^{3x}$	$y = e^{3x}$

## נגזרות ואינטגרלים לא-מסוימים

פונקציה $F(x)$	נגזרת $F'(x)$	אינטגרל לא-מסוים $\int F(x) dx$
$C$	$0$	$Cx$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \alpha \neq -1$
$a^x$	$a^x \cdot \ln a$	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x$
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	—
$\log_\alpha x$	$\frac{1}{x \ln a}$	—
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	—
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	—

## אינטגרלים לא מסוימים

1.  $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$
2.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$
3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
4.  $\int e^x dx = e^x + C$
5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6.  $\int \cos x dx = \sin x + C$
7.  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$
8.  $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$
9.  $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
10.  $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| + C$
11.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
12.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
13.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C =$   
 $= -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} + C_1$   
 $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C = -\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x + C_1$
14.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$