עקרון מינימום הדרך של *הרון*
אופטיקה או גיאומטריה?

רשימות הרצאות – ראובן הרמלין

מבוא: החוק הראשון של האופטיקה

נפתח פרק זה בעבודתו של מתמטיקאי יווני גדול, הגיאומטריקן ***אוקלידס*** (**Εὐκλείδης, *Eukleidēs*** חי בסביבות 300 לפנה״ס בעיר אלכסנדריה, מצריים). כפי שאפשר לצפות מהאיש שכתב את הספר ״יסודות״, רב המכר המפורסם ביותר בכל תולדות הגיאומטריה, שבו הניח את יסודות החשיבה מתמטית בכלל, והגיאומטרית בפרט, כמדע דדוקטיבי שאיננו מסתמך על הנסיון, אלא על קבוצת אקסיומות נבחרות וכללי ההיקש ההגיוני הקשיח, הוא שאף ליישם את עקרונות הגיאומטריה לתחומי מדעי הטבע השונים ובפרט לאופטיקה, המדע של האור והראייה. *אוקלידס* טען שקיימים שני חוקים גיאומטריים, שעל פי סברתו שולטים על מסלולי התפשטות האור.

אוקלידס

החוק הראשון של האופטיקה כפי שנוסח ע״י *אוקלידס* קובע ש**האור מתפשט בקווים ישרים**. לכאורה אין עובדה ברורה מזו, אך במחשבה שנייה אין הדברים כה פשוטים! אין שום ספק שבלעדי החוק הראשון הנ״ל לא היתה שום זכות קיום לאופטיקה כתחום מדעי מדויק (כדברי אותו יהודי שהצהיר: ״לא קיימת חיה כזאת!״ כשניצב מול הכלוב של הג׳ירף בגן החיות). אין ביכולתנו לתאר ולו גם את התופעה האופטית הפשוטה ביותר מבלי להזדקק לתרשים שבו מומחשת התפשטות קרני האור על ידי קווים ישרים. בלתי אפשרי כיום אפילו להתחיל להעריך נכונה את עומק תרומתו של *אוקלידס* להתפתחות האופטיקה בניסוח החוק הראשון, כשם שמי שהראו לו היכן מוסתרת המחט בערמת השחת אינו מסוגל להעריך עד כמה קשה למוצאה כשאין יודעים היכן היא נמצאת.

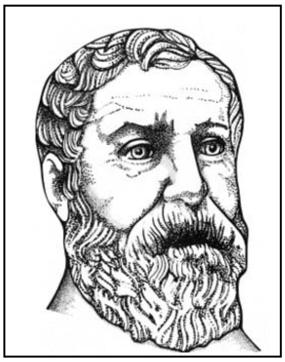
אך למרות שכל המתבונן בקרן אור שמש החודרת דרך נקב זעיר לתוך תא חשוך עשוי להשתכנע, כמו *אוקלידס* לפניו, בנכונות החוק הראשון של האופטיקה, כל תלמיד (נו טוב, נניח שמדובר בתלמיד מחונן) שכבר למד את ההגדרות הראשונות בגיאומטריה כפי ש*אוקלידס* עצמו ניסח אותן, אמור לשאול את השאלה הבאה: איך *אוקלידס* רשאי לקבוע, אפילו היו עומדים ברשותו האמצעים הטכניים המשוכללים ביותר של תקופתנו, שמסלול התפשטות קרן אור, ותהיה דקה ככל שניתן, היא קו ישר? הרי על פי

הגדרת *אוקלידס* עצמו, לישר אין עובי וכל "קו ישר" שאנו משרטטים במחברתנו באמצעות הסרגל המושלם ביותר והעיפרון המחודד ביותר, איננו אלא אמצעי המחשה חזותי, מוחשי, של העצם הגיאומטרי, האידיאלי והמופשט הנקרא ישר. שאלה זאת חושפת סתירה מהותית לכאורה בניסוח החוק הראשון של האופטיקה הגיאומטרית, בין האופי הפיסי-מוחשי של קרן האור לאופי המתמטי-מופשט של הישר האמור לתאר את מסלול התפשטותה.

ההרהורים והערעורים על מידת התוקף והנכונות של החוק הראשון של האופטיקה הגיאומטרית כפי שנוסח ע"י *אוקלידס*, מוליכים בסופו של דבר לשאלה הכללית יותר והיא: באיזה מידה השימוש במושגים מתמטיים מופשטים מתאים לתיאור חוקי הטבע הגשמי? האם בכלל מותר לצפות שניתן "לכפות" על העולם החיצוני, רב הסתירות והבלתי צפוי כל כך, את חוקי החשיבה וההיקש הגיוני השוללים מראש כל אפשרות של הסתמכות על נסיון חיצוני, ובפרט אינם מתירים שום סתירה? אין זאת מטרת רשימות אלה לנסות לענות על שאלה פילוסופית קשה זאת, אם בכלל יש לה תשובה מוסכמת, המקובלת על כולם. אך כתוצאה של הדיון בפרק זה ובפרק הבא אחריו ניווכח שהודות לשימוש באמצעים גיאומטריים ואנליטיים הושגו לא רק הישגים מרחיקי לכת באופטיקה ובמכניקה אלא אף תוצאות מתמטיות מרתקות לא פחות.

השגת אותן תוצאות מתמטיות מיועדת להמחיש השקפה הרואה באופטיקה הגיאומטרית לאו דווקא תחום השייך למדעי הטבע הגשמי אלא פרק בגיאומטריה. אין זה מקרה ששני החוקים הראשונים של האופטיקה הגיאומטרית, בהם נדון בסעיף הבא, נוסחו כחוקים גיאומטריים לכל דבר. על פי השקפה זאת מטרת *אוקלידס* בניסוח שני חוקי האופטיקה שלו הייתה להפוך את מסלולי התפשטות האור ממושגים פיסיקליים-מוחשיים למושגים גיאומטריים-מופשטים, אידאליים, ברוח הפילוסופיה האפלטונית.

השקפה זאת נתמכה ואף חוזקה והועמקה על ידי עקרון שנוסח על ידי מתמטיקאי וממציא הלניסטי-אלכסנדרוני ***הֶרוֹן*** **(Heron)** חי, לפי ההשערה המקובלת, בין השנים 70 עד 10 לפנה"ס**)** כ- 200 שנים אחרי זמנו של *אוקלידס*. *הֶרוֹן* הציע לשנות את ניסוח החוק הראשון של האופטיקה הגיאומטרית ולהחליף בו את המונח הגיאומטרי, הבלתי-מוחשי, קו ישר, בתכונה גיאומטרית אופיינית שלו שהינה מדידה, לכאורה, ולפיכך נראית מעט מוחשית יותר. התכונה של הקו הישר העולה מייד על הדעת היא שביחס לכל שתי נקודות נתונות המונחות עליו הוא מהווה **<u>הדרך הקצרה ביותר</u>** המחברת אותן. *הֶרוֹן*, (שתרומתו להתפתחות המדע בזמן העתיק עולה בהרבה על פרסומו; בין היתר תכנן ובנה את האוטומטים הראשונים, היה על סף המצאת מנוע הקיטור ופיתח את הטריגונומטריה והשתמש בה בתחומים רבים) לא רק שניסח בעקבות רעיון זה עקרון אופטי בסיסי הנושא את שמו, שנועד להחליף את נוסח החוק הראשון של האופטיקה, אלא אף הוכיח באופן גיאומטרי טהור שמעקרון אופטי זה נובע חוק ההחזרה האופטי שהיה החוק השני שנוסח על ידי *אוקלידס*. ביסוס האופטיקה הגיאומטרית על **<u>עקרון מינימום הדרך של *הרון*</u>** הפך את תורת התפשטות קרני האור לפרק בגיאומטריה שבו עקרון המינימום עצמו ממלא תפקיד של אכסיומה לכל דבר.



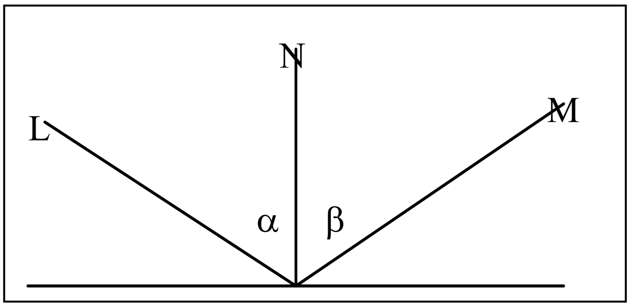
<u>הרון האלכסנדרוני</u>

כל האמור לעיל היה עשוי להחשב כחסר משמעות מתמטית לחלוטין אלמלא היו קיימות תוצאות גיאומטריות משמעותיות לאופטיקה הגיאומטרית. ואומנם, לאחר שבסעיף הבא נראה כיצד גזר *הרון* את חוק ההחזרה האופטי של *אוקלידס* כמסקנה גיאומטרית מעקרון המינימום שלו, נלמד בשאר פרק זה איך לבנות בעזרת סרגל ומחוגה בלבד את הישרים המשיקים לכל שלושת הסוגים של עקומים מישוריים הידועים בגיאומטריה כ**חתכי-החרוט** או כעקומים ריבועיים. תוצר לוואי טכנולוגי מרשים של הישגים גיאומטריים אלו היה פיתוח טלסקופ המראות המשמש את האסטרונומים מאז המצאתו על ידי *ניוטון* ושיפורו ע"י *קסגרין* ועד היום.

עקרון *הרון* וחוק ההחזרה

לאחר שניסח את החוק הראשון של האופטיקה, *אוקלידס* שאל איך קשור הכיוון של מסלול קרן אור המוחזרת ממראה מישורית לכיוון מסלול קרן האור הפוגעת במראה. ניסוח החוק הראשון קודם לכן אפשר *לאוקלידס* לתרגם בעיה זאת לבעיה גיאומטרית, כמתואר בתרשים המצורף מס. 1.

מישור המראה המחזירה מיוצג על ידי הישר האופקי בתרשים מס. 1 (זהו החיתוך של מישור המראה עם מישור התרשים הניצב לו). מסלול קרן האור הפוגעת במראה מיוצג על ידי הישר L ומסלול הקרן המוחזרת על ידי הישר M. הזווית α שבין הישר L לישר N הניצב למראה ידועה כ-**זווית הפגיעה** והיא שמבטאת את כיוון הקרן הפוגעת. באופן דומה, כיוון הקרן המוחזרת מבוטא באמצעות **זווית ההחזרה** β שבין הישר M לישר הניצב N. נעיר שעל אף שהתרשים של ההחזרה עשוי לעורר את הרושם שכל תופעת ההחזרה מתרחשת במישור התרשים המאונך למישור המראה, אך לא נניח מראש הנחה כזאת.



תרשים מס. 1

הבעיה האופטית של החזרת קרני האור על ידי מראות מישוריות הפכה, בעקבות תיאורה באמצעות תרשים מס. 1, לבעיה הגיאומטרית הבאה: "מהו היחס בין זווית ההחזרה β לזווית הפגיעה α?"

מספר תצפיות בלתי ידוע (אם בכלל היו כאלו) הספיק לשכנע את *אוקלידס* בכך ש-**"הישר M, המתאר את קרן האור המוחזרת, נמצא במישור אחד הן עם הישר ניצב N למישור המראה בנקודת הפגיעה, והן עם הישר L המתאר את הקרן הפוגעת, ומתקיים השוויון: $\alpha=\beta$ בין זווית הפגיעה α לזווית ההחזרה β" !!!** שתי קביעות גיאומטריות אלו הן התוכן של חוק ההחזרה המפורסם, הידוע גם כחוק השני של האופטיקה, שהופיע יחד עם החוק הראשון של *אוקלידס* בספרו "יסודות" והן הסיבה לכך שתרשים מס. 1 המישורי מהווה המחשה נאמנה למדי של חוק ההחזרה.

אף החוק השני ומשמעויותיו הפיסיקליות חייב לעורר מספר תהיות בדומה לאלו שהתעוררו בעקבות הצגת התוכן של החוק הראשון: גם הדיוק במדידת זוויות וגם היכולת הטכנולוגית ללטש מראות שתהיינה מישוריות לגמרי, היו רחוקים מלהניח את הדעת מבחינה מדעית בזמנו של *אוקלידס*. לפיכך אין שום ספק שאילו *אוקלידס* היה רוצה לבסס את חוק ההחזרה על תצפיות נסיוניות, הוא היה חייב להטות, אם לא לזייף, את תוצאות תצפיותיו, שעליהן הוא ביסס את חוק ההחזרה שלו, על מנת שהן יותאמו לקביעות הגיאומטריות המדויקות כל כך של אותו חוק.

על מה עשוי להסתמך השכנוע העצמי המוחלט הזה בנכונות הקביעות הללו, אם לא על ראיית החוק השני כטענה גיאומטרית לכל דבר, הדנה במסלולים של קרני האור כמהויות גיאומטריות אידיאליות, שהמסלולים הממשיים המתקבלים בניסויים אינם אלא חיקויים דלים ובלתי–מושלמים שלהן? כך או אחרת, המשתמע מכאן הוא שיש הצדקה מלאה להתייחס אל שני חוקי האופטיקה של *אוקלידס* כפסוקים גיאומטריים, שאמיתיותם אינה נקבעת על סמך הניסיון אלא על בסיס הוכחות גיאומטריות מושלמות המסתמכות, בהתאם למתכונת המקובלת שנקבעה ע"י *אוקלידס* עצמו, על הגדרות ועל משפטים גיאומטריים מוכחים קודמים או אכסיומות גיאומטריות.

עוד לפני שבא *הרון* ומצא את הביסוס המבוקש לשני חוקי האופטיקה הללו, ניסה גם *ארכימדס* לבסס את החוק השני על עקרון הסימטריה האופטי הבא: אם קרן אור, היוצאת מנקודה A ומגיעה לנקודה B, תהפוך את כיוונה ותצא מ-B חזרה ל-A, מסלולה הגיאומטרי בדרך חזרה יהיה חופף למסלול המקורי. כאשר עקרון סימטריה זה מיושם לגבי החזרת קרני אור, הישר L בתרשים מס. 1 מייצג כעת את מסלול הקרן המוחזרת והישר M את מסלול הקרן הפוגעת. בהתאם לכך, הזווית β הינה כעת זווית הפגיעה והזווית α היא זווית ההחזרה.

אם נניח הנחת שלילה לחוק השני, שזוויות הפגיעה וההחזרה אינן שוות זו לזו, תיתכן אחת משתי האפשרויות הבאות: או שזווית הפגיעה גדולה מזווית ההחזרה או להפך. אך אם נניח שהאפשרות הראשונה בתוקף, כלומר ש $\alpha>\beta$, אזי ע"פ עקרון הסימטריה האופטי, כאשר נחליף את כיוון קרן האור כמתואר בפסקה הקודמת, נקבל שכעת $\beta>\alpha$, בסתירה לאי השוויון הקודם. באופן דומה גם האפשרות השנייה מובילה לשני אי–שוויונות סותרים, מה שמפריך את הנחת השלילה ומוביל אותנו למסקנה המתבקשת ש $\alpha=\beta$!!!

הגיעה העת להכיר את נוסח עקרון מינימום הדרך של *הרון* ואת השלכותיו הגיאומטריות והאופטיות. עקרון זה קובע בפשטות ש:

(H) כשהאור מתפשט מנקודה A לנקודה B במרחב, בין אם ללא אילוץ חיצוני כלשהו, או תחת אילוץ מסויים, הוא יתפשט מ- A ל- B במסלול הקצר ביותר מכל המסלולים המקיימים את האילוץ הנתון, אם קיים כזה.

מכיון שהדרך הקצרה ביותר בין שתי נקודות A ו-B כל שהן במרחב היא תמיד לאורך הקטע הישר (היחיד) המחבר אותן, אור המתפשט ללא שום אילוץ חיצוני בדרך הקצרה ביותר האפשרית, חייב בהכרח להתפשט לאורך אותו קטע ישר. בכך מסתכמת ההוכחה הגיאומטרית של החוק הראשון של האופטיקה הקובע:

(E_1) בהיעדר אילוצים חיצוניים כלשהם האור מתפשט לאורך קווים ישרים.

לעומת זאת, אין זה כה פשוט להוכיח שעקרון מינימום הדרך (H) גורר גם את החוק השני של האופטיקה שניסוחו המלא הוא:

(E_2) האור מוחזר מפני מראָה מישורית כך שמסלוליהם הישרים של הקרן הפוגעת והקרן המוחזרת נמצאים שניהם במישור הניצב למישור המראָה וזווית ההחזרה שווה לזווית הפגיעה.

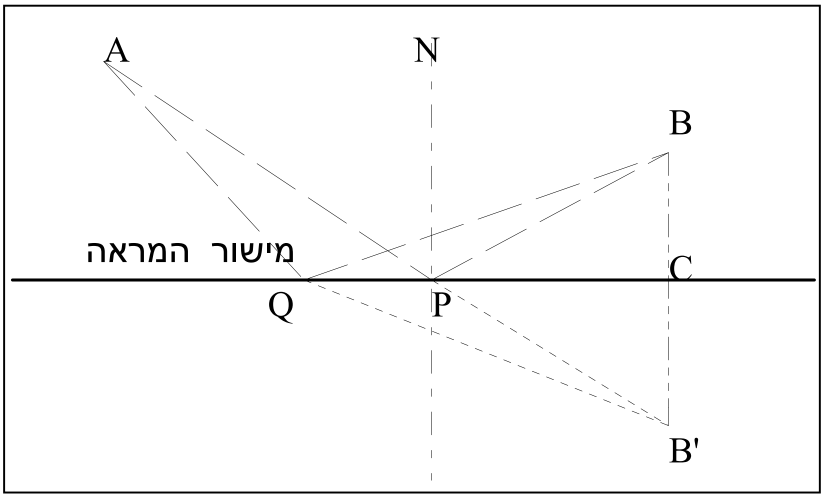
<u>הוכחה</u>: נניח שקרן האור, בדרכה מנקודה A לנקודה B **מאולצת** לפגוע במראָה מישורית נתונה בנקודה בלתי ידועה P, כששתי הנקודות A ו- B שוכנות באותו צד של המראָה. קביעת העיקרון (H) שקרן האור חייבת להגיע מ- A ל- B בדרך הקצרה ביותר האפשרית אין פרושה, במקרה זה, שעליה להגיע לאורך הקטע הישר AB, שכן מסלול זה איננו מקיים את **האילוץ** המחייב מפגש הקרן עם פני המראָה. אך אם המסלול מ-A ל- B עובר דרך נקודה כל שהיא P על פני המראָה, העיקרון (H) מחייב שחלקי המסלול מ-A ל-P ומ-P ל- B יהיו שניהם קטעים ישרים, שכן על מנת שהדרך מ-A ל- B דרך נקודה P תהיה הקצרה ביותר האפשרית, שתי הדרכים החלקיות מ-A ל-P ומ-P ל- B חייבות להיות הקצרות ביותר, כלומר הקטעים הישרים AP ו- PB.

נותר אם כך רק למצוא את הנקודה P על פני המראָה שתקטין למינימום את הסכום של אורכי שני הקטעים: AP ו- PB. גאוניותו של *הרון* היתה בפשטות: הוא הכניס את נקודת ההשתקפות B' של B במראָה, כך שהנקודות B ו- B' נמצאות משני צדי המראָה, וכך שהקטע BB' ניצב למישור המראָה בנקודה C, והנקודה C חוצה את הקטע BB'. מכאן נובע מייד (ראו תרשים מס. 2) שעבור כל נקודה Q השוכנת על פני המראָה, מתקיים השוויון:

$$|BQ| = |B'Q|$$

ולפיכך:

$$|AQ| + |QB| = |AQ| + |QB'|.$$



<u>תרשים מס. 2</u>

כך, הואיל ואנו נדרשים למצוא נקודה P במישור המראָה באופן שהסכום $|AP|+|PB|$ יהיה קטן ככל שניתן, מסתבר שזה שקול למציאת הנקודה P על פני המראָה המקטינה למינימום את הסכום: $|AP|+|PB'|$. אך מאחר שסכום זה הוא אורך הדרך מ-A ל- B' כשהיא עוברת דרך P, ברור שסכום זה יהיה מינימאלי כאשר דרך זאת תהיה קטע ישר, כלומר, כאשר הנקודה P היא נקודת החיתוך של מישור המראָה עם הקטע הישר AB'.

לאחר שפתרנו את הבעיה של מציאת המסלול הקצר מ- A ל- B העובר דרך נקודה P על פני המראָה, נותר רק להראות שהקטעים הישרים AP ו- PB המרכיבים מסלול קצר זה נמצאים במישור הניצב למישור המראָה ושהזוויות בין שני הקטעים הללו והניצב PN למישור המראָה הנן שוות. ואמנם, מכיוון שהקטע BB' ניצב למישור המראה, המישור הנקבע ע״י שלוש הנקודות A, B ו- B' הינו מישור ניצב למישור המראה, ועל פי בנייה הוא מכיל את הקטעים AP ו- PB. לבסוף, מחפיפת המשולשים ישרי הזווית PBC ו- $PB'C$ (ע״פ צלע-זווית-צלע) ומשוויון הזוויות הקדקודיות שבין הישרים PN ו- AB', נובע השוויון המבוקש בין זווית ההחזרה וזווית הפגיעה. בכך מסתיימת הוכחת החוק השני (E_2) כתוצאה גיאומטרית של עקרון מינימום הדרך (H) של *הרון*.

חוק ההחזרה הניצבים והמשיקים לחתכי חרוט

כוחו של עקרון מינימום הדרך של *הרון* מתגלה בכך שבאמצעותו נתן לגזור באופן גיאומטרי פשוט להפליא את חוקי ההחזרה לא רק במראות מישוריות אלא אף במראות אליפטיות, היפרבוליות ופרבוליות וכתוצאה מכך אף לקבל כללי בנייה גיאומטריים עבור המשיקים לשלושת הסוגים האלו של **חתכי החרוט**: האליפסות, ההיפרבולות והפרבולות, כללים שכרגיל מתקבלים רק ע״י שימוש בכלים מתקדמים של החשבון הדיפרנציאלי.

לפני שניגש להכרת חתכי החרוט וחוקי ההחזרה הקשורים בהם, מן הראוי להזכיר שהמשיק לעקום הוא קו ישר שבסביבה הקרובה לנקודת ההשקה ביניהם קיימת ״כמעט״ התלכדות של הישר המשיק עם העקום. מבלי להיכנס לפרוט המובן המדויק של הניסוח הלא מדויק הזה של הגדרת המשיקות, נעיר שמבחינת האופטיקה הגיאומטרית המובן של הגדרה זאת הוא שקֶרֶן אור הפוגעת בנקודה מסוימת במראה שצורתה כצורת העקום מוחזרת ממנה ממש כמו שהיא מוחזרת ממראה ישרה המשיקה לעקום בנקודת ההחזרה של הקרן.

חוק ההחזרה באליפסה

חתך החרוט הראשון, כמקובל, הוא ה***אליפסה***. האליפסה בעלת שני מוקדים בשתי הנקודות F_1,F_2 מוגדרת כמקום הגיאומטרי של כל הנקודות P במישור שסכום מרחקיהן משני המוקדים הוא גודל קבוע המסומן כרגיל ב-$2a$, עבור מספר חיובי נתון $a > 0$:

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a.$$

המעגל הוא מקרה פרטי, גבולי, של אליפסה המתקבל כאשר שני מוקדיה מתלכדים: $F_1=F_2$, כך שמשוואת המעגל היא:

$$|PF_1| + |PF_2| = 2|PF_1| = 2a$$

ובהתאמה המוקד הכפול F_1 מתלכד עם מרכז המעגל. עובדה זאת מרמזת שתכונות המעגל עשויות להתקבל כמצבים גבוליים של תכונות האליפסה. איך יכול רמז דחוק כזה לעזור לנו בבניית משיק לאליפסה בנקודה P כל שהיא עליה?

כידוע, המשיק בנקודה P למעגל שמרכזו בנקודה F, הוא הישר הניצב לרדיוס PF. איזה מסקנה אפשר להקיש ממקרה גבולי זה על כלל האליפסות? האם סביר יהיה לצפות שהמשיק לאליפסה בנקודה P עליה יהיה ניצב לאחד משני הקטעים הישרים המחברים את נקודת ההשקה P עם אחת משתי נקודות המוקד F_1 או F_2? או אולי המשיק ניצב לשניהם? אך כאשר המוקדים שונים זה מזה ונקודת ההשקה P אינה נמצאת על הישר העובר דרך שני המוקדים, המשיק לאליפסה ב- P יכול להיות ניצב רק לאחד משני הקטעים PF_1 או PF_2, ואז השאלה היא, לאיזה משניהם? הרי הגדרת האליפסה אינה נותנת לאף אחד משני המוקדים עדיפות כל שהיא על פני המוקד האחר!

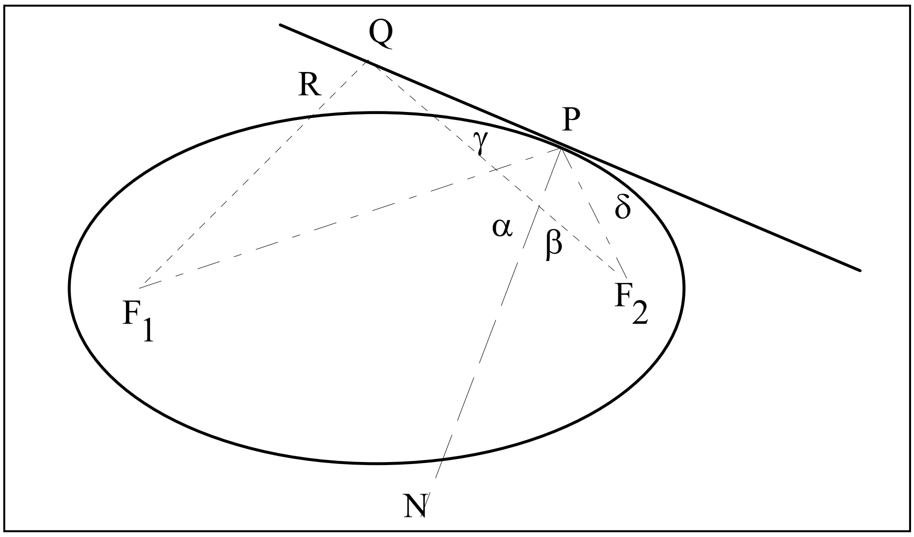
ממש כמו בחיים מתבקשת כאן "פשרה". אך מהי "הפשרה הסבירה" שגם תעמוד במבחן ההתאמה עם חוקי הגיאומטריה?

"פשרה" שנראית "הוגנת" ו"סבירה" היא שהקטעים הישרים המחברים את נקודת ההשקה P עם שני המוקדים יהיו נטויים בשיפועים זהים ביחס לישר המשיק לאליפסה בנקודה P, כלומר, בהתאם לסימונים בתרשים מס. 3: $\gamma=\delta$. אך שוויון זוויות זה שקול לשוויון הזוויות המשלימות לזווית ישרה: $\alpha=\beta$ שהוא שוויון הזוויות שבין הישרים המחברים את P עם המוקדים לבין הניצב PN לישר המשיק המבוקש. אך האין שוויון זה מזכיר את חוק ההחזרה (E_2)? זהו המקום שהאופטיקה הגיאומטרית מספקת בידינו פתרון לבעיה גיאומטרית.

ראשית, אם נניח שבמקום הישר המשיק לאליפסה בנקודה P מוצבת מראָה מישורית וניווכח שקרן אור הנשלחת מאחד המוקדים לנקודה P מוחזרת ע"י אותה מראה מישורית לעבר המוקד השני, תהיה זאת הוכחה אופטית, על בסיס חוק ההחזרה, ש $\alpha=\beta$.

נשאלת כמובן השאלה כיצד נוכיח באופן גיאומטרי, ולא בעזרת הניסיון, את התופעה האופטית שהקרן המוחזרת חייבת לעבור דרך המוקד השני? זה המקום להזכיר שעקרון מינימום הדרך של *הרון* הוא שגורר גיאומטרית את חוק ההחזרה ולפיכך די להראות שעבור כל נקודה Q על הישר המשיק לאליפסה, פרט לנקודת ההשקה P עצמה, סכום מרחקיה של Q משני המוקדים גדול מסכום מרחקיה של P משני המוקדים (ראו תרשים מס. 3), כלומר:

$$|QF_1| + |QF_2| > |PF_1| + |PF_2|.$$



תרשים מס. 3

אך בהיות האליפסה צורה מישורית **קמורה**, כל נקודות המשיק, פרט לנקודת ההשקה P, נמצאות מחוץ לשטח המוקף ע״י האליפסה. לפיכך, אם Q היא נקודה על המשיק לאליפסה השונה מנקודת ההשקה P, אזי הקטע המחבר את Q עם המוקד F_1, למשל, חייב לחתוך את האליפסה בנקודה מסוימת R, ובהתאם לכך:

$$|QF_1| = |QR| + |RF_1|.$$

מצד שני, מאי שוויון המשולש, ביחס למשולש RQF_2, נובע:

$$|RQ| + |QF_2| > |RF_2|$$

ובהתאם לכך:

$$|QF_1| + |QF_2| = |RF_1| + |RQ| + |QF_2| > |RF_1| + |RF_2|.$$

אך מכיוון שהנקודה R שייכת לאליפסה אזי לפי הגדרת האליפסה מתקיים השוויון:

$$|RF_1| + |RF_2| = |PF_1| + |PF_2| = 2a$$

ומכך מתקבל, בסופו של התהליך, אי–השוויון המבוקש:

$$|QF_1| + |QF_2| > |PF_1| + |PF_2|.$$

מכאן נסיק, ע״פ עקרון מינימום הדרך של *הרון*, שכל קרן אור המשוגרת מאחד ממוקדי האליפסה לעֶבֶר נקודה כל שהיא P על היקף האליפסה, מוחזרת אל המוקד השני ע״י מראָה מישורית המשיקה לאליפסה בנקודה P ומאונכת למישור האליפסה. המובן הגיאומטרי של טענה אופטית זאת הוא שהניצב למשיק לאליפסה בנקודה P יוצר זוויות שוות עם שני הקטעים הישרים המחברים את הנקודה P עם מוקדי האליפסה, או במלים אחרות, חוצה הזווית בין שני הקטעים הישרים PF_1 ו-PF_2 הינו הניצב

למשיק ב- P לאליפסה שמוקדיה בנקודות F_1, F_2, ובכך השגנו את האפיון הגיאומטרי שחיפשנו של המשיק לאליפסה.

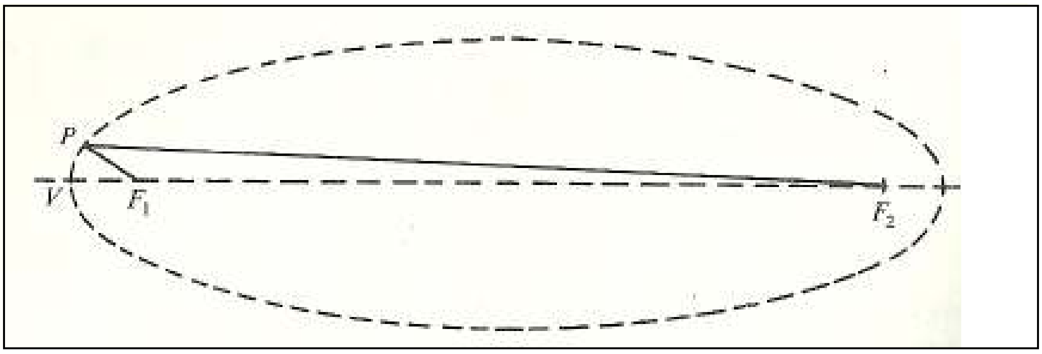
מתבקש להעיר בנקודה זאת הערה בלשנית-גיאומטרית-פיזיקאלית שהפירוש הראשון, בין פירושיה הרבים של המילה מוֹקֵד בעברית (ע״פ מילון אבן-שושן), הוא מדורה, אש יוקדת, ורק הפרוש השלישי הוא הפירוש הגיאומטרי שהיכרנו לעיל. אפשר להבין איך הפירוש הראשון קשור לפירוש הגיאומטרי אם מכירים בכך שחוקי התפשטות האופטיים של האור זהים לחוקי התפשטות קרינת החום ואף לחוקי התפשטות של הקול (באקוסטיקה) ולפיכך, כאשר בונים תא אליפטי שקירותיו מצופים בחומר מבודד המחזיר את מרבית קרינת החום הפוגעת בקיר התא, ואם מבעירים אש באחד משני המוקדים של התא האליפטי, אזי בנקודת המוקד השניה של התא האליפטי הטמפרטורה תהיה כמעט זהה לטמפרטורה של האש הבוערת במוקד הראשון. באופן דומה, אם לקירות תא אליפטי כזה יש תכונות אקוסטיות של החזרת מרבית גלי הקול הפוגעים בו, אדם שאזנו נמצאת באחד משני מוקדי התא ישמע כל רשרוש שמתרחש במוקד האחר יותר טוב מאשר בכל נקודה אחרת בתא. מן הראוי גם לציין עוד הערה בלשנית שגם המילה הלועזית פוקוס (*focus*) מובנה המקורי בלטינית הינו ״כבשן״ או ״תנור״ ובנוסף לכך היא משמשת גם לציון נקודת המוקד של אליפסה, כפי שזה כך בעברית.

<u>**תרגיל 1**</u>**:** לבנות באמצעות סרגל ומחוגה בלבד את המשיק לאליפסה בנקודה נתונה על האליפסה, כשנתונים שני מוקדי האליפסה. האם אפשר לבנות את המשיק ישירות ללא שלב העזר של בניית הניצב למשיק? (<u>**רמז**</u>**:** מהו הקשר בין חוצי הזווית לשתי זוויות צמודות המשלימות לזווית שטוחה?)

לעתים קרובות רצוי לבחון תוצאות כלליות במקרים גבוליים. הוזכר כבר קודם שהמעגל הוא מקרה גבולי של האליפסה, כאשר המוקדים מתלכדים. בהתאם לכך חוק ההחזרה קובע שקרן אור הנשלחת ממרכז העיגול, שהינו התלכדות שני המוקדים, תוחזר ע״י היקף המעגל (במידה והוא מצופה בציפוי מחזיר אור) היישר למרכז העיגול.

<u>חוק ההחזרה בפרבולה</u>

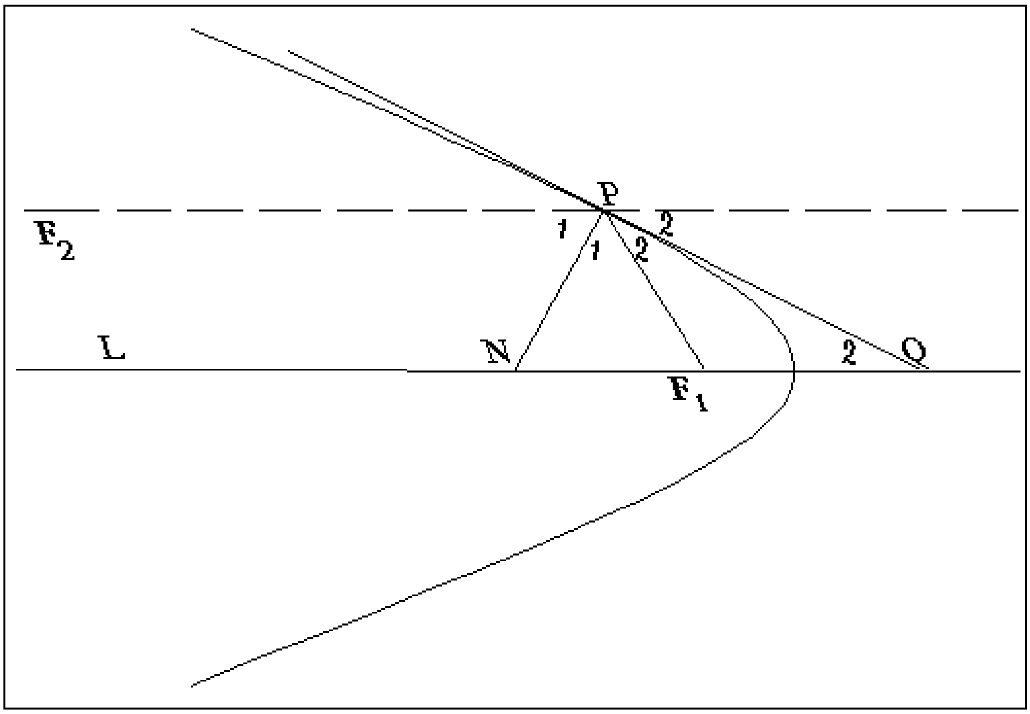
לאליפסה קיים עוד מקרה גבולי בקיצוניות הנגדית, כאשר מוקד אחד, F_1, מוחזק קבוע במקומו ואילו המוקד השני, F_2, מורחק מהמוקד הראשון מעבר לכל מרחק סופי לאורך חצי-ישר נתון L. בתהליך זה האליפסה הולכת ונעשית פחוסה יותר ויותר ובגבול היא נפתחת בכיוון חצי-הישר L ומתקבלת צורה גיאומטרית מישורית הידוע בשם ***פרבולה*** (מלה ביוונית שפרושה הוא ״מָשָׁל״) בעלת ציר L ומוקד F_1. נהוג לומר, בהתאם לכך, שלפרבולה יש לכאורה מוקד שני ב״אין-סוף״ ושכל חצי ישר המקביל לציר הפרבולה מחבר את המוקד שב״אין-סוף״ עם נקודת המפגש שלו עם הפרבולה.



כשמנסים להעתיק את חוק ההחזרה האופטי מהאליפסה לפרבולה, כמקרה גבולי של האליפסה, ניתן לצפות שכל קרני האור הנשלחות ממקור אור הנמצא במוקד הסופי F_1 של הפרבולה, מוחזרות ע״י אותה פרבולה (כשהיא מצופה בחומר מחזיר אור) לעבר המוקד השני ב״אין-סוף״, כלומר במקביל לציר הפרבולה ולהפך, כל קרני האור המתפשטות במקביל לציר הפרבולה צפויות להיות מוחזרות על ידיה לעבר המוקד הסופי שלה.

בדיון שלהלן נצא מהנחת המוצא שתכונת ההחזרה האופטית שתוארה בפסקה האחרונה מאפיינת את הפרבולה כאותו עקום שאם מייצרים מראה בצורתו, היא תחזיר כל קרן אור היוצאת מנקודה מסויימת F_1, הנקראת מוקד הפרבולה, לאורך ישרים מקבילים לישר מסויים L העובר דרך המוקד F_1, הנקרא ציר הפרבולה, וננסה למצוא תכונות גיאומטריות של הפרבולה שנובעות מאפיון אופטי זה בעזרת חוק ההחזרה (E_2), בתקווה לקבל בסוף הגדרה גיאומטרית טהורה של הפרבולה.

כך, למשל, בהתאם לחוק ההחזרה כאשר נתונים המוקד F_1 וציר הפרבולה L, אזי הניצב למשיק לפרבולה בנקודה כל שהיא P עליה, אמור להיות חוצה הזווית שבין הקטע הישר PF_1 לבין חצי הישר "PF_2" היוצא מ-P ומקביל לציר הפרבולה L.



<u>תרשים מס. 4</u>

<u>תרגיל 2</u>: יהיו נתונים ציר הפרבולה L, מוקד הפרבולה F_1 ונקודה P כלשהי על הפרבולה.

(א) הוכח שהמשיק לפרבולה בנקודה P הוא חוצה הזווית בין הקטע PF_1 לבין המשכה של הקרן "PF_2" מעבר לנקודה P (ראו תרשים מס. 4.). להיעזר בכך על מנת לבנות את המשיק באמצעות סרגל ומחוגה בלבד.

(ב) תהי Q נקודת המפגש של ציר הפרבולה עם המשיק לפרבולה בנקודה P. הוכח שהמשולש F_1PQ הינו שווה-שוקיים ולהשתמש בכך לשם בניית המשיק באמצעות סרגל ומחוגה בלבד.

(ג) תהי N נקודת המפגש של ציר הפרבולה L עם הניצב למשיק לפרבולה בנקודה P. הוכח שמוקד הפרבולה הוא אמצע הקטע NQ.

(ד) נניח שדרך הנקודה P עוברת פרבולה שנייה בעלת אותו מוקד ב-F_1 ושהציר שלה הוא המשך הציר L של הפרבולה המקורית. להוכיח ששני המשיקים לשתי הפרבולות בנקודת החיתוך שלהן P ניצבים זה לזה.

נראה כעת כיצד מחלק (ב) של תרגיל 2 אפשר לקבל, בעזרת מעט שימוש בחשבון דיפרנציאלי, את משוואת הפרבולה במערכת צירים שביחס אליה מוקד הפרבולה F_1 נמצא בראשית הצירים (מפגש הציר האופקי והאנכי) ואילו ציר הפרבולה הוא החצי השמאלי (השלילי) של הציר האופקי (ציר x). אם שיעורי הנקודה P ביחס למערכת צירים זאת הם (x,y), אזי מחלק (ב) של תרגיל 2 נסיק

$$|QF_1| = |PF_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

מכיוון שהמוקד F_1 נמצא בראשית הצירים והנקודה Q נמצאת מימינו, שיעורי הנקודה Q הם: $(\sqrt{x^2+y^2},0)$. נשתמש בכך ששיפוע הישר העובר דרך שתי נקודות נתונות ששיעוריהן: (x_1,y_1) ו- (x_2,y_2) מוגדר ע"י:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

לפיכך, שיפוע המשיק לפרבולה, העובר דרך הנקודות P ו-Q, הינו:

$$m = \frac{y-0}{x-\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}-x}.$$

מצד שני, אם הפרבולה, או חלק ממנה, היא הגרף של פונקציה גזירה: $y = f(x)$, אזי שיפוע המשיק לפרבולה בנקודה ששיעוריה הם: $(x,f(x))$, הוא בדיוק ערך הנגזרת:

$$m = y' = f'(x).$$

נובע מכאן שכל חלקי הפרבולה הם גרף של פונקציה $y = f(x)$ המספקת את המשוואה:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}-x}.$$

על מנת לפשט משוואה זו, במטרה למצוא את כל פתרונותיה, נכפול מונה ומכנה של המנה באגף ימין של המשוואה בביטוי $\sqrt{x^2+y^2}+x$ ונשתמש בזהות:

$$(\sqrt{x^2+y^2}+x)(\sqrt{x^2+y^2}-x) = y^2.$$

בהתאם לכך נוכל לרשום את משוואת הפרבולה שלעיל באופן הבא:

$$y' = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{y},$$

כלומר:

$$x + yy' = -\sqrt{x^2+y^2}.$$

אך לפי כלל השרשרת בגזירה, אם $y = f(x)$ היא פונקציה גזירה, גם הפונקציה המורכבת:

$$\upsilon(x) = \sqrt{x^2+y^2} = (x^2 + f(x))^{1/2}$$

היא גזירה, וניגזרתה נתונה ע"י:

$$\upsilon'(x) = \tfrac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}(2x+2yy') = \frac{x+yy'}{\upsilon(x)}.$$

לכן, את משוואת הפרבולה שהתקבלה לאחרונה אפשר עוד לפשט ולרשום כך:

$$\upsilon'(x) = \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = -1.$$

אך כידוע הפונקציות היחידות המקימות זהותית את המשוואה: $\upsilon'(x) = -1$ הן:

$$\upsilon(x) = -x + C$$

עבור ערך קבוע כל שהוא C.

בהתאם להגדרת $\upsilon(x)$, קיבלנו מחלק (ב) של תרגיל 2 שמשוואת הפרבולה, שמוקדה הסופי בראשית הצירים ושצירה הוא חצי ציר x השמאלי, הינה:

$$\sqrt{x^2+y^2} = -x + C\,, \qquad (*)$$

כלומר:

$$C = \sqrt{x^2+y^2} + x \qquad (**)$$

למשוואה (*) יש משמעות גיאומטרית פשוטה, המקובלת כהגדרת הפרבולה, שלפיה הפרבולה היא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות (x,y) במישור שקיים שוויון בין המרחק $\sqrt{x^2+y^2}$ של כל אחת מהן מראשית הצירים (=המוקד) לבין המרחק $(C-x)$ של אותה נקודה מהישר שמשוואתו: $x=C$ הניצב לציר x, והמכוּנֶה בשם **ישר מנחה לפרבולה**.

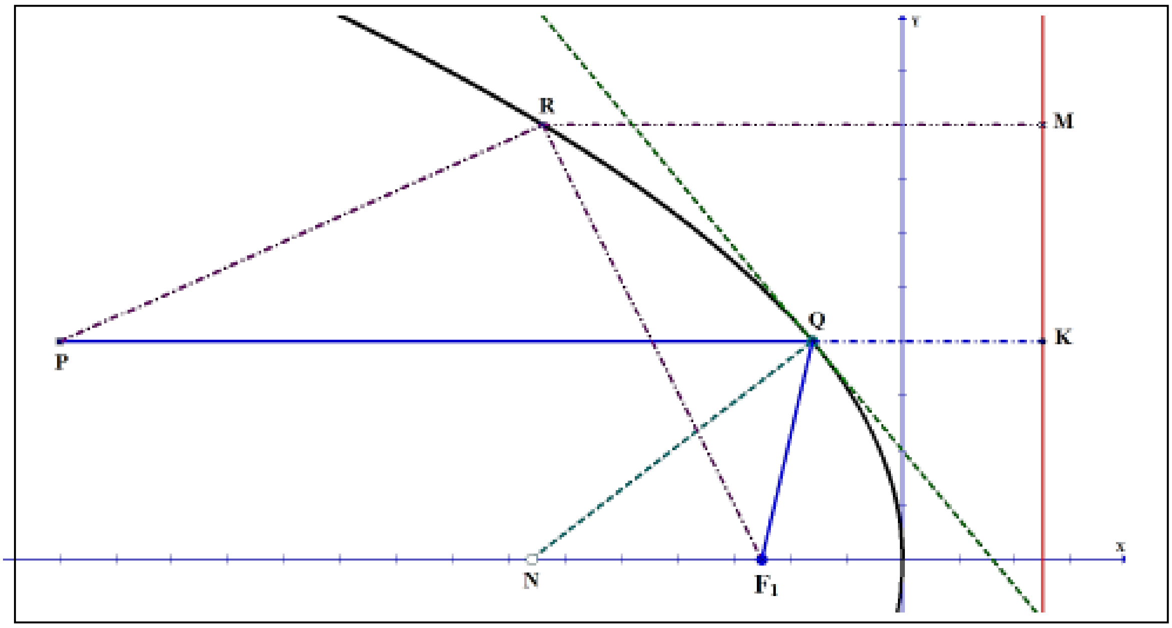
מהעלאת המשוואה (*) בריבוע והשמטת הריבוע של x משני האגפים, נובעת המשוואה האלגברית הסופית של הפרבולה:

$$\boxed{y^2 = C^2 - 2Cx}$$

כאשר על פי המשוואה (**) מסתבר שהקבוע C הינו אי-שלילי, מכיוון שאי-השוויון $\sqrt{x^2+y^2} \ge |x| \ge -x$ תקף תמיד.

הדיון שלעיל הראה כיצד מהאפיון האופטי של הפרבולה, באמצעות תכונת ההחזרה הייחודית שלה, נובעת ההגדרה הגיאומטרית של הפרבולה המנוסחת או באופן אנליטי באמצעות המשוואה (*), או באמצעות תיאורה של הפרבולה כמקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שקיים שוויון בין מרחקן מהמוקד F_1 לבין מרחקן מישר מנחה הניצב לציר הפרבולה L. "נסגור את המעגל" בעזרת עקרון מינימום הדרך של הרון כשנראה שהתכונה האופטית של הפרבולה נובעת מההגדרה הגיאומטרית של הפרבולה.

בתרשים שלהלן מצויירת פרבולה בקו שחור רצוף, עם מוקד F_1 על ציר הפרבולה המצוייר כישר אופקי כחול ועם ישר מנחה המצוייר כישר אדום רצוף אנכי. מנקודה P, הנמצאת בתרשים שלעיל מצד שמאל לפרבולה (בין שתי "זרועות" הפרבולה) יוצאות שתי קרניים, האחת- מקבילה לציר הפרבולה, מצויירת בכחול רצוף, פוגעת בפרבולה בנקודה Q וממשיכה כקו כחול מקוטע עד חיתוכה עם הקו המנחה בנקודה K, והקרן השניה היוצאת מ- P, איינה מקבילה לציר הפרבולה, מצויירת בסגול מקוטע עד מפגש שלה עם הפרבולה בנקודה R. מהנקודה R יוצא ישר ניצב לקו המנחה (שבהתאם לכך הינו מקביל לציר הפרבולה) שמצוייר אף הוא בסגול מקוטע, והחותך את הישר המנחה בנקודה M. משתי הנקודות Q,R על הפרבולה יוצאות עוד שתי קרניים המחברות אותן עם מוקד הפרבולה F_1.



תרשים מס. 5

מההגדרה הגיאומטרית של הפרבולה עולה כי

$$|QF_1|=|QK|, \qquad |RF_1|=|RM|$$

ובהתאם לכך

$$(\#) \qquad |QF_1|+|PQ|=|QK|+|PQ|, \qquad |RF_1|+|PR|=|RM|+|PR|$$

כמו כן, מכיוון ששלוש הנקודות P,Q,K נמצאות על ישר אחד, כאשר Q מפרידה בין P,K, נסיק ש-

$$|QK|+|PQ|=|PK|$$

מצד שני, שלוש הנקודות P,R,M אינן על ישר אחד בכל מקרה ש- R נקודה על הפרבולה שאיננה Q ולכן, ע"פ אי-שוויון המשולש נסיק ש-

$$|RM|+|PR|>|PM|$$

נוסיף לכך את העובדה שהקטע הישר PM הינו היתר במשולש ישר הזווית PKM ולפיכך

$$|PM|>|PK|$$

ולפיכך נסיק ש-

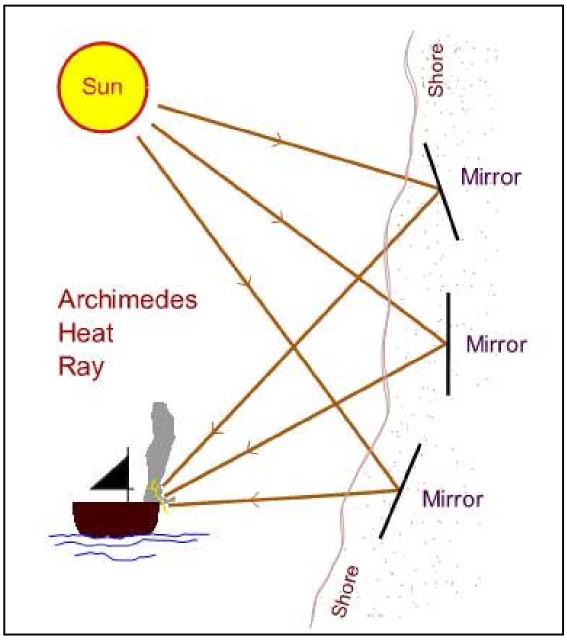
$$|RM|+|PR|>|PK|=|QK|+|PQ|.$$

מכאן, לפי שתי הזהויות $(\#)$ נובע מייד אי-השוויון

$$|RF_1|+|PR|>|QF_1|+|PQ|$$

אי-שוויון זה קובע חד משמעית שהנקודה R לאורך הפרבולה שמקטינה למינימום את הסכום $|PR|+|RF_1|$ הינה נקודת החיתוך Q של הפרבולה עם הקרן היוצאת מ- P במקביל לציר הפרבולה. לכן, עקרון מינימום הדרך של הרון קובע כי כל קרני האור המתפשטות במקביל לציר בפרבולה ומוחזרות ממנה, מתרכזות כולן במוקד F_1 של הפרבולה, כפי שרצינו להראות.

בין הסיפורים המפורסמים אודות *ארכימדס*, תושב עיר-הממלכה סיראקוז שבדרום מזרח האי סיציליה, ידוע הסיפור כיצד בשנת 212 לפנה"ס, כאשר הטיל הצי הרומאי מצור על עירו, הוא תכנן מכונות מלחמה רבות שהסיבו נזקים כבדים לצי הרומאי, ובניהם היה מתקן ממראות זכוכית שריכזו את קרני אור השמש כלפי אוניות המלחמה הרומאיות וגרמו לדלקות שפרצו על סיפונן (או לפחות גרמו לסנוור הלוחמים הרומאיים ששטו באותן ספינות). יש לשער שהמראות היו אמנם מישוריות אך הותקנו על משטח פרבולי ובכך יצרו כעין מראה פרבולית, שכאשר כיוונו את צירה כלפי השמש, כך שקרני השמש התפשטו במקביל לציר הפרבולה, הן הוחזרו ברובן כלפי מוקד אותה פרבולה, שאותו תכנן *ארכימדס* כך שימצא במרחק מן המראות השווה למרחק הספינות הרומאיות מהמקום בו הן הוצבו על חומת העיר הנצורה.



<u>הערה לתרשים שלעיל</u>: יש בתרשים זה טעות חמורה. מצאו מהי?

<u>תרגיל 3</u>: תהי נתונה פרבולה שמוקדה הראשי בראשית הצירים וצירה הוא החצי החיובי של ציר x.

תהי $y = f(x)$ פונקציה שהגרף שלה הוא הפרבולה הנתונה.

(א) להוכיח שהפונקציה $y = f(x)$ מספקת את המשוואה:

$$y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

(ב) להראות שהפונקציות המקיימות את המשוואה של חלק (א) הן מהצורה:

$$y^2 = C^2 + 2Cx$$

עבור קבוע חיובי כל שהוא C.

(ג) תהיינה נתונות משוואות של שתי פרבולות:

$$y^2 = C_1{}^2 - 2C_1x, \qquad y^2 = C_2{}^2 + 2C_2x$$

עבור שני קבועים חיוביים C_1, C_2 למצוא את שיעורי נקודות החיתוך של שתי הפרבולות ולהראות שמכפלת שיפועי המשיקים לשתי הפרבולות בכל נקודת חיתוך שווה -1. איזה מסקנה גיאומטרית נובעת מעובדה זאת? (רמז: ראו חלק (ד) של התרגיל הקודם.)

<u>חוק ההחזרה בהיפרבולה</u>

הסוג השלישי והאחרון של חתכי חרוט הוא ה-***היפרבולה*** (ביוונית = הגזמה). גם להיפרבולה יש שני מוקדים שונים המסומנים: F_1, F_2, והיא מוגדרת כאוסף כל הנקודות P במישור שהערך המוחלט של ההפרש בין מרחקיהן משני המוקדים הינו מספר חיובי קבוע נתון, המסומן כרגיל ב- $2a$, כלומר:

$$\big|\, |PF_1| - |PF_2| \,\big| = 2a.$$

ברור מהגדרה זו שלהיפרבולה יש שני חלקים, הידועים כענפי ההיפרבולה, כאשר ענף אחד הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P במישור המקיימות:

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a > 0$$

והענף השני הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות P במישור שעבורן:

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a > 0.$$

הנקודות על הענף הראשון של ההיפרבולה קרובות יותר למוקד F_2 מאשר למוקד F_1, ואילו לענף השני שייכות נקודות ההיפרבולה הקרובות יותר ל F_1 מאשר ל- F_2. מכאן נובע ששני ענפי ההיפרבולה מופרדים זה מזה על ידי הניצב המרכזי לקטע הישר המחבר את שני המוקדים. כמו כן, כל ענף הינו שיקוף מראָה של הענף השני באותו ניצב מרכזי, כלומר, הניצב המרכזי לקטע המוקדים F_1F_2 הוא ציר סימטריה אחד של ההיפרבולה, כאשר הישר העובר דרך שני המוקדים הוא ציר סימטריה שני שלה.

כל ענף של ההיפרבולה הינו עקום אין-סופי ובלתי-סגור המפריד את המישור לשני חלקים. כך למשל, הענף $|PF_2| - |PF_1| = 2a$ מחלק את המישור לשני חלקים נפרדים, כשבאחד נמצאות כל הנקודות P המקיימות

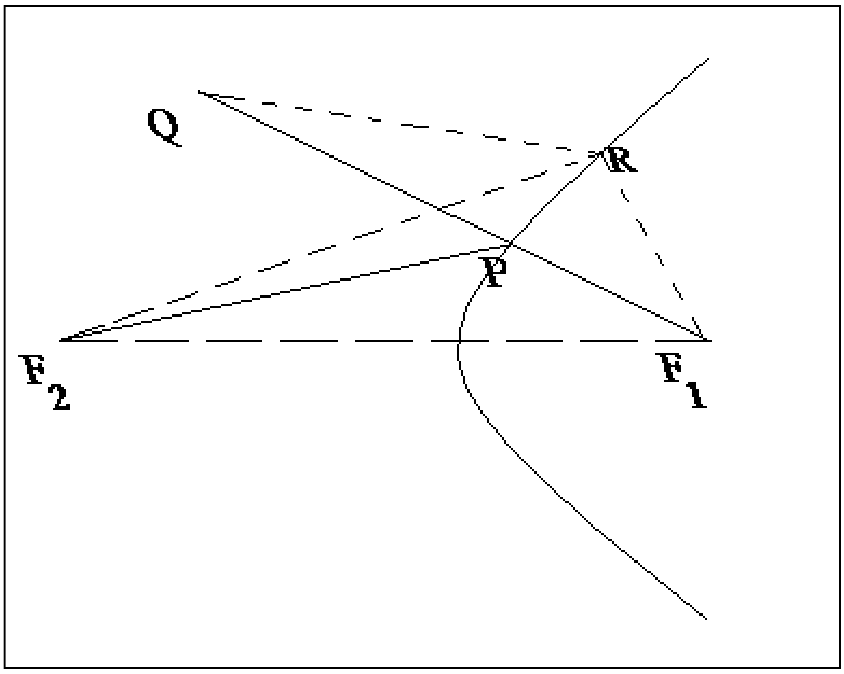
$$|PF_2| - |PF_1| < 2a$$

והכולל את המוקד F_1, ובשני מצויות כל הנקודות P המקיימות את אי השוויון הנגדי והכולל את המוקד השני.

במטרה למצוא את המשיק בנקודה P על ענף ההיפרבולה:

$$\left|PF_2\right| - \left|PF_1\right| = 2a$$

ננסה לגזור מעקרון מינימום הדרך של *הרון* את חוק ההחזרה בענף זה של ההיפרבולה. לשם כך נתאר לעצמנו מקור אור בנקודה כל שהיא Q הנמצאת עם המוקד F_2 באותו צד של ענף ההיפרבולה, ונשאל באיזה נקודה P על ענף ההיפרבולה חייבת לפגוע קרן אור היוצאת מ- Q על מנת להיות מוחזרת למוקד השני F_2?



<u>תרשים מס. 6</u>

את התשובה לשאלה זאת מספק שוב עקרון מינימום המרחק של *הרון*: הנקודה המבוקשת P היא זאת שמקטינה למינימום את אורך המסלול מ- Q – ל- F_2 העובר דרך נקודה כל שהיא השייכת לענף ההיפרבולה.

טענתנו היא שהנקודה המבוקשת P היא נקודת החיתוך של ענף ההיפרבולה עם הקטע הישר QF_1 המחבר את מקור האור Q עם המוקד F_1 המופרד מ- Q על ידי אותו ענף של ההיפרבולה. להוכחת טענתנו נשווה את אורך המסלול מ- Q ל-F_1, כשהוא עובר דרך הנקודה P, עם אורך המסלול בין אותן שתי נקודות, כשהוא עובר דרך נקודה כל שהיא אחרת R, השייכת לאותו ענף ההיפרבולה.

מצד שני, מכיוון שהנקודות P ו- R שונות זו מזו, נקבל לפי אי-שוויון המשולש לגבי המשולש QRF_1:

$$|QR| + |RF_1| > |QF_1| .$$

יחד עם זאת, היות והנקודות P,Q ו-F_1 נמצאות על ישר אחד, כאשר P מפרידה בין השתים האחרות, אזי:

$$|QP| + |PF_1| = |QF_1|$$

ולפיכך:

$$|QR| + |RF_1| > |QP| + |PF_1| .$$

אך הרי P ו- R נמצאות על אותו ענף ההיפרבולה, כך ש:

$$|RF_2| - |RF_1| = |PF_2| - |PF_1| = 2a.$$

נוסיף את השוויון האחרון לאי-השוויון הקודם ונקבל, כמבוקש:

$$|QR| + |RF_2| > |QP| + |PF_2| .$$

מאי שוויון זה נסיק, בהסתמך על עקרון המינימום של *הרון*, שלמראה היפרבולית יש תכונת ההחזרה שלפיה אם מקור אור נמצא באותו צד של המראה ההיפרבולית עם המוקד F_2, אזי כל קרן אור הנשלחת לאורך הישר המחבר את מקור האור עם המוקד F_1, מוחזרת על ידי המראָה אל המוקד F_2 (השוו זאת לתכונת ההחזרה באליפסה).

גם לחוק החזרה זה יש, כמו לשני קודמיו, משמעויות גיאומטריות המבוססות על תכונת המשיק לעקום, שבניסוח אופטי קובעת שבסמוך מאוד לנקודת ההשקה יש למראָה העקומה ולמראָה הישרה המשיקה לה אותן תכונות החזרה. מכאן נסיק שהניצב למשיק להיפרבולה בנקודה P עליה, יוצר זוויות שוות עם הקטע הישר PF_2 ועם המשך הקטע PF_1 שמעבר ל- P.

<u>תרגיל</u> 4: (א) להוכיח שהמשיק להיפרבולה בכל נקודה P עליה הינו חוצה הזווית בין שני הקטעים הישרים המחברים את נקודת ההשקה P עם מוקדי ההיפרבולה. להיעזר בכך לצורך בניית משיק להיפרבולה באמצעות סרגל ומחוגה בלבד.

(ב) תהי P נקודת חיתוך של אליפסה והיפרבולה בעלות זוג מוקדים משותפים. להראות שהמשיקים לאליפסה ולהיפרבולה בנקודה P ניצבים זה לזה.

(ג) האם קיים קשר בין חוקי ההחזרה בהיפרבולה ובפרבולה. אם קיים קשר, לתאר מהו?

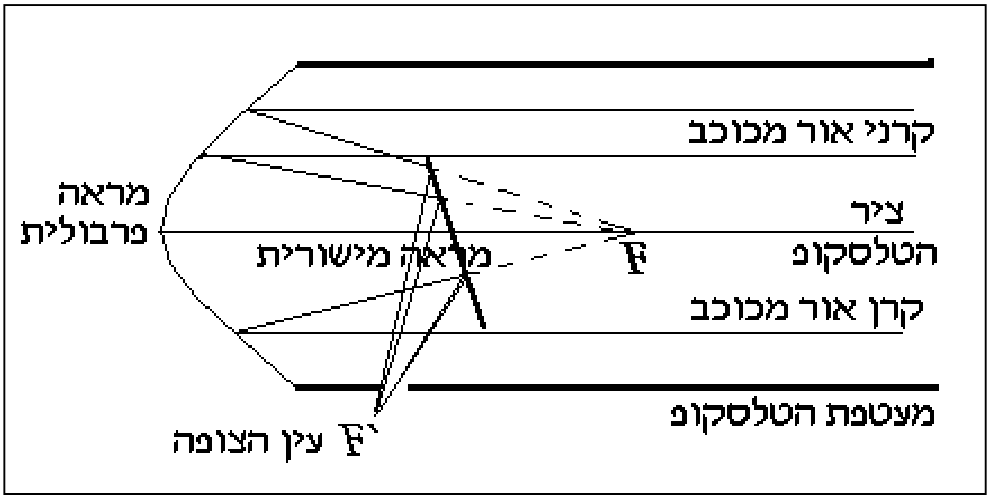
אופטיקה ואסטרונומיה

הגיעה העת, לסיום פרק זה, להיווכח שלאופטיקה הגיאומטרית יש גם צד אופטי–טכנולוגי. כפי שיסתבר להלן, לחוקי ההחזרה האופטיים, שפיתוחם תואר במהלך הפרק כמשפטים גיאומטריים לכל דבר, יש גם, למרבה הפלא, משמעות אופטית-מוחשית, והיא שאפשרה למתמטיקאי-פיסיקאי הבריטי הגדול *ניוטון* ולאסטרונום הצרפתי *קסגרין* **(Cassegrin)** לבנות טלסקופ מראות יעיל בהרבה מטלסקופ העדשות שהיה מקובל קודם לכן, שפיזר ובלע חלק ניכר מקרני האור שהגיעו אליו.

ניוטון פיתח את טלסקופ המראות הראשון שבעיקרו היה מורכב ממראָה פרבולית גדולה, שבהתאם לחוק ההחזרה בפרבולה, אם ציר המראָה מכוון ישר אל כוכב מרוחק, שבקני מידה פיסיקליים-ארציים נתן לראותו כאילו הוא נמצא ב"אין-סוף", ובהתאמה קרני האור המגיעות ממנו עשויות להראות כמקבילות לציר המראָה, אזי המראָה מרכזת את כל קרני האור המגיעות מהכוכב אל מוקד הפרבולה.

הבעיה שניצבה בפני *ניוטון* בעת תכנון הטלסקופ שלו הייתה שבין מוקד המראָה הפרבולית לבין עין הצופה חוצצת מעטפת גליל מתכתית, כשציר המראָה הפרבולית הוא גם ציר המעטפת הגלילית שנועדה למנוע סנוור על ידי קרני אור המגיעות ממקורות אור שונים, והשאלה הייתה איך להסיט את קרני האור אל עין הצופה הנמצא מחוץ למעטפת הטלסקופ.

פתרונו של *ניוטון* מתואר בתרשים מס. 7. הוא הציב מראה מישורית במקומו הגיאומטרי של האנך המרכזי לקטע הישר המחבר את מוקד המראה הפרבולית (הנקודה F) עם עין הצופה (הנקודה F'), הנמצאת בסמוך לנקב במעטפת הטלסקופ. בהתאם לחוק ההחזרה במראות מישוריות (החוק השני של *אוקלידס*) המראה המישורית הזאת החזירה את קרני האור, בדרכן אל המוקד F, הישר לעין הצופה בנקודה F'.

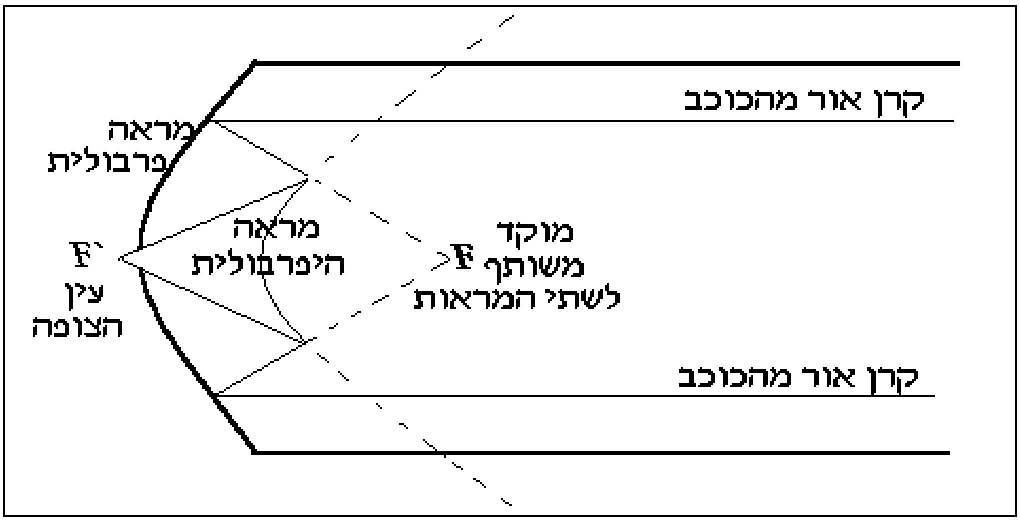


תרשים מס. 7

תרגיל 5 : להסביר גיאומטרית איך מחוק ההחזרה במראות מישוריות נובע שמראָה מישורית המוצבת במקום הגיאומטרי של האנך המרכזי לקטע הישר FF' מחזירה לעבר הנקודה F' את כל קרני האור הנשלחות לעבר הנקודה F מהצד הנגדי של המראָה.

בפתרון של *ניוטון* שתואר לעיל היה ליקוי רציני אחד שדרש תיקון: על מנת שאל עין הצופה יגיעו כמה שיותר קרני אור מהכוכב הנצפה, היה צורך להציב מראָה מישורית כמה שיותר גדולה שתסיט את קרני האור הללו אל עין הצופה. אך ככל שמראָה מישורית זו הייתה גדולה יותר היא מנעה מיותר קרני אור מהכוכב להגיע אל המראָה הפרבולית, ובכך יצא הרווח בהפסד.

ליקוי זה נפתר על ידי *קסגרין* באופן הבא: במקום מראָה מישורית הוא הציב מראָה היפרבולית קטנה בין המראָה הפרבולית הראשונית לבין המוקד שלה F, כך ש- F הוא גם המוקד הקרוב של המראה ההיפרבולית, ואילו המוקד השני, המרוחק יותר, 'F, נמצא מעבר לנקב הצצה שנוקב במראה הפרבולית, בהמשך לציר שלה (התבוננו בתרשימים מס. 9 – 8 המצורפים).

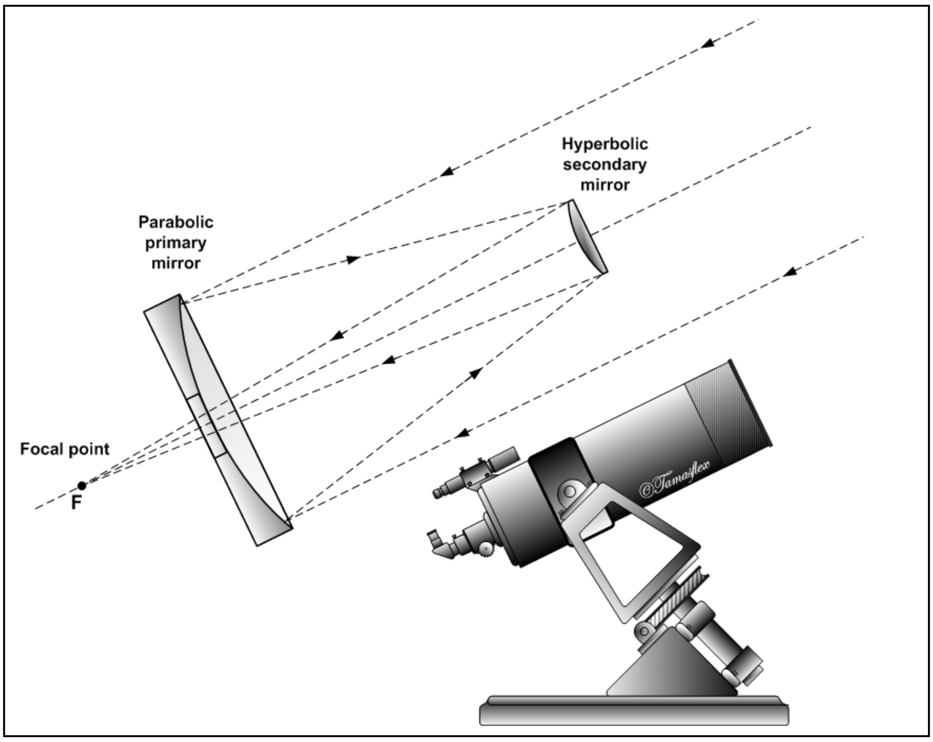


<u>תרשים מס. 8</u>

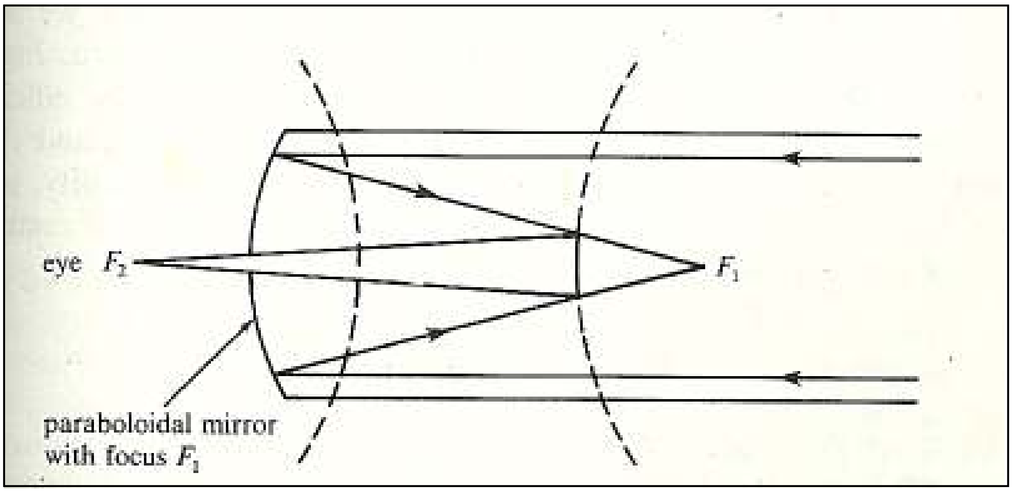
בהתאם לחוקי ההחזרה במראות פרבולית והיפרבולית, שהתגלו קודם הודות לעקרון מינימום הדרך של *הרון*, קרני האור המגיעות מכוכב רחוק הנמצא על ציר המראָה הפרבולית, מוחזרות ממנה לעבר המוקד F הפנימי לטלסקופ והמשותף לשתי המראות. אך לפני הגיען למוקד F הן פוגעות במראָה ההיפרבולית הקטנה, שהוצבה שם ע״י *קסגרין*, ומוחזרות ממנה הישר אל עין הצופה הנמצאת במוקד השני 'F החיצוני לטלסקופ.

נעיר, לבסוף, שלאחר שמיקום שני המוקדים F ו- 'F נקבע על ידי *קסגרין*, עדיין נותר ברשותו החופש לקבוע את הערך של הקבוע a המופיע במשוואת ענף ההיפרבולה $\left|PF'\right| - \left|PF\right| = 2a$.

בפרט, ככל שהגדיל *קסגרין* את הערך של הקבוע a כך הלכה המראָה ההיפרבולית והתקרבה אל המוקד הפנימי F ותוך כדי כך הלכה וקטנה ובכך חסמה את הדרך בפני הרבה פחות קרני אור המגיעות מן הכוכב מכפי שהיה ניתן בטלסקופ המראות המקורי של *ניוטון*.



תרשים מס. 9



תרשים מס. '9

מקורות:

1) **The Role of Mathematics in Science,** M.M.Schiffer, L.Bowden (The Mathematical association of America), Chapter 3.1-3.3, pp. 75-80 & Chapter 3.10-3.12, pp. 95-103.