<u>עקרון מינימום הזמן של *פרמה*</u>
<u>אופטיקה, אנליזה ואפילו מכניקה</u>

רשימות הרצאות – *ראובן הרמלין*

<u>מבוא, שבירת קרני האור</u>

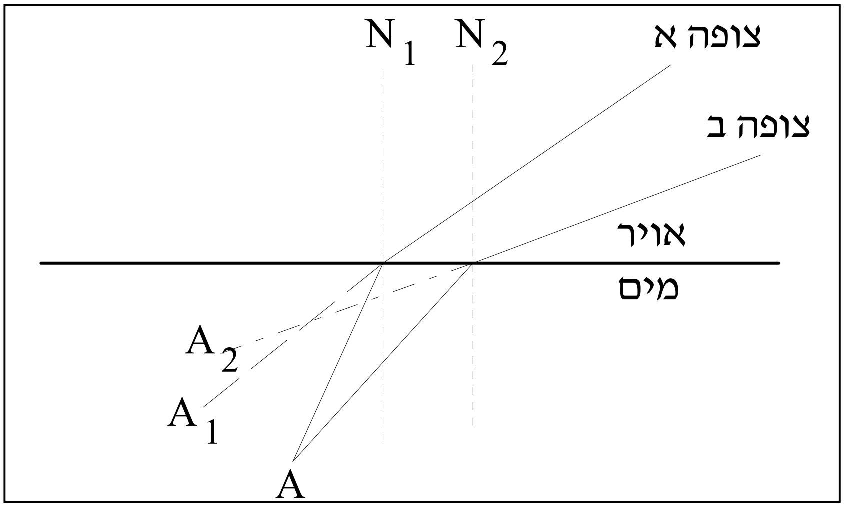
בפרק הקודם אודות עקרון מינימום הדרך של *הרון*, הוסבר שעקרון זה עשוי להיחשב כאכסיומה גיאומטרית שממנה נובעים שני חוקי האופטיקה של *אוקלידס* כשני פסוקים גיאומטריים לכל דבר. אך למרות ששני חוקי האופטיקה הללו קיבלו גם תוקף כחוקי טבע הודות לעובדה שהם עברו את מבחן הניסיון, שהוא קנה המידה העליון לתקפותו של כל חוק טבע, לא היה בכך די בכדי לתת אף לעקרון המינימום של *הרון* מעמד של חוק טבע, משום שלשם כך חייב היה גם הוא לעמוד באותו מבחן.

והנה כמה מאות שנים אחרי *הרון* בא מדען אלכסנדרוני אחר, בשם ***קלאודיוס פטולמאוס*** (ביוונית **Κλαύδιος Πτολεμαῖος** חי בערך בשנים 85-165 לספירה, שהיה מגדולי האסטרונומים של הזמן העתיק, והמנסח הראשון של התיאוריה הגיאוצנטרית באסטרונומיה שקבעה שהארץ היא מרכז היקום שכל כוכבי הלכת והשמש סובבים סביבה, תיאוריה שהחזיקה מעמד כ- 1500 שנים עד קופרניקוס), והחל לחקור בין השנים 127 ל-141 (או 151) לספירה, תופעות אופטיות שלפחות בחלקן היו ידועות עוד משחר ימי האנושות, ושהיוו סתירה חותכת לעקרון מינימום הדרך של *הרון*. בעת שערך תצפיות אחר כוכבים מסוימים, נוכח *תלמי* שכוכבים אלו נראים כסוטים ממסלולם הצפוי ככל שהם קרבים לאופק. *תלמי* ייחס סטיות אלו להתעקמות מסלולי קרני האור בעת שהן עוברות דרך שכבות אויר בעלות צפיפויות שונות במרומי האטמוספירה.

קלאודיוס פטולמאוס

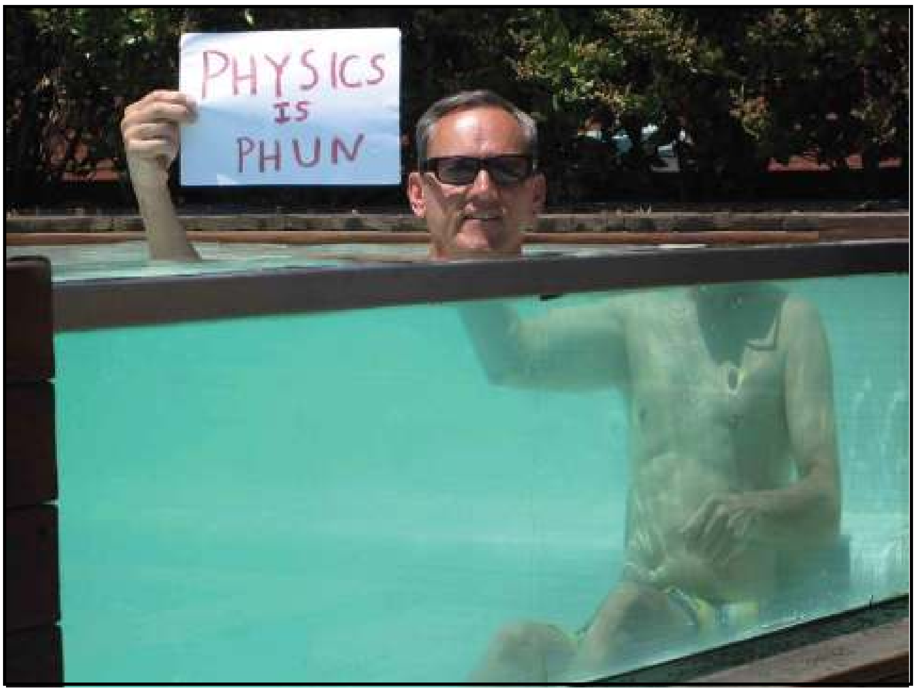
תלמי ביסס את הסברו על שתי תופעות ידועות: האחת, שככל שמטפסים לגובה צפיפות האוויר קטנה (כפי שחש כל מטפס הרים) והשניה, שמקל ישר השקוע בחלקו בתוך צנצנת מים שעל פניהם צפה שכבת שמן, נראה כאילו הוא שבור מספר פעמים כשמתבוננים בו מכיוונים מסוימים. התופעה השניה הוסברה בכך שלקרני האור, שבאמצעותן אנו רואים את חלקי המקל השקועים במים או בשמן, אין תמיד מסלולים ישרים, כטענת *אוקלידס* בחוק הראשון שלו, אלא מסלולים המתעקמים ומשנים את כיווניהם

בנקודות המעבר ממים לאוויר או משמן לאוויר, ומה שאף "גרוע" מכך, שינויי כיוון אלו אינם זהים לגבי קרני אור המגיעות לנקודות המעבר מחומר אופטי אחד לאחר מכיוונים שונים.



<u>תרשים מס. 1</u>

כתוצאה מכך שני צופים שונים הממוקמים בשתי נקודות שונות: א' ו–ב' מחוץ למים, ומתבוננים באותו חפץ השקוע במים בנקודה A (ראו תרשים מס. 1 והתמונה שלהלן) רואים אותו כאילו הוא נמצא בשתי נקודות שונות A_1, A_2, בהתאמה, ובמקום שונה ממקומו האמיתי.



<u>תופעת שבירת קרני אור</u>

התופעה האופטית הזאת, הידועה כ״שבירת קרני האור״ (״תפסיק לשבור את הקרניים!״) מתרחשת, כפי שהבחינו עוד לפני *תלמי*, בכל מעבר קרני אור בין שני חומרים שקופים (כלומר חדירים לקרני אור), או בין שתי שכבות בעלות צפיפויות שונות של אותו חומר שקוף. הראשוניות של *תלמי* הייתה בכך שהוא הבין שעל מנת לחקור תופעת טבע כה מורכבת כשבירת קרני אור במעבר בין שני חומרים שקופים נתונים ולנסות להגיע לניסוח מדויק עד כמה שניתן של חוק הטבע המתאר תופעה זאת, יש הכרח למדוד שתי זוויות: האחת, הידועה כ ***זווית הפגיעה***, היא הזווית שבין הקטע הישר המייצג את מסלול קרן האור בשכבת החומר השקוף הראשונה, לפני המעבר, לבין הניצב למשטח המפריד בין שני החומרים (בהנחה שזהו משטח מישורי); השניה, המוכרת כ ***זווית השבירה***, היא הזווית בין אותו ניצב לבין הקטע הישר המייצג את מסלול קרן האור בשכבה השנייה, לאחר המעבר.

חוק השבירה, שאת ניסוחו המתמטי חיפש *תלמי* וחיפשו עוד רבים אחריו, היה אמור לספק את היחס המדויק בין זווית השבירה לזווית הפגיעה, אך מספר קשיים ניצבו בפני *תלמי* וממשיכי דרכו: הקושי הראשון היה חוסר הדיוק במדידת הזוויות כתוצאה מהאיכות הירודה של מכשירי המדידה באותם זמנים. אותו קושי ניצב גם בפני *אוקלידס* לפניו כשניסה לגלות את חוק ההחזרה שלו, אך הודות לפשטות היחסית של תופעת ההחזרה והשכנוע העצמי של *אוקלידס* שהתבסס על אינטואיציה גיאומטרית חריפה, מסוגל היה *אוקלידס* לצפות מראש (כלומר לנחש) מהו הניסוח הגיאומטרי של חוק זה ולהטות את תוצאות תצפיותיו על מנת שיתאימו לציפיותיו.

מכאן מגיעים לקושי השני והוא המורכבות של תופעת השבירה ביחס לתופעת ההחזרה. כתוצאה ממורכבות זאת לא מסוגל היה *תלמי* ואף רבים ממשיכי דרכו, לנחש באופן סביר מה צפוי להיות הנוסח המתמטי לחוק השבירה שיעמוד במבחן התצפיות.

מה שהיה ברור כבר לתלמי הוא שבמעבר מחומר אופטי נתון אחד לחומר אופטי נתון שני, זווית השבירה, שתסומן בהמשך ב–β, נקבעת באופן בלעדי על ידי זווית הפגיעה, אותה נסמן להבא ב–α. על פי המינוח המקובל במתמטיקה אומרים שהזווית β הינה פונקציה כל שהיא של הזווית α, ורושמים בהתאם: $\beta = F(\alpha)$.

אחת הדרכים היותר מקובלות לתאר פונקציה $\beta = F(\alpha)$ היא באמצעות טבלה בת שתי עמודות: עמודת המשתנה הבלתי תלוי α ועמודת המשתנה התלוי β, כשבעמודת α מפורטת קבוצת ערכים בדידה של ערכי α ומולם, בעמודת β רשומים בהתאמה ערכי β, אחד לאחד. בדיוק כך החל *תלמי* לסכם את תוצאות תצפיותיו בשבירת קרני האור, ובכך המשיכו ההולכים בעקבותיו, שהודות לשכלולים באמצעי המדידה יכלו לבנות טבלאות יותר מדויקות ויותר מפורטות המתארות טוב יותר את זווית השבירה β כפונקציה של זווית הפגיעה α.

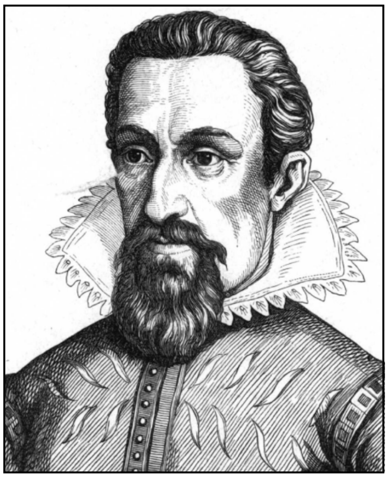
מסקנה ראשונה שהסתברה מעיון בטבלאות אלו הייתה שתמיד הערך של זווית השבירה התואם לערך $\alpha=0$ של זווית הפגיעה, הוא $\beta=0$, כלומר שלמעשה אין שבירת קרני אור כשהן מגיעות בניצב למשטח ההפרדה בין השכבות השקופות. הניסוח המתמטי של נתון זה הוא באמצעות הזהות: $0 = F(0)$.

מסקנה שניה שעלתה מאותן טבלאות הייתה שעבור ערכי α הקרובים מאוד לאפס (כלומר, כשקרן האור פוגעת במשטח ההפרדה כמעט בניצב) קיים מספר קבוע חיובי κ, כך ש $\beta \cong \kappa\alpha$, כשהערך

של אותו קבוע κ תלוי בחומרים השקופים בשתי השכבות שדרכן עוברת קרן האור לפני ואחרי השבירה. אך ככל שזווית הפגיעה α התרחקה מאפס, היחס בין הזוויות β ו-α חדל מלהיות קבוע.

מכיוון שקבוצת ערכי המשתנה הבלתי-תלוי α בכל טבלה, ותהיה מפורטת ככל שתהיה, היא תמיד סופית ובדידה, תמיד יהיו קיימים ערכי α שאינם מופיעים בטבלה. לפיכך יותר ויותר מדענים הוסיפו לנסות כוחם במציאת ביטוי אנליטי (כלומר נוסחה) עבור הפונקציה $\beta=F(\alpha)$, שלא רק יעמוד בהתאמה עם תוצאות התצפיות כפי שבאו לידי ביטוי בטבלאות הללו, אלא אף יאפשר לצפות מראש מהם את ערכי זווית השבירה β המתאימים לאותם ערכי זווית הפגיעה α שאינם מופיעים בטבלאות. אך כל הניסיונות למצוא ביטוי אנליטי כזה נכשלו, כולל הניסיונות של האסטרונום הגדול *יוהאן קפלר* שהצליח במשימה דומה, לא פחות מורכבת, כאשר על יסוד חקירת הטבלאות שבנה קודמו האסטרונום המלכותי הדני *טיכו ברהה* גילה את הנוסחים המתמטיים המדויקים של שלושת חוקי האסטרונומיה של מסלולי כוכבי הלכת סביב השמש הנושאים את שמו.

טיכו ברהה 1546–1601



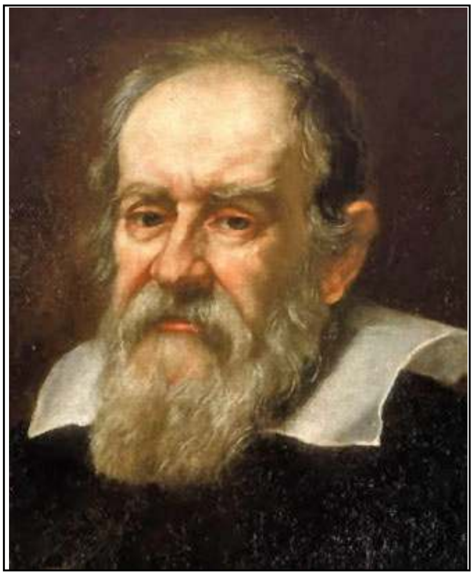
יוהאנס קפלר 1571–1630

מן הראוי לספר בשלב זה שקיים סוג דגים הניזונים מחרקים המעופפים מעל פני המים, אותם הם צדים על ידי התזת סילון מים הפוגע בחרק בעת מעופו ומפילו למים. עד כה הסיפור נשמע פשוט ורגיל, אך עקב תופעת שבירת קרני האור, הדג השוחה במים רואה את החרק המעופף באוויר במקום אחר מזה שבו הוא נמצא באותו רגע, ואף על פי כן הוא פוגע כמעט תמיד במטרה. המסקנה הבלתי נמנעת מכך היא שהדג "מכיר" היטב את חוק השבירה של קרני האור עד כדי כך שהוא מסוגל "להתחשב" בו בעת שהוא מכוון את סילון המים למטרתו והודות לכך לדייק בפגיעותיו. במלים אחרות דג זה "מצליח" היכן שגדולים וטובים כמו *תלמי* ו-*קפלר* נכשלו.

<u>עקרון המינימום של *פרמה* וחוק *סנל*</u>

מי שהצליח לבסוף לגבור על כל הקשיים ולא רק לגלות חוק שבירה שעמד במבחן הניסיון כחוק טבע, אלא אף לגזור אותו כתוצאה מתמטית מעקרון מינימום הדומה לעקרון מינימום הדרך של *הרון*, היה אחד מגדולי המתמטיקאים בכל הזמנים, הלא הוא ***פייר דה פרמה***, עורך דין ושופט במקצועו שחי בשנים 1601-1665 ושעסק במתמטיקה כתחביב בלבד.

פייר דה פרמה 1601-1665



גליליאו גלילאי 1564-1642

כפי שקרה לא פעם בתולדות המדעים, *פרמה* בכלל עסק בשאלה שונה לחלוטין והיא: "האם יש לאור מהירות התפשטות או שמא התפשטותו היא בו-זמנית?" *פרמה* לא היה הראשון להתמודד עם בעיה זאת. הקדים אותו הפיסיקאי האיטלקי המפורסם *גליליאו גלילאי* (1564-1642) שהיה ככל הנראה הראשון שערער על ההשקפה השלטת בזמנו שהתפשטות האור היא בו-זמנית וניסה אף לבדוק מהי מהירות האור באופן ניסויי. אך תוצאות הניסויים שערך *גליליאו* היו מאכזבות מכיוון שהמכשור של אותם זמנים לא היה מדויק דיו לשם מדידת מהירות כה גבוהה כמהירות האור, ו-*גליליאו* לא הצליח להפריך את השקפת ההתפשטות הבו-זמנית של האור. היה צורך להמתין עוד תקופה ארוכה עד שפותחו מכשירים מדויקים מספיק שבאמצעותם אפשר היה להוכיח שלאור יש מהירות התפשטות סופית ואף למודדה.

אך *פרמה* לא המתין עד לפיתוח אותם מכשירים, ואף לא נזקק להם, שכן כמתמטיקאי גדול הוא ניחן בשתי תכונות חיוניות לגדולה מתמטית (בנוסף לאחרות שגם בהן היה מצויד במנות גדושות) והן דמיון פורה וסקרנות אינטלקטואלית. תכונות אלו הניעו אותו שלא להסתפק בהשקפות ובתשובות מקובלות ולשאול מספר שאלות שמהן צמח הכל: אז מה אם בעולמנו מהירות האור היא בלתי-מדידה או אינה קיימת? ואולי קיים עולם, ואין זה חשוב כלל אם הוא מציאותי או דמיוני, שבו האור נע מנקודה לנקודה כמו שכל עצם פיסיקלי עובר ממקום למקום במהירות כזאת או אחרת? כמתמטיקאי רשאי היה *פרמה* להניח הנחה מתמטית שלאור יש מהירות התפשטות סופית, מבלי להצדיק הנחה זאת על ידי הניסיון, ואז לשחק בהנחה זאת משחק אינטלקטואלי דמיוני לחלוטין, ולנסות לתאר לעצמו עולם שבו הנחה זאת תקפה, ולהסיק מסקנות הגיוניות ממנה, בהסתמכו אך ורק על חוקים מתמטיים מופשטים. וכך אמנם עשה!

ראשית, שאל את עצמו *פרמה* שאלה פשוטה ומתבקשת לאור הנחתו הראשונית: האם לאור יש מהירות קבועה יחידה? מאחר שזמן מחושב לעתים קרובות כמנה של הדרך המחולקת במהירות, הרי שתשובה חיובית לשאלה זו גוררת זהות בין הדרך הקצרה ביותר לדרך המהירה ביותר. במלים אחרות, בעולם שבו לאור יש מהירות קבועה יחידה, עקרון מינימום הדרך של *הרון* זהה לעקרון מינימום הזמן של *פרמה* שניסוחו:

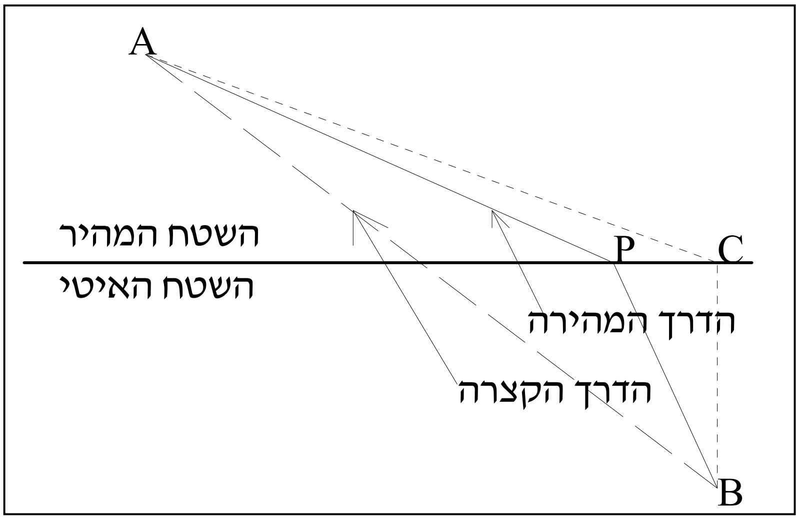
קרני האור מתפשטות בדרך המהירה ביותר האפשרית בין כל שתי נקודות במסלולן.

עד כה הכל נראה טוב ויפה, אך תופעת שבירת קרני האור הרי מהווה סתירה ברורה לעקרון מינימום הדרך ולפיכך גם לעקרון מינימום הזמן, במידה ומניחים שמהירות האור היא קבועה ויחידה. אך פה צץ במוחו הפורה של *פרמה* רעיון נוסף:

מהירות ההתפשטות של האור בכל חומר שקוף בנפרד הינה קבועה, אך בחומרים שקופים שונים מהירות ההתפשטות של האור שונה.

אם אמנם כך הדבר, חשב *פרמה*, הדרך המהירה ביותר מנקודה הנמצאת בשכבת חומר ראשונה, שבה מהירות התפשטות האור אחת, לנקודה השוכנת בשכבת חומר שכנה שמהירות התפשטות האור בה שונה, אינה עוד הדרך הקצרה ביותר!!!

סביר להניח ש*פרמה* המשיל זאת לדרכו של נהג עגלה שנדרש להגיע בפרק הזמן הקצר ביותר מנקודה A, הנמצאת בשטח שתנועת העגלה שם קלה ומהירה יחסית, לנקודה B, הנמצאת בשטח שתנועת העגלה בו כבדה ואיטית. השיקול הסביר של אותו נהג הוא לקצר עד כמה שניתן את החלק ממסלול הנסיעה שעל העגלה לעבור בשטח הקשה לתנועה, כלומר, לבחור את מסלול הנסיעה באופן שהחלק האיטי של הדרך יהיה עד כמה שיותר קרוב לדרך הקצרה ביותר מקו ההפרדה בין שני השטחים אל הנקודה B, שהיא לאורך הישר הניצב לקו ההפרדה והעובר דרך B (ראו תרשים מס. 2). אך השאלה היא עד כמה קרוב?



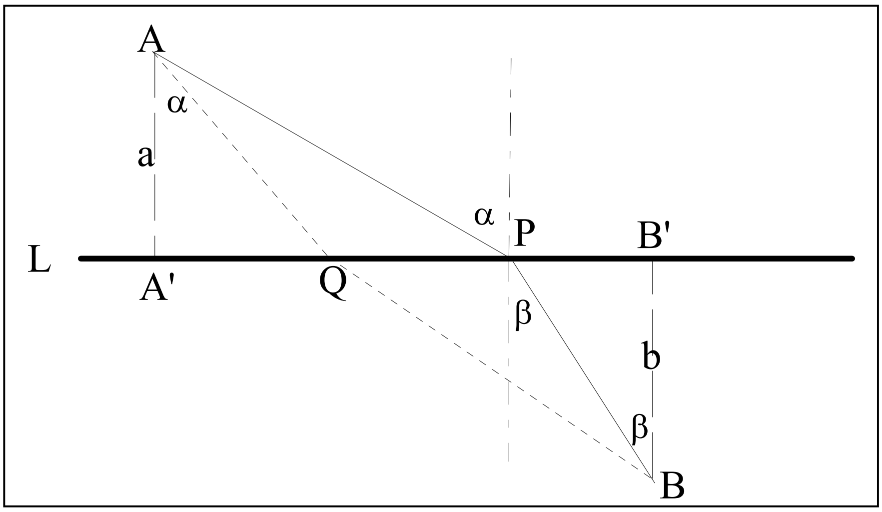
<u>תרשים מס. 2</u>

במידה ואכן אלו הם פני הדברים, המשיך *פרמה* במשחקיו הדמיוניים, אולי חוק שבירת קרני האור אינו אלא רמז לכך שהעיקרון השולט באופטיקה הגיאומטרית הוא עקרון מינימום הזמן במקום עקרון מינימום הדרך? הלא שני עקרונות אלו הם "אותה גברת בשינוי אדרת" כל עוד לאור יש מהירות התפשטות קבועה אחת, כך שכשם ששני חוקי האופטיקה של *אוקלידס* נובעים כתוצאות גיאומטריות מעקרון מינימום הדרך, הרי הם נובעים באותה מידה גם מעקרון מינימום הזמן, כל עוד האור מתפשט בחומר שקוף יחיד. מצד שני, עקרון מינימום הזמן, לפי השערתו של *פרמה*, עשוי לתת הסבר לתופעת שבירת קרני האור ואולי אף להביא להשגת הנוסח המתמטי של חוק השבירה של קרני האור אותו חפשו זמן כה רב.

גדולתו המתמטית של *פרמה* באה לידי ביטוי בכך שהוא אמנם הצליח לגזור את הנוסח המתמטי המבוקש של חוק השבירה של קרני האור כמסקנה מתמטית מפורשת של עקרון מינימום הזמן שלו, נוסח שאת תקפותו כחוק טבע ניתן היה לבדוק באופן ניסויי רק זמן רב אחרי תקופתו של *פרמה*.

על מנת לתאר איך גזר *פרמה* את חוק השבירה של קרני האור מתוך עקרון המינימום שלו, יש צורך להכניס לשימוש מספר סימונים מוסכמים: נניח שקרן האור יוצאת לדרך מנקודה A המצויה בשכבת חומר שקוף שמהירות התפשטות האור בו היא v_1, ומגיעה בסוף דרכה לנקודה B הנמצאת בשכבת חומר שקוף אחר שמהירות התפשטות האור בו היא v_2. נניח עוד ששתי השכבות הללו מופרדות זו מזו ע״י מישור ותהי P הנקודה על המישור המפריד שדרכה עוברת קרן האור במסלולה מ- A ל- B.

מכיוון שמהירות התנועה של קרן האור מ-A ל-P היא קבועה וכך היא גם מהירות התפשטות האור מ-P ל-B, הדרכים המהירות ביותר מ-A ל-P ומ-P ל-B הן גם הקצרות ביותר, ולפיכך קרן האור חייבת לנוע מ-A ל-P ומ-P ל-B לאורך הקטעים הישרים AP ו-PB. יחד עם זאת, שני קטעים אלו אינם נמצאים על ישר אחד, כתוצאה משבירת קרן האור ב-P, ומכיוון שהנקודה P משותפת לשניהם, שני הקטעים הללו קובעים מישור יחיד, שהוא מישור התרשים מס. 3. יהי L הישר המשותף למישור התרשים ולמישור ההפרדה בין שתי השכבות. מהנקודה A יורד ניצב לישר L וחותך אותו בנקודה A' ומהנקודה B יוצא ניצב ל-L הפוגש אותו בנקודה B'.



<u>תרשים מס. 3</u>

נוסיף ונסמן: $|A'B'|=r$, $|BB'|=b$, $|AA'|=a$, וכן:

$$0\leq |A'P| = x_0 \leq r$$

ובהתאם לכך:

$$|PB'| = r - x_0.$$

אזי על פי משפט *פיתגורס*

$$|\mathrm{AP}|=\sqrt{a^2+{x_0}^2},\qquad |\mathrm{PB}|=\sqrt{b^2+(r\text{-}x_0)^2}.$$

מכיוון שמ-A ל-P קרן האור נעה במהירות v_1, זמן התנועה ניתן לחישוב על ידי:

$$t_1=\frac{|\mathrm{AP}|}{\mathrm{v}_1}=\frac{\sqrt{a^2+{x_0}^2}}{\mathrm{v}_1}$$

ובאופן דומה נסיק שזמן תנועת קרן האור מ-P ל-B נתון על ידי:

$$t_2=\frac{|\mathrm{PB}|}{\mathrm{v}_2}=\frac{\sqrt{b^2+(r\text{-}x_0)^2}}{\mathrm{v}_2}.$$

לכן זמן התנועה של קרן האור מ-A ל-B דרך P הוא סכום שני הזמנים, כלומר:

$$t=t_1+t_2=\frac{\sqrt{a^2+{x_0}^2}}{\mathrm{v}_1}+\frac{\sqrt{b^2+(r\text{-}x_0)^2}}{\mathrm{v}_2}=f(x_0).$$

בנקודה זאת הפעיל *פרמה* לראשונה שיקול שעתיד, עם המצאת החשבון הדיפרנציאלי על ידי *ניוטון* ו-*לייבניץ*, להיות הבסיס לפתרון בעיות מינימום ומכסימום והמוכר כיום בשם משפט *פרמה* ושניסוחו במונחי החשבון הדיפרנציאלי קובע:

תהי $t=f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע נתון $I=[c,d]$ ותהי x_0 נקודה <u>פנימית</u> ב-I שבה יש לפונקציה הנתונה נגזרת. אם הפונקציה $f(x)$ מקבלת בנקודה הנתונה x_0 את ערכה המינימלי או המקסימלי ביחס לקטע הנתון I, אזי הנגזרת של $f(x)$ ב-x_0 שווה לאפס, כלומר, לפי הסימון המקובל: $f'(x_0)=0$.

אך למרות שמשפט זה נושא את שמו, *פרמה* לא היה מזהה אותו בניסוחו הנתון לעיל מהסיבה הפשוטה שהחשבון הדיפרנציאלי, כפי שאנו מכירים אותו היום, נוסח אחרי זמנו ומושג הנגזרת וכללי הגזירה היו בלתי מוכרים לו. אך מכשול מסוג זה אינו בגדר מחסום בלתי עביר לגאון כמו *פרמה*, ועיון מעמיק בדרך שהתגבר על מכשול זה עשוי לגלות את ניצני החשבון הדיפרנציאלי ואת עיקרי ההוכחה של משפט המנציח את שמו.

פרמה פתח בכך שהציג את עקרון מינימום הזמן שלו כאי-שוויון בין משך זמן ההתפשטות t של קרן האור במסלולה האמיתי מ–A ל-B דרך הנקודה P, כפי שחושב לעיל, לבין משך הזמן t_Q שהיה לוקח לקרן האור להגיע מ-A ל-B לו ניתן היה לאלצה לעבור דרך נקודה כל שהיא Q בקטע A'B'

על ישר ההפרדה L (התבוננו שוב בתרשים מס. 3). באופן זהה לחישוב משך הזמן הראשון t אפשר גם לחשב את משך הזמן השני t_Q, ואם מסמנים $x=|\mathrm{A'Q}|$ מקבלים:

$$t_Q=\frac{|\mathrm{AQ}|}{\mathrm{v}_1}+\frac{|\mathrm{QB}|}{\mathrm{v}_2}=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\mathrm{v}_1}+\frac{\sqrt{b^2+(r-x)^2}}{\mathrm{v}_2}=f(x).$$

אזי אי-השוויון הבא מבטא את התוכן של עקרון מינימום הזמן:

$$t-t_Q=f(x_0)-f(x)\leq 0,$$

עבור כל נקודה Q בקטע הישר $\mathrm{A'B'}$, כלומר לכל מספר x בין המספרים 0 ל-r, כשהשוויון מושג בדיוק כאשר $\mathrm{P=Q}$, כלומר כאשר $x=x_0$.

__שאלה:__ מדוע הנקודה Q מוגבלת רק לקטע $\mathrm{A'B'}$ ובהתאמה המספר x מוגבל רק לקטע שבין 0 ל-r ? האם לא ייתכן שמחוץ לקטע זה תמצא נקודת מינימום של $f(x)$?

מאי-השוויון:

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+{x_0}^2}}{\mathrm{v}_1}+\frac{\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}}{\mathrm{v}_2}\right)-\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{\mathrm{v}_1}+\frac{\sqrt{b^2+(r-x)^2}}{\mathrm{v}_2}\right)\leq 0$$

מתקבל אי-השוויון:

$$\frac{\sqrt{a^2+{x_0}^2}-\sqrt{a^2+x^2}}{\mathrm{v}_1}-\frac{\sqrt{b^2+(r-x)^2}-\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}}{\mathrm{v}_2}\leq 0.$$

נכפול מונה ומכנה של המנה הראשונה בסכום השורשים: $\sqrt{a^2+{x_0}^2}+\sqrt{a^2+x^2}$, ואת המונה והמכנה של המנה השנייה נכפול בסכום השורשים המתאים:

$$\sqrt{b^2+(r-x)^2}+\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}$$

ונקבל ע״י שימוש בזהות הידועה: $(c+d)(c-d)=c^2-d^2$ את אי-השוויון:

$$\frac{(a^2+{x_0}^2)-(a^2+x^2)}{\mathrm{v}_1(\sqrt{a^2+{x_0}^2}+\sqrt{a^2+x^2})}-\frac{[b^2+(r-x)^2]-[b^2+(r-x_0)^2]}{\mathrm{v}_2\left(\sqrt{b^2+(r-x)^2}+\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}\right)}\leq 0$$

ולאחר פישוט, תוך שימוש בזהויות: $x_0^2-x^2=(x_0-x)(x_0+x)$ וכן:

$$(r-x)^2-(r-x_0)^2=(x_0-x)(2r-x_0-x) \, ,$$

מתקבל אי-השוויון:

$$\frac{(x_0-x)(x_0+x)}{v_1(\sqrt{a^2+x_0^2}+\sqrt{a^2+x^2})}-\frac{(x_0-x)(2r-x_0-x)}{v_2[\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}+\sqrt{b^2+(r-x)^2}]}\le 0.$$

בשלב זה מתבקש לצמצם בגורם (x_0-x) המשותף לשני אגפי אי-השוויון, אך יש להבדיל תוך כדי כך בין שתי אפשרויות: אם $x_0-x>0$ אזי הצמצום בגורם חיובי אינו משנה את כיוון אי-השוויון ולכן עבור $x_0>x$ נקבל:

$$\frac{x_0+x}{v_1(\sqrt{a^2+x_0^2}+\sqrt{a^2+x^2})}-\frac{2r-x_0-x}{v_2[\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}+\sqrt{b^2+(r-x)^2}]}\le 0.$$

לעומת זאת אם $x_0-x<0$ אזי הצמצום בגורם שלילי הופך את כיוון אי-השוויון ולפיכך עבור $x_0<x$ מתקבל אי-השוויון המנוגד בכיוונו לאי-השוויון האחרון:

$$\frac{x_0+x}{v_1(\sqrt{a^2+x_0^2}+\sqrt{a^2+x^2})}-\frac{2r-x_0-x}{v_2[\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}+\sqrt{b^2+(r-x)^2}]}\ge 0.$$

מכיוון שמשני צדי הנקודה $x=x_0$, בפנים הקטע $0<x<r$, מתקיימים שני אי-שוויונות מנוגדים בכיוונם, ואילו הביטוי הניצב באגף שמאל של אי-השוויונות הללו הינו פונקציה רציפה במשתנה x, בפרט בנקודה $x=x_0$, נובע משיקולי רציפות שבנקודה $x=x_0$ עצמה חייב להתקיים השוויון:

$$\boxed{\cdot\frac{x_0}{v_1\sqrt{a^2+x_0^2}}-\frac{r-x_0}{v_2\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}}=0}$$

אך עיון מחודש בתרשים מס. 3 ובהגדרת זוויות הפגיעה α והשבירה β, מראה ש:

$$\frac{x_0}{\sqrt{a^2+x_0^2}}=sin\alpha, \qquad \frac{r-x_0}{\sqrt{b^2+(r-x_0)^2}}=sin\beta \quad .$$

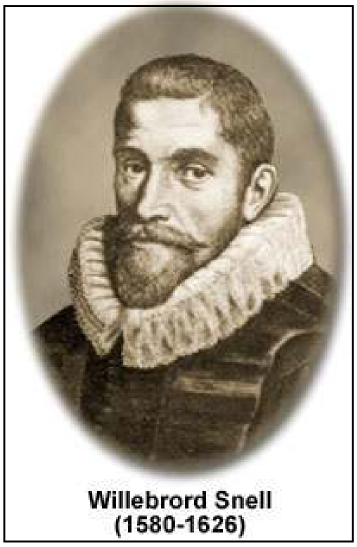
באופן כזה גזר *פרמה* את השוויון הבא כמסקנה מתמטית מעקרון מינימום הזמן שלו:

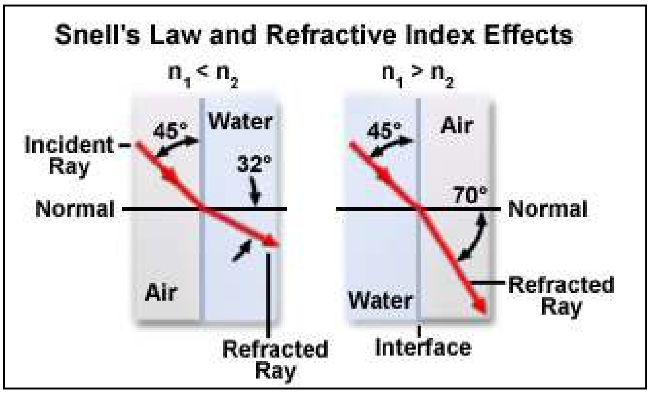
$$\boxed{\frac{sin\alpha}{v_1}=\frac{sin\beta}{v_2},}$$

או

$$sin\beta=\kappa sin\alpha, \qquad \kappa=\frac{v_2}{v_1}.$$

נוסחה מתמטית זו הקושרת בין זווית השבירה β לזווית הפגיעה α, ידועה כיום בשם **נוסחת השבירה של *סנל***, על שמו של המתמטיקאי והאסטרונום ההולנדי ***וילברורד סנל***, שאמנם גילה אותה בלי קשר עם *פרמה* בסביבות שנת 1621, אך הוא הגיע לנוסחה זאת על יסוד תצפיות ניסיוניות של מדידת זוויות השבירה β המתאימות לזוויות פגיעה שונות α, שמהן הוא הסיק שסינוס זווית השבירה β פרופורציונלי לסינוס זווית הפגיעה α. בפרט הוא לא היה מסוגל כלל לקשר בין קבוע הפרופורציה κ, הידוע באופטיקה כ-**אינדקס השבירה**, לבין היחס בין מהירויות ההתפשטות של האור לאחר השבירה ולפניה.





פרמה לעומתו, לא רק שגזר את נוסחת השבירה של *סנל* כמסקנה מתמטית מעקרון מינימום הזמן שלו, אלא אף קיבל אגב כך את הקשר בין אינדקס השבירה κ לבין מהירויות ההתפשטות השונות של האור. אך מכיוון שבאותה תקופה לא הייתה קיימת שום אפשרות טכנית למדוד את מהירויות ההתפשטות של האור, אי-אפשר היה לאמת לחלוטין באופן ניסויי את עקרון מינימום הזמן כחוק טבע.

מן הראוי לציין בשלב זה שהמדען הבריטי הדגול, *איזאק ניוטון* (1642-1727), היוצר הגאוני הן של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי והן של המכניקה הקלאסית, הגיע משיקולים פיסיקליים-תיאורטיים לנוסחת השבירה של *סנל*, אלא שעל פי חישוביו אינדקס השבירה κ אמור היה בכלל להזדהות עם המנה ההפוכה:

$$\kappa=\frac{v_1}{v_2},$$

כלומר, מכיוון שהניסיון מראה שבמעבר אור מאויר למים זווית השבירה β קטנה מזווית הפגיעה α, כך שלפי חוק *סנל*

$$\kappa = \frac{sin\beta}{sin\alpha} < 1,$$

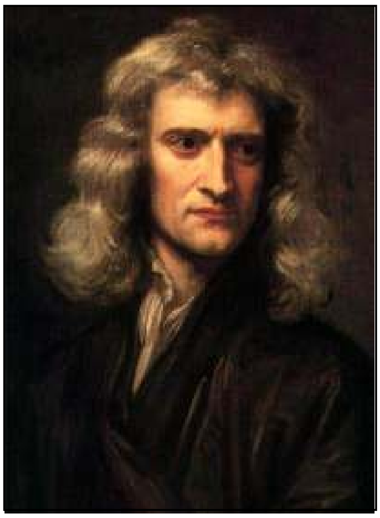
אזי בהתאם לקשר שמצא *פרמה* בין הקבוע κ למהירויות ההתפשטות של האור:

$$\kappa = \frac{v_2}{v_1} < 1$$

ולעומת זאת, על פי התיאוריה של *ניוטון* היינו אמורים לקבל:

$$\kappa = \frac{v_1}{v_2} < 1.$$

כך, בעוד שמחישוביו של *פרמה* יוצא שמהירות התפשטות האור באוויר צפויה להיות גבוהה ממהירות ההתפשטות במים, הרי שלפי התיאוריה של *ניוטון*, מהירות התפשטות האור באוויר אמורה להיות נמוכה ממהירותה במים.



סר אייזיק ניוטון (1642 - 1727)

רק לאחר שפותחו האמצעים למדידת התפשטות האור בחומרים שונים, זמן רב לאחר *פרמה וניוטון* הסתבר שמהירות התפשטות האור באוויר גבוהה מזו שבמים, כפי שחזה *פרמה*, ואף יותר מכך,

התגלה שהיחס בין אותן מהירויות שווה לאינדקס השבירה κ, ובכך לא רק שהוכרעה המחלוקת בין *פרמה* ל *ניוטון* לטובת הראשון, אלא שאף ניתן הביסוס האמפירי לנכונות עקרון מינימום הזמן של *פרמה* כחוק טבע. עם זאת נשוב ונדגיש שתקפותו של עקרון מינימום הזמן כהנחת יסוד מתמטית אפשרית בעולם מופשט–מדומה כל שהוא איננה זקוקה בשום אופן להצדקה ניסיונית מכל סוג שהוא.

תרגיל: לגזור את נוסחת השבירה האופטית של *סנל* מתוך עקרון מינימום הזמן של *פרמה* באמצעות המשפט של *פרמה* וכללי הגזירה. רמז: לחפש את נקודת המינימום של הפונקציה

$$t_Q = f(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2+(r-x)^2}}{v_2}$$

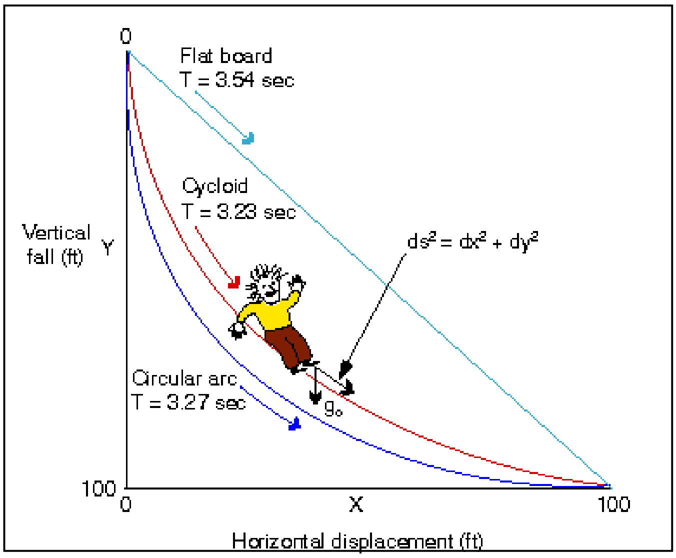
בקטע: $[0,r]$. בפרט להסביר מדוע מספיק לחפש את המינימום המבוקש רק בקטע הזה, ומדוע המינימום עשוי להתקבל רק בנקודה פנימית בקטע זה ולא באחת מנקודות הקצה שלו.

עקרון *פרמה* ובעיית ה*ברכיסטוכרון*

הקשר המתמטי שגילה *פרמה* בין נוסחת השבירה של *סנל* לבין עקרון מינימום הזמן שלו, שימש מאוחר יותר (בשנת 1696) את *יוהאן ברנולי*, אחד מבני משפחת *ברנולי* השוויצרית (להבדיל ממשפחת *רובינזון* השוויצרית), בפתרון בעיה קשה במכניקה, שלכאורה אין דבר בינה לבין אופטיקה בכלל ושבירת קרני אור בפרט: נניח שחרוז מחליק ללא חיכוך, תחת השפעת כוח הכובד בלבד, ממצב מנוחה, לאורך חוט חלק, שקצותיו בנקודות נתונות A ו-B, כאשר נקודת המוצא A נמצאת בגובה $h>0$ מעל למישור האופקי המכיל את נקודת הסיום B, ונדרשים למצוא את צורת החוט שמאפשרת לחרוז להחליק מ-A ל-B במשך הזמן הקצר ביותר האפשרי. צורת החוט הפותרת בעיה זאת היא העקום הידוע במכניקה בשם המחריד **"ברכיסטוכרון"** שמובנו בשפת בני האדם מן הישוב הוא "עקום משך זמן הנפילה המינימלי" (ביוונית: Brachistos = הקצר ביותר, Chronos = זמן).

בדומה לקרן האור שמהירותה משתנה במעבר משכבת חומר שקופה אחת לאחרת, כך גם מהירות החרוז משתנה במהלך ההחלקה לאורך החוט, אך בעוד מהירות התפשטות האור משתנה בקפיצה בעת המעבר משכבה אחת לשניה, מהירות ההחלקה של החרוז משתנה באופן הדרגתי ורציף כל משך התנועה. את הקשר המתמטי הקיים בין גובה החרוז y מעל המישור האופקי המכיל את הנקודה B, ברגע כל שהוא במשך ההחלקה, לבין מהירות התנועה-v של החרוז באותו רגע, ניתן לגזור מחוק שימור האנרגיה המבוטא על ידי השוויון הבא:

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + mgy = mgh$$



יוהאן ברנולי 1667-1748

כאשר m היא מסת החרוז ו $g-$ היא תאוצת הכובד (בערך 9.8 מטרים לשניה בריבוע), mgh היא אנרגית הגובה של החרוז בתחילת הנפילה מגובה h, כשמהירותו אפס, mgy היא אנרגית הגובה ברגע שהחרוז מגיע בנפילתו לאורך החוט לגובה y, ואילו $\frac{1}{2}mv^2$ היא אנרגית התנועה של החרוז באותו רגע, כשמהירות תנועתו לאורך החוט היא v. לאחר צמצום מסת החרוז ממשוואה זאת מקבלים:

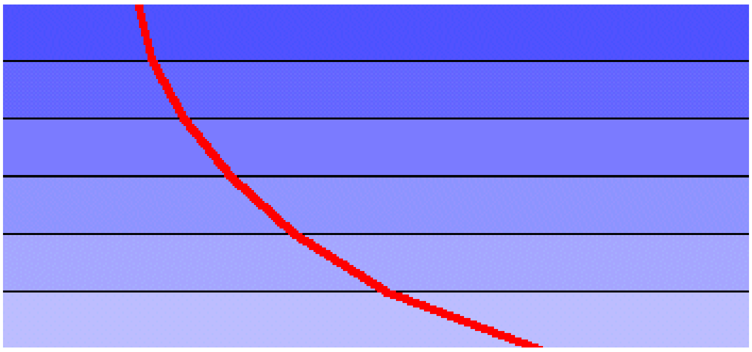
$$y = h - \frac{v^2}{2g} \tag{1}$$

וניתן גם לחלץ בקלות את מהירות תנועת החרוז v ולבטאה כפונקציה רציפה של הגובה y:

$$v = \sqrt{2g(h\text{-}y)} \tag{2}$$

הקורא קצר הרוח מניד בספקנות זה זמן מה את ראשו עטור השיבה והמלא כרימון בסימני שאלה: "מהו, לכל הרוחות, הקשר בין חרוז המחליק לו להנאתו לאורך חוט נטול חיכוך לבין תופעת שבירת קרני האור?" את הקשר הבלתי צפוי מצא *יוהאן ברנולי* בכך שמצד אחד נדרשים למצוא את מסלול ההחלקה של החרוז האמור לקצר את זמן ההחלקה למינימום ומצד שני נוסחת השבירה מהווה מסקנה מתמטית של עקרון מינימום זמן התנועה. (עדיין לא ברור לך הקשר, קורא יקר, ובכן המתן עוד רגע קל בסבלנות!)

ובכן, אותו מתמטיקאי חצוף בשם *יוהאן ברנולי* העז להשוות בדמיונו את תנועת החרוז לאורך החוט בעל הצורה הפותרת את בעיית משך זמן הנפילה המינימלי, לתנועת קרן אור העוברת דרך סדרת שכבות דקות ביותר של חומרים שקופים המופרדות ע"י מישורים אופקיים מקבילים זה לזה, כך שזווית הפגיעה בכל אחד מאותם מישורים (פרט לראשון שבהם) זהה לזווית השבירה במישור הקודם (מדוע?).



תרשים מס. 4

אם נסמן את מהירויות ההתפשטות של האור בשכבות הללו, לפי הסדר:

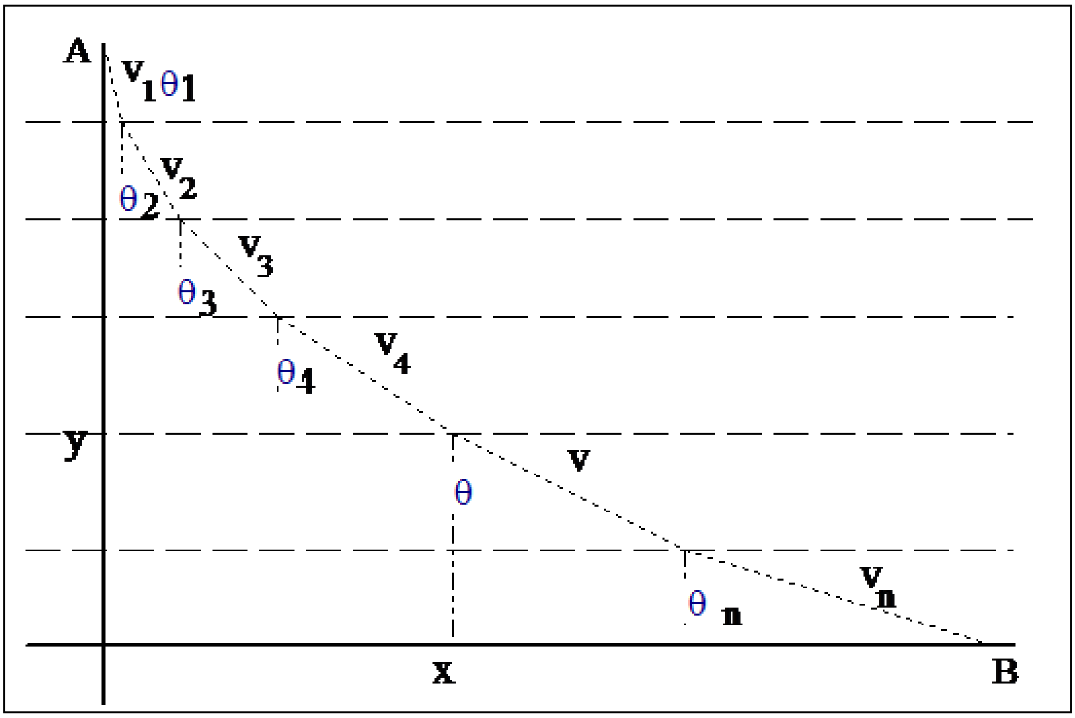
$$v_1,\ v_2,\ v_3,\ldots,v_n,$$

ואילו את זוויות הפגיעה/שבירה במישורי ההפרדה בין השכבות נסמן בהתאמה:

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \ldots,\ \theta_n,$$

אזי מנוסחת השבירה האופטית נקבל את שרשרת השוויונות:

$$\frac{sin(\theta_1)}{v_1}=\frac{sin(\theta_2)}{v_2}=\frac{sin(\theta_3)}{v_3}=\ldots=\frac{sin(\theta_n)}{v_n}.$$



תרשים מס. 5

בהתאם לכך, אם ידועה ברגע כל שהוא המנה $\frac{sin(\theta)}{v}=C$ אזי בכל השכבות נקבל:

$$\frac{sin\left(\theta_j\right)}{v_j}=C, \qquad j=1,2,3,...n.$$

אם נצמצם את עובי השכבות לאפס ובמקביל נגדיל את מספרן לאין-סוף, הרהר לעצמו, בקול רם, *יוהאן ברנולי*, ונדמה שמהירות האור משתנה משכבה אחת לשכנתה באופן הדרגתי בהתאם לנוסחה (2) שמצאנו קודם עבור מהירות ההחלקה של החרוז: $v=\sqrt{2g(h-y)}$, אזי מכיוון שמסלול התנועה של קרן האור מקיים את עקרון מינימום הזמן, הסיק מכאן *יוהאן ברנולי*, הוא יספק לנו את פתרון הבעיה של מציאת עקום משך זמן הנפילה המינימלי!!!

כפי שלומדים בפרקים הראשונים של החשבון הדיפרנציאלי, בעת צמצום עובי השכבות לאפס, זוויות הפגיעה/שבירה הופכות בגבול להיות הזוויות בין הציר האנכי לבין המשיקים למסלול התנועה (של קרן האור או של החרוז המחליק במשך הזמן המינימלי). באופן כזה, הודות לזיקה המתמטית של נוסחת השבירה האופטית לעקרון מינימום הזמן, מצא *יוהאן ברנולי* קשר בין מהירות ההחלקה v של החרוז ברגע כל שהוא של תנועתו במורד העקום הפותר את הבעיה, לבין הזווית θ שבין הציר האנכי למשיק לאותו עקום בנקודה בה נמצא החרוז באותו רגע:

$$v=\frac{sin\left(\theta\right)}{C}$$

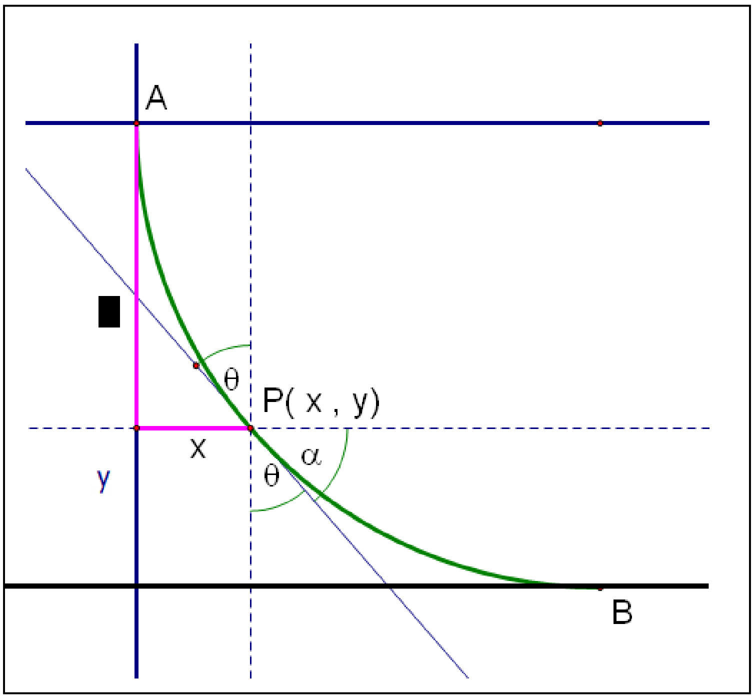
כאשר מציבים זהות זאת בנוסחה (1) שמצאנו קודם הקושרת בין מהירות ההחלקה v של החרוז לבין גובהו y, מקבלים:

$$y=h-\frac{v^2}{2g}=h-\frac{sin^2\left(\theta\right)}{2gC^2}=h-ksin^2\left(\theta\right)=\Phi(\theta),$$

כלומר הגובה y של נקודה כל שהיא על העקום המבוקש, מעל מישור הייחוס האופקי העובר דרך נקודת סיום הנפילה B, מבוטא כך כפונקציה $\Phi(\alpha)$ של הזווית α, וכאשר $k=1/2gC^2$ הוא קבוע חיובי במשך ההחלקה שערכו יקבע בשלב הסיום של הפתרון.

אם נהיה מסוגלים לבטא גם את המרחק האופקי x של אותה נקודה על העקום מהישר האנכי העובר דרך נקודת המוצא A, כפונקציה מפורשת $\Psi(\theta)$ של הזווית θ, נדע במדויק את מיקום אותה נקודה על סמך ידיעת הזווית θ, ובהתאמה, וכשניתן לזווית θ לגדול מאפס באופן רציף, נוכל לקבל במדויק את עקום משך זמן הנפילה המינימלי המבוקש כאוסף הנקודות ששיעוריהן $(x,y)=(\Psi(\theta),\Phi(\theta))$.
על עקום הנתון באופן כזה אומרים שהוא נתון על ידי משוואותיו הפרמטריות:

$$x=\Psi(\theta), \qquad y=\Phi(\theta)$$



תרשים מס. 6

לצורך מציאת הפונקציה המפורשת $x=\Psi(\theta)$ נעזר *יוהאן ברנולי* בעובדה ששיפוע המשיק לעקום המבוקש בנקודה $(\Psi(\theta),\Phi(\theta))$ ניתן לחישוב כגבול מנת היחס בין המרחקים האנכי והאופקי שעובר החרוז כשהפרמטר θ משתנה מ- θ עד $\theta+t$, כש-t שואף לאפס, כלומר:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(\theta+t)-\Phi(\theta)}{\Psi(\theta+t)-\Psi(\theta)}=\lim_{t\to 0}\frac{[\Phi(\theta+t)-\Phi(\theta)]/t}{[\Psi(\theta+t)-\Psi(\theta)]/t}=\frac{\Phi'(\theta)}{\Psi'(\theta)}$$

ומכיוון שהפונקציה $y=\Phi(\theta)$ כבר נמצאה קודם, מקבלים בגזירתה:

$$\Phi'(\theta)=-2k\sin(\theta)\cos(\theta)=-k\sin(2\theta).$$

מצד שני, עיון בתרשים מס. 4 מראה שזווית השיפוע (השלילית) של המשיק לעקום קטנה מהזווית θ בזווית ישרה ולפיכך שיפוע אותו משיק נתון גם ע״י:

$$\tan(\theta-90)=-ctg(\theta)$$

כלומר:

$$\frac{\Phi'(\theta)}{\Psi'(\theta)}=-\frac{cos\theta}{sin\theta}.$$

מכאן נובע מייד, בעזרת זהות טריגונומטרית ידועה:

$$\Psi'(\theta)=-\frac{sin\theta}{cos\theta}\Phi'(\theta)=2ksin^2\theta=k\left(1-cos\left(2\theta\right)\right).$$

אין כבר שום קושי למצוא שכל הפונקציות שזאת היא נגזרתן הן:

$$\Psi(\theta)=k(\theta-\tfrac{1}{2}sin(2\theta))+C'$$

כאשר הערך של הקבוע C' נקבע על סמך הנתון שמהירות החרוז v בתחילת ההחלקה היא אפס, ומכיוון שבמשך כל ההחלקה מתקיימת הזהות $sin(\theta)=Cv$, (הנובעת מנוסחת השבירה של *סנל*), נסיק שהזווית θ ברגע תחילת ההחלקה היא אפס, ולפיכך באותו רגע נקבל ש: $x=\Psi(0)=C'$. אך באותו רגע של תחילת ההחלקה הרי קיים השוויון $x=0$, שכן כך נקבעה קודם מערכת הצירים באופן שהציר האנכי יעבור דרך נקודת ההתחלה A. מכאן נסיק ש- $C'=0$.

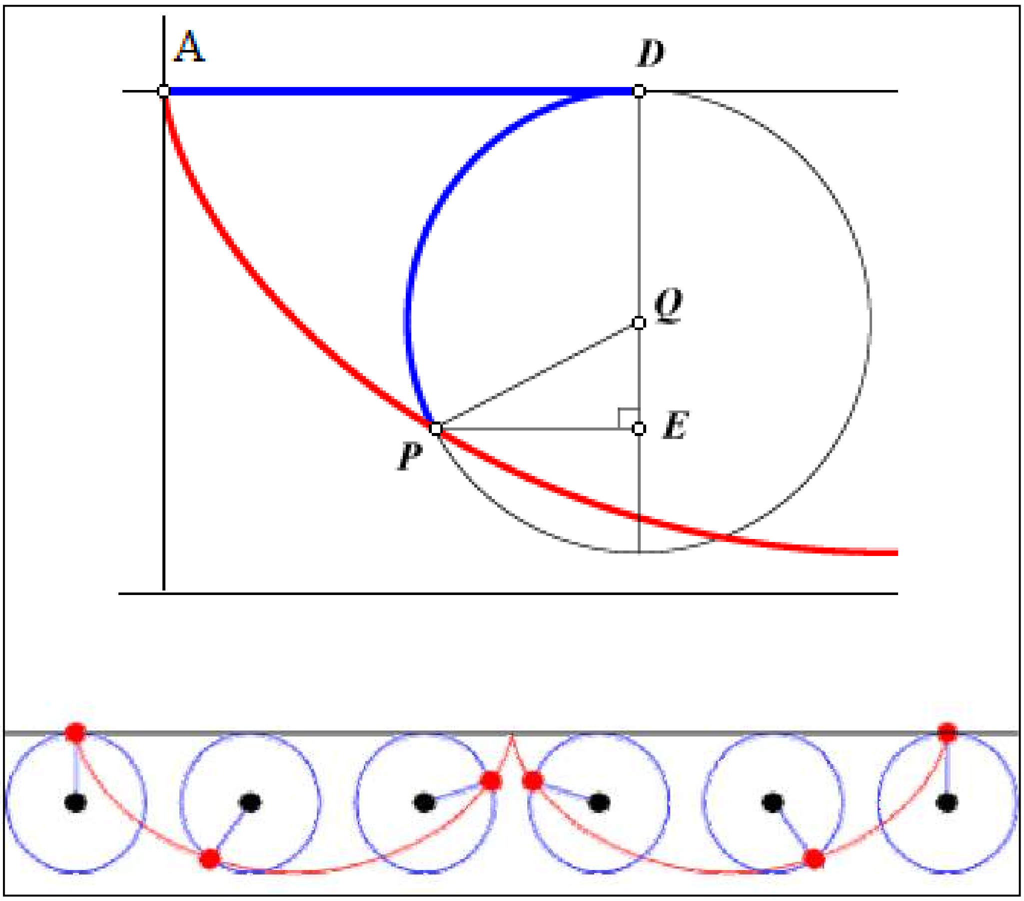
כך קיבל *ברנולי*, על ידי שימוש גאוני בעקרון מינימום הזמן של *פרמה*, שפתרון בעיית מציאת עקום משך זמן הנפילה הקצר ביותר נתון על ידי זוג משוואותיו הפרמטריות:

$$x=k(\theta-\tfrac{1}{2}sin(2\theta)),\qquad y=h-ksin^2(\theta)\ .$$

התיאור הגרפי של פתרון זה מופיע בתרשים מס. 7. העקום, שאלו הן משוואותיו הפרמטריות, ידוע בשם ה-***ציקלואיד*** והוא מוכר כעקום המתקבל כמסלולה של נקודה השייכת להיקף מעגל ברדיוס k המתגלגל ללא החלקה מתחת לישר אופקי בגובה $y=h$. את הערך המתאים של הרדיוס k יש לקבוע כך שהציקלואיד המתאים יכיל את נקודת סיום ההחלקה B. מכיוון שמערכת הצירים נקבעה באופן שהציר האופקי יעבור דרך הנקודה B, שיעורי B הם $(q,0)$, עבור ערך חיובי מסוים q. לכן ברגע סיום ההחלקה המשוואות הפרמטריות של מסלול ההחלקה נותנות זוג משוואות בשני נעלמים k ו-α:

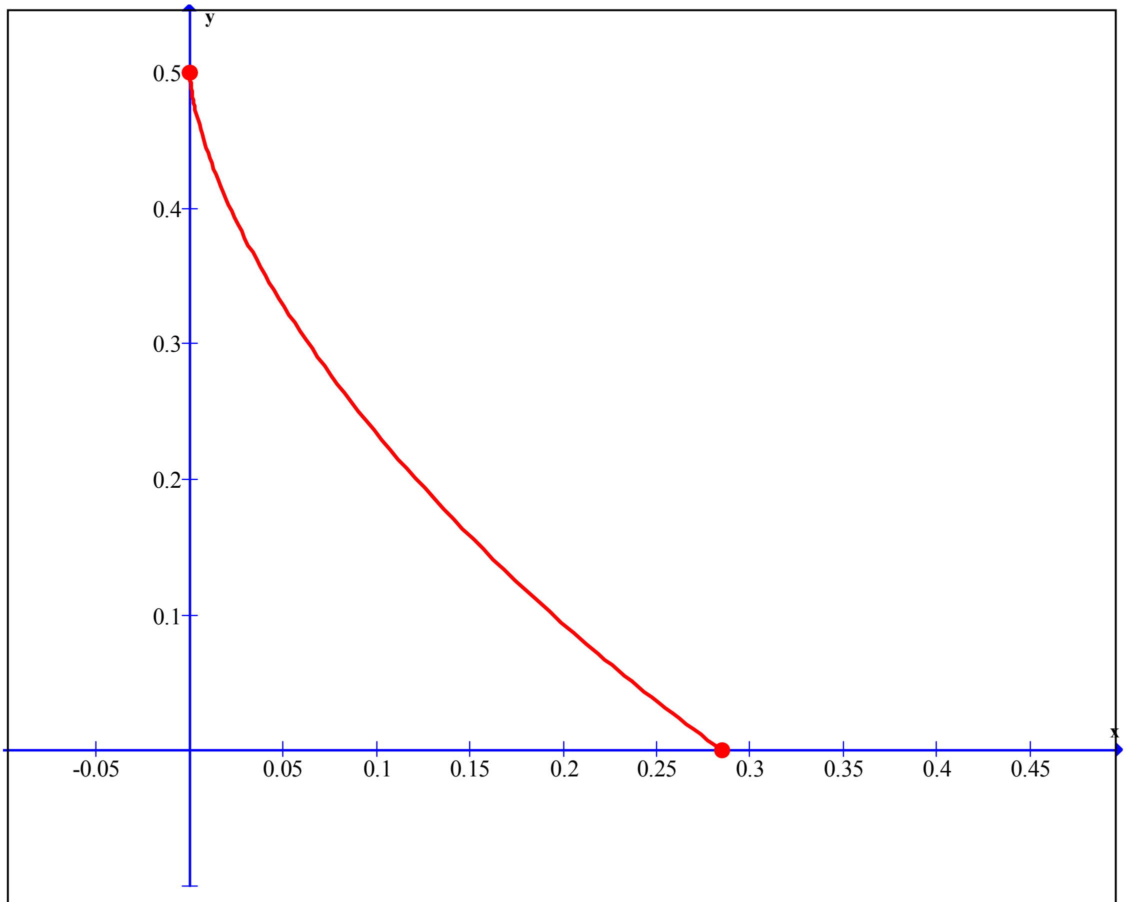
$$k(\alpha-\tfrac{1}{2}sin2\theta)=q,\qquad h-ksin^2\theta=0\ .$$

זאת אמנם אינה מערכת קלה לפתרון אך קיימות שיטות נומריות לפתרונה המאפשרות מציאת הקבוע המבוקש k כאשר נתונים הערכים של h ו-q.



<u>תרשים מס. 7</u> הציקלואיד

עקום הברכיסטוכרון המתואר בתרשים מס. 8 שלהלן הוא העקום המתאים לערכים של הקבועים $h=\frac{1}{2}$ ו- $k=1$ והוא יורד מהנקודה $(0,h)=(0,\frac{1}{2})$ ומסתיים בנקודה $(q,0)$ כאשר $q=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}=0.285$. הזוית θ, שהיא הזוית בין המשיק לעקום לבין הכיוון השלילי של ציר y, משתנה לאורך עקום זה מ- $\theta=0$ (בנקודת ההתחלה $(0,\frac{1}{2})$) עד ל- $\theta=\frac{1}{4}\pi$ (בנקודת הסיום $(0.285,0)$).



תרשים מס. 8

מקורות:

1) M.M.Schiffer, L.Bowden, **The Role of Mathematics in Science,** The Mathematical Association of America, Chapter 3.4-3.9, pp. 81-95.

2) R. Courant, H. Robbins, **What Is Mathematics?** Oxford University Press (1980) Chapter 7.10, pp. 379-384.

3) W.Yourgrau, S.Mandelstam, **Variational Principles in Dynamics and Quantum Theory,** (Dover Publications, Inc., New York), Chapter 2, pp. 11-18.

4) יונתן בן ארצי, **בעיית ה- Brachistochrone** (עבודה מסכמת בקורס תולדות המתמטיקה) ספטמבר 2005.

מבחר תמונות בנושא הבראכיסטוכרון