נסרוק בקצרה את אשר נלמד עד כה: במכניקה למדנו על אודות תנועה מכנית, שינוי מקום הגופים (או חלקי הגוף) זה יחסית לזה במרחב במהלך הזמן. בתרמודינמיקה ובפיזיקה מולקולרית הכרנו תהליכים העוסקים בחום, ולבסוף הגענו לאלקטרודינמיקה. נותרו נושאים חשובים ללומדם: זרם חילופין, גלים אלקטרומגנטיים (גלי רדיו) וכדומה. כדי להבין היטב את הנושאים הבאים, נחוץ לחזור לפרקי המכניקה ולהכיר את נושא התנודות המכניות, ורק לאחר מכן לסיים את לימודי האלקטרודינמיקה.

לכאורה נראה שאין מן המשותף לתנודות משקולת ולפריקת קבל ממטענו דרך סליל השראה, אך לא כך הדבר; ובקרוב תיווכחו לדעת שתנודות מכניות ותנודות אלקטרומגנטיות מצייתות לחוקים כמותיים זהים. את זאת נגלה כאשר נחקור **כיצד** מתרחשות תנודות. לחוקים זהים מצייתים גם תהליכים גליים מסוג שונה.

בפיזיקה המודרנית התגבש תחום מיוחד: **פיזיקה של תנודות**. בתחום זה מתוארות תנודות מסוגים שונים מנקודת מבט אחת. הפיזיקה של התנודות חוקרת את הרעידות המכניות במכונות, את התנהגות מעגלי זרם חילופין, מערכות רדיו ותופעות רבות אחרות.

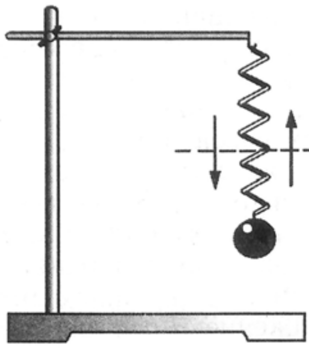
פרק 3. תנודות מכניות

בפרק זה נלמד מה מיוחד בתנודות מכניות, ובמה הן שונות מסוגים אחרים של תנועה מכנית.

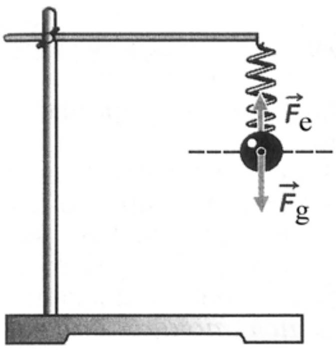
§18 תנודות חופשיות ומאולצות

תנועה תנודתית נפוצה ביותר בטבע. פשוט מאוד לאלץ גוף להתנודד.

נתלה קפיץ על מעמד. אל הקצה התחתון של הקפיץ נקשור כדור מתכת. הקפיץ יתארך, וכוח אלסטי $\vec{F}_0$ יאזן את כוח הכבידה $\vec{F}_g$, הפועל על הכדור (ציור 54א). אם נוציא את הכדור ממצב שיווי-משקלו במשיכה קלה כלפי מטה ונשחררו, הוא יתחיל לבצע תנועה די מעניינת: מעלה ומטה, מעלה ומטה וכו' (ציור 54ב). תנועה מסוג זה, כאשר הגוף נע לצד זה ולצד זה, מכונה **תנודה**. במהלך הזמן נחלשות התנודות ודועכות בהדרגה, ולבסוף הכדור ייעצר.

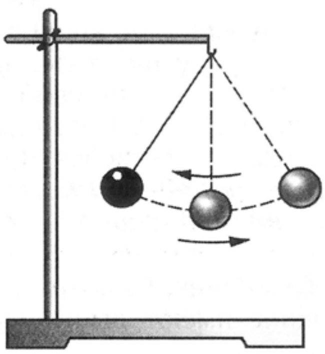


ציור 54ב

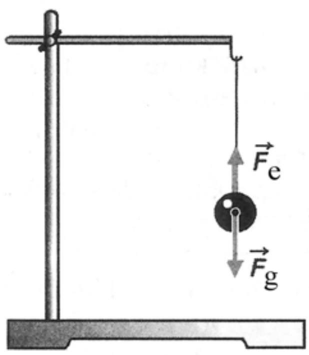


ציור 54א

קל עוד יותר לאלץ כדור להתנודד, אם נתלה אותו בקצה חוט. במצב שיווי-המשקל יימצא החוט אנכי, וכוח הכבידה $\vec{F}_g$, הפועל על הכדור, מתאזן על-ידי כוח מתיחות החוט $\vec{F}_e$ (ציור 55א). אם נטה את הכדור ונשחררו, יתחיל להתנודד ימינה ושמאלה (ציור 55ב), עד אשר תיפסקנה התנודות. כדור התלוי על חוט מהווה **מטוטלת** פשוטה ביותר.[1] באופן כללי גוף, התלוי על חוט או המורכב על ציר, והעשוי לבצע תנודות בהשפעת כוח כבידה, מכונה **מטוטלת**. מטוטלת עשויה להיות סרגל התלוי על מסמר, נברשת, זרוע של מאזני מעבדה וכדומה.



ציור 55ב



ציור 55א

[1] יש להביא בחשבון שכדור התלוי על חוט מהווה מטוטלת – בתנאי שפועל עליו כוח הכבידה. כדור הארץ, המפעיל את כוח הכבידה, הוא חלק ממערכת התנודות המכונה **מטוטלת**.

המאפיין הבולט ביותר של התנודות הוא תנועות גוף, החוזרות על עצמן או כמעט חוזרות על עצמן. כך, למשל, המטוטלת: לאחר השלמת תנודה אחת, דהיינו לאחר שעברה ממצב קצה שמאלי למצב קצה ימני וחזרה, מבצעת שוב את אותה התנועה. **תנועה מכונה מחזורית, אם היא חוזרת על עצמה במדויק (או בערך).**

תנועת תנודות היא תנועה החוזרת על עצמה בדיוק (או בערך) כל פרק זמן מסוים.

דוגמאות נוספות לתנודות החוזרות על עצמן: תנועת הבוכנות במנוע המכונית, ענפי העץ ברוח, לִבֵּנו הפועם.

תנודות חופשיות

קבוצת הגופים שאנו חוקרים מכונה במכניקה **מערכת גופים** או **מערכת**. הכוחות הפועלים בין גופי המערכת מכונים **כוחות פנימיים**; וכוחות, הפועלים על גופי המערכת מצדם של גופים שאינם כלולים במערכת, מכונים **כוחות חיצוניים**.

הסוג הפשוט ביותר של תנודות הוא **תנודות חופשיות. תנודות חופשיות הן תנודות המערכת בהשפעת הכוחות הפנימיים בלבד, לאחר שהמערכת הוצאה ממצב שיווי-משקלה.**

תנודות המשקולת התלויה על קפיץ ושל הכדור התלוי בקצה חוט – אלה הן דוגמאות לתנודות חופשיות. לאחר יציאתן של המערכות האלה ממצב שיווי-משקלן, נוצרים התנאים לתנודות הגופים ללא השפעת כוחות חיצוניים.

תנודות מאולצות

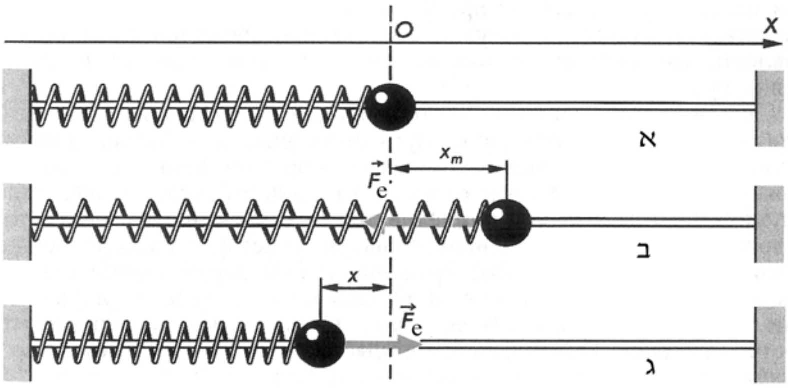
אם נזיז ספר, המונח על השולחן, לפנים ולאחור, הוא יבצע תנודות, אולם תנודות אלה אינן חופשיות, אלא מאולצות. תנודות הספר נגרמות על-ידי כוח היד, המשנה את מקומו ומגמת תנועתו של הספר באופן מחזורי.

תנודות מאולצות הן תנודות גופים בהשפעת כוחות חיצוניים, המשתנות באופן מחזורי.

תנודות עשויות להיות חופשיות ומאולצות. לתנודות מאולצות חשיבות רבה ביותר.

נבדוק כעת מהן תכונות המערכת, המאפשרות קיום תנודות חופשיות בה. נוח יותר לחקור תחילה את תנודות אופקיות של כדור בהשפעת כוח אלסטי של קפיץ.[1]

אם נוציא כדור ממצב שיווי-משקלו (ציורים 56א ו-56ב) במשיכתו ימינה, יתארך הקפיץ בשיעור x_m, ועל הכדור יפעל כוח אלסטי מצדו של הקפיץ. בהתאם ל**חוק הוק** נמצא כוח זה ביחס ישר לעיוות הקפיץ ומכוון שמאלה. בהשפעת הכוח האלסטי ינוע הכדור בתאוצה שמאלה ויגביר את מהירותו. הכוח האלסטי ילך ויקטן, מכיוון שעיוות הקפיץ יקטן. ברגע שיגיע הכדור לנקודת שיווי-משקלו, יתאפס הכוח האלסטי של הקפיץ. לכן בהתאם לחוק השני של ניוטון, תתאפס גם תאוצת הכדור.



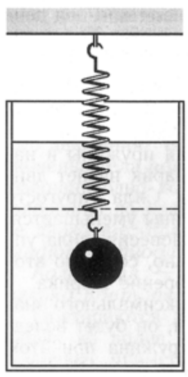
ציור 56

ברגע זה תגיע מהירות הכדור לערכה המרבי. מנקודת שיווי-משקלו ימשיך הכדור לנוע ברצף לשמאל, והקפיץ יתכווץ. עתה יופיע כוח אלסטי המכוון לימין ויבלום את תנועת הכדור לשמאל (ציור 56ג). עוצמת כוח זה, וכך גם שיעור תאוצת הכדור, המכוונים לימין, נמצאים ביחס ישר לגודל ההעתק x של הכדור מנקודת שיווי-המשקל. מהירות הכדור תלך ותקטן בתנועתו לקצוות, עד שתתאפס בנקודות הקיצוניות של תנועתו.

[1] ניתוח תנודות כדור התלוי על קפיץ אנכי קשה יותר. במקרה זה פועלים עליו בו-זמנית כוח אלסטי משתנה וכוח כבידה קבוע; אולם אופי התנודות בשני המקרים זהה.

ככל שיקטן ההעתק x מנקודת שיווי-המשקל לשמאל, כן יקטן גודל הכוח $\vec{F}$ לימין ויתאפס בנקודת שיווי-המשקל; אולם עם הקטנת גודל העתק x זה צובר הכדור מהירות, ובזכות התמד מסתו ממשיך אפוא לנוע לצד האחר. תנועה זו גורמת להתארכות הקפיץ ולהיווצרות כוח המכוון שמאלה. תנועת הכדור נבלמת עד לעצירה מוחלטת בקצה הימני, ולאחר מכן חוזר התהליך על עצמו.

אילו לא היה קיים חיכוך, לא היתה תנועת הכדור נפסקת לעולם. אולם כוחות החיכוך (התנגדות האוויר, למשל) קיימים, והרי כוחות החיכוך מכוונים כנגד מגמת המהירות גם בתנועת הכדור ימינה וגם בתנועתו שמאלה. אי לכך בולם החיכוך את תנועת הכדור, ומשרעת התנודות תקטן בהדרגה עד שתיפסק התנועה כליל. כאשר שיעור החיכוך קטן, נראית הדעיכה רק לאחר מספר רב של תנודות. אם נתעניין במקרה זה בתנועת הכדור במשך פרק זמן לא רב במיוחד, ניתן להזניח את הדעיכה ולא להביא בחשבון את כוחות ההתנגדות.



ציור 57

אם כוח ההתנגדות ניכר, אי-אפשר להזניח את פעולתו המעכבת אפילו בפרקי זמן קצרים. נתבונן במקרה, בו מטבילים כדור התלוי על קפיץ בכוס נוזל סמיך, כגליצרין (ציור 57). אם מקדמו של הקפיץ קטן, לא יתנודד הכדור שהוצא ממצב שיווי-משקלו, ובהשפעת הכוח האלסטי יחזור לנקודת האיזון (הקו המרוסק בציור 57), ועקב פעולת כוח ההתנגדות תשווה מהירותו בנקודת שיווי-המשקל, למעשה, לאפס.

כעת ניתן להבין מהם שני התנאים, שבהם יופיעו תנודות חופשיות במערכת: בהוצאת הגוף ממצב שיווי-משקלו ייווצר במערכת כוח, המכוון לעבר נקודת שיווי-המשקל, הפועל להחזרת הגוף למצבו המאוזן. בדיוק כך פועל הקפיץ במערכת שניתחנו (ראו ציור 56): בהטיית הכדור ימינה ושמאלה מכוון הכוח האלסטי אל נקודת שיווי-המשקל. זאת ועוד; שיעור החיכוך במערכת צריך להיות קטן דיו – אחרת תדעכנה התנודות מהר או לא תופענה כלל. תנודות שאינן דועכות כלל אפשריות אך ורק בהיעדר החיכוך כליל.

למדנו ששני תנאים, המתקיימים במערכת, מאפשרים תנודות חופשיות. נבדוק זאת על מערכת אחרת: המטוטלת.

?

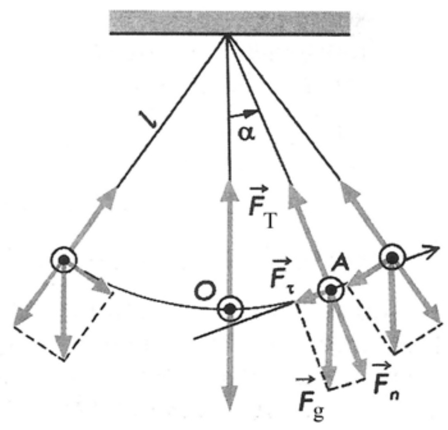
1. **אילו תנודות מכונות חופשיות? מצאו דוגמאות נוספות לתנודות חופשיות.**
2. **באילו תנאים נוצרות במערכת תנודות חופשיות?**
3. **אילו תנודות מכונות מאולצות? מצאו דוגמאות של תנודות מאולצות.**

§20 המטוטלת המתמטית

נחקור כעת את המטוטלת הפשוטה: כדור כבד התלוי בקצה חוט ארוך.

אם מידות הכדור קטנות בהרבה מאורך החוט, ניתן להזניח אותן ולתאר את הכדור כגוף נקודתי. ניתן גם להזניח את התארכות החוט, מכיוון שהיא קטנה מאוד, ואת מסת החוט לעומת מסת הכדור. כך במקום מטוטלת אמיתית בצורת כדור בעל מסה וגודל מסוימים, התלוי בקצה חוט, שבוודאי מתעוות מעט תוך כדי תנועה, אנו חוקרים מודל מופשט, שהוא גוף נקודתי, התלוי בקצה חוט נטול מסה, ושאינו מתארך כלל. מודל כזה מכונה **מטוטלת מתמטית**.

נוציא מטוטלת ממצב שיווי-משקל ונשחרר אותה. על הכדור יפעלו שני כוחות: כוח הכבידה $\vec{F}_g = m\vec{g}$, המכוון אנכית כלפי מטה, וכוח מתיחות החוט $\vec{F}_T$ (Tension – מתיחות) המכוון לאורך החוט (ציור 58). אף שבזמן התנועה פועל על המטוטלת כוח התנגדות, ככוח החיכוך באוויר, ניתן להניח שהוא מאוד קטן.



ציור 58

כדי לתאר בבירור את מהלך התנועה של המטוטלת, נפרק את כוח הכבידה לשני רכיבים:

$\vec{F}_n$, המכוון לאורך החוט, ו- $\vec{F}_\tau$, הניצב לחוט ומשיק למסלול תנועת הכדור. שקול הכוחות $\vec{F}_n$ ו- $\vec{F}_\tau$ מאזן את כוח הכבידה $\vec{F}_g$.

כוח מתיחות החוט $\vec{F}_T$ והרכיב $\vec{F}_n$ של כוח הכבידה **מאונכים** למהירות המטוטלת ומקנים לכדור תאוצה צנטריפטלית. תאוצה זו מכוונת אל מרכז קשת המעגל, המהווה את מסלול תנועת הכדור. עבודת הכוחות האלה **שווה לאפס**. לכן בהתאם למשפט האנרגיה הקינטית אין הם משנים את גודל מהירות המטוטלת. פעולתם גורמת לווקטור המהירות לשנות כיוון באופן מתמיד, וכך בכל רגע משיקה המהירות לקשת המעגל. בהשפעת הרכיב $\vec{F}_\tau$ נעה המטוטלת מטה לאורך קשת המעגל במהירות הולכת וגדלה. תוך כדי התנועה רכיב זה של כוח הכבידה, המכוון אל מקום שיווי-המשקל, קטן בערכו, וברגע שכדור המטוטלת עובר את נקודת שיווי-המשקל, רכיב זה מתאפס. עקב תכונת ההתמד של מסת הכדור ממשיכה המטוטלת לנוע ועולה.

ממצב זה והלאה יכוון רכיב זה, $\vec{F}_\tau$, כנגד מגמת המהירות, ולכן פוחת גודלהּ. ברגע העצירה של המטוטלת בנקודה העליונה גודל הרכיב $\vec{F}_\tau$ מרבי, ומכוון להחשת המהירות לעבר נקודת שיווי-המשקל. בהמשך הולך גודל המהירות וגדל, והמטוטלת נעה שוב לנקודת שיווי-המשקל. לאחר שהכדור עובר את נקודת שיווי-המשקל, הוא ממשיך ונע לצד האחר, וההליך חוזר על עצמו. אם כוח ההתנגדות לתנועה קטן, ניתן להזניח את עבודתו בפרק זמן תנועה קצר. אם נטביל את המטוטלת בכלי שנוזל סמיך בו, נגלה מיד שהתנודות אינן מתרחשות כלל, או שהן דועכות מהר מאוד.

המטוטלת המתמטית מתנודדת חופשית, אם מתקיימים שני תנאים: בהוצאה ממצב שיווי-משקלה ייווצר במערכת כוח, המחזיר את המטוטלת לעבר מצב שיווי-המשקל; והחיכוך במערכת קטן מאוד, ולכן ניתן להזניחו.

כדי לתאר באופן כמותי את תנודות הגוף, התלוי על קפיץ או בקצה חוט, נשתמש בחוקי הדינמיקה של ניוטון.

משוואת התנועה של הגוף המתנודד בהשפעת כוחות אלסטיים

על-פי **החוק השני של ניוטון**, שווה מכפלת מסת הגוף m בתאוצה $\vec{a}$ לשקול כל הכוחות $\vec{F}$ החיצוניים הפועלים על הגוף:

$$m\vec{a} = \vec{F} \qquad (3.1)$$

נרשום את משוואת התנועה של הכדור, הנע אופקית בקו ישר בהשפעת הכוח האלסטי של הקפיץ $\vec{F}$ (ראו ציור 56). נכוון את ציר Ox ימינה, ונמקם את ראשית הצירים בנקודת שיווי-המשקל (ראו ציור 56א).

בהיטלים על ציר Ox תיראה המשוואה (3.1) כך:

$$ma_x = F_{ex}$$

כאשר a_x ו- F_{ex}, בהתאם – היטלי התאוצה והכוח האלסטי.

בהתאם ל**חוק הוק,** פרופורציונלי היטל F_x להתרחקות הכדור מנקודת שיווי-המשקל. התרחקות זו שווה לקואורדינטת x של הכדור, כאשר להיטל הכוח ולקואורדינטה סימנים מנוגדים (ראו ציורים 56ב ו- 56ג). לכן:

$$F_{ex} = -kx \qquad (3.2)$$

כאשר k – מקדם הקפיץ.

משוואת התנועה של הכדור מקבלת את הצורה:

$$ma_x = -kx \qquad (3.3)$$

נחלק את שני האגפים של המשוואה (3.3) ב- m, ונקבל:

$$a_x = -\frac{k}{m}x \qquad (3.4)$$

מכיוון שהמסה m והמקדם k הם ערכים קבועים, גם המנה שלהם $\frac{k}{m}$ היא ערך קבוע.

קיבלנו משוואת תנועה של גוף, המתנודד בהשפעת כוח אלסטי, ומשמעותה:
היטל התאוצה a_x של הגוף פרופורציונלי לקואורדינטת x בסימן נגדי.

משוואת התנועה של מטוטלת מתמטית

כאשר כדור מתנודד בקצה חוט בלתי נמתח, הוא נע לאורך קשת מעגל שרדיוסה שווה לאורך החוט l. לכן נקבע מקום הכדור בכל רגע על-ידי גודל אחד: זווית ההטיה α של החוט מהאנך. נתייחס לזווית α כחיובית, אם הכדור מוטה ימינה ממצב שיווי-משקלו, וכשלילית – אם הוא מוטה שמאלה (ראו ציור 58). למגמת המשיק למסלול נתייחס כחיובית במגמת מעלה הקשת לימין.

נסמן את היטל כוח הכבידה על המשיק למסלול המטוטלת באמצעות F_τ. כאשר זווית ההטיה של החוט ממצב שיווי-המשקל שווה ל- α, הביטוי להיטל זה הוא:

$$F_\tau = - F \sin \alpha = - mg \sin \alpha$$

הסימן "מינוס" – מפני של- F_τ ול- α סימנים מנוגדים: כאשר הכדור מוטה ימינה $(\alpha > 0)$, הרכיב $\vec{F}_\tau$ של כוח הכבידה מכוון לשמאל, והיטלו שלילי: $F_\tau < 0$; וכאשר הכדור מוטה שמאלה $(\alpha < 0)$, ההיטל הוא חיובי: $F_\tau > 0$.

נסמן את היטל התאוצה של המטוטלת על המשיק למסלול באמצעות a_τ. היטל זה מאפיין את קצב שינוי **גודל** המהירות של המטוטלת.

לפי החוק השני של ניוטון: $ma_\tau = F_\tau$

או: $$ma_\tau = - mg \sin \alpha \qquad (3.6)$$

נחלק את שני האגפים של המשוואה ב- m, ונקבל:

$$a_\tau = - g \sin \alpha \qquad (3.7)$$

עד כה לא הגבלנו את ערכה של זווית ההטיה. בהמשך הדיון נגביל אותה לערכים קטנים. עבור זוויות קטנות, כאשר הן נמדדות ברדיאנים, מתקיים:

$$\sin \alpha \approx \alpha$$

לכן אפשר לרשום: $$a_\tau = -g\alpha \qquad (3.8)$$

נסמן את אורך הקשת OA באמצעות s (ראו ציור 58), ונקבל:

$$s = \alpha l$$

מכאן: $$\alpha = \frac{s}{l} \qquad (3.9)$$

נציב את הביטוי האחרון בשוויון (3.8) במקומה של זווית α, ונקבל סופית:

$$a_\tau = -\frac{g}{l}s \qquad (3.10)$$

צורתה של משוואה זו כצורתה של משוואת התנועה (3.4) של הכדור הקשור לקפיץ; אבל במקום ההיטל a_x של התאוצה נמצא ההיטל a_τ, ובמקום הקואורדינטה x נמצא s. מקדם הפרופורציונליות פה תלוי באורך החוט ובתאוצת הנפילה החופשית, והתאוצה פרופורציונלית להתרחקות הכדור (אורך הקשת) ממצב שיווי-המשקל.

כך הגענו למסקנה חשובה מאוד: **משוואות התנועה, המתארות תנודות של מערכות שונות ככדור על קפיץ וכמטוטלת, דומות**, כלומר: תנועות המשקולת והמטוטלת מתרחשות באופן דומה. התרחקות הכדור מנקודת שיווי-משקלו לאורך הקפיץ והתרחקות הכדור של המטוטלת ממצב שיווי-המשקל משתנות בזמן לפי אותו חוק מתמטי – אף שהכוחות הגורמים לתנודות הם מסוגים שונים: במקרה הראשון זהו כוח האלסטיות של הקפיץ, ובשני – כוח הכבידה.

משוואות התנועה (3.4) ו- (3.10) נראות ממש פשוטות: **התאוצה משתנה ביחס ישר לקואורדינטה**; אולם ממש לא קל לפתור אותן, כלומר להגדיר כיצד משתנה מקום הגוף המתנודד במהלך הזמן.

כאשר ידוע כיצד קשורות התאוצה והקואורדינטה (המקום) של גוף מתנודד, ניתן למצוא בעזרת אנליזה מתמטית את התלות של הקואורדינטה בזמן.

תאוצה: הנגזרת השנייה לפי הזמן של הקואורדינטה

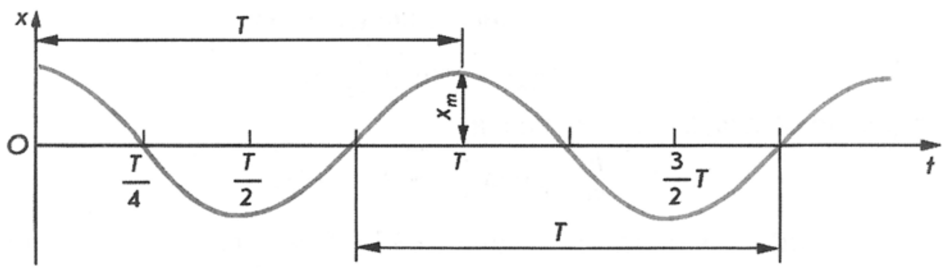
יודעים אתם כבר שהמהירות הרגעית היא הנגזרת לפי הזמן של הקואורדינטה. התאוצה היא הנגזרת לפי הזמן של המהירות או הנגזרת השנייה לפי הזמן של הקואורדינטה.[1] לכן אפשר לרשום את המשוואה (3.4) כך:

$$x'' = -\frac{k}{m}x \qquad (3.11)$$

כאשר "x – הנגזרת השנייה לפי הזמן של הקואורדינטה. בהתאם למשוואה (3.11), משתנה הקואורדינטה x במהלך התנודות החופשיות עם הזמן, וכך הנגזרת השנייה לפי הזמן של הקואורדינטה פרופורציונלית לקואורדינטה עצמה, ומנוגדת לה בסימנה.

תנודות הרמוניות

כיצד תלויה הקואורדינטה x בזמן? ברור שהיא אמורה להשתנות בזמן באופן מחזורי. מכירים אתם כבר את הפונקציות המחזוריות סינוס וקוסינוס. עם הגדלת הזווית מאפס משתנה פונקציית הקוסינוס: תחילה באופן מתון (ציור 59), ולאחר מכן מחריף שיפועה, והיא מתקרבת לאפס. לאחר שעברה דרך האפס, היא גדלה תחילה מהר בערכה המוחלט, ולאחר מכן מתמתנת עד לערכה המרבי.



ציור 59

[1] לצורך הקיצור אנו מדברים על תאוצה ומהירות, אך בפועל הכוונה להיטלי הערכים הווקטוריים האלה.

כך בדיוק משתנה קואורדינטת הכדור הקשור לקפיץ, לאחר שהוצא ממצב שיווי-משקלו: תחילה משתנה הקואורדינטה לאט, ולאחר מכן מהר יותר ויותר עם התקרבותו של הכדור לנקודת שיווי-משקלו.

על פני נקודת שיווי-המשקל חולף הכדור במהירות מרבית וממשיך לנוע לצד השני, וקואורדינטת הכדור משתנה יותר ויותר לאט עד לעצירת הכדור.

פונקציית הקוסינוס מתנהגת בתלות הזווית בדומה לקואורדינטת הכדור בתלות הזמן. **הנגזרת השנייה של פונקציית הקוסינוס וזו של פונקציית הסינוס פרופורציונליות לפונקציות עצמן, בסימן נגדי.**

בקורס האנליזה מוכיחים שלשום פונקציה אחרת אין תכונה כזאת, ומכאן שאפשר לטעון ש**קואורדינטת הגוף, המבצע תנודות חופשיות, משתנה בזמן לפי חוק פונקציית סינוס או פונקציית קוסינוס.**

שינויים מחזוריים של גודל פיזיקלי כתלות בזמן, המתרחשים לפי חוק פונקציית סינוס או פונקציית קוסינוס, מכונים תנודות הרמוניות.

תחילה נעסוק בשינויים הרמוניים של הקואורדינטה, ובהמשך נכיר את השינויים ההרמוניים של גדלים אחרים.

משרעת התנודות (האמפליטודה)

מאפיין חשוב של תנודות הוא ה**משרעת (האמפליטודה)**.

המשרעת של תנודות הרמוניות היא הגודל (הערך המוחלט) של התרחקות הגוף מנקודת שיווי-משקלו.

משרעת עשויה לקבל ערכים שונים – בהתאם למרחק הגוף מנקודת שיווי-המשקל ברגע ההתחלתי או בהתאם למהירות שמקנים לגוף ברגע זה. כך מוגדרת המשרעת לפי תנאי התחלה פיזיקליים; אולם הערכים המרביים של פונקציית סינוס ושל פונקציית קוסינוס שווים לאחת. לכן פתרון המשוואה (3.11) אינו יכול להיות סינוס או קוסינוס בלבד, אלא בצורת מכפלה של משרעת x_m בסינוס או בקוסינוס.

פתרון משוואת התנועה המתארת את התנודות החופשיות

איזו צורה יש לפתרון המשוואה (3.11)? אי-אפשר לטעון שהוא פשוט:

$$x = x_m \cos t$$

או:

$$x = x_m \sin t$$

מכיוון שבמקרה זה במקום:

$$x'' = -\frac{k}{m}x$$

היה מתקבל השוויון השגוי:

$$x'' = -x_m \cos t = -x$$

אולם שינוי לא גדול של צורת הפתרון יביא אותנו מיד למטרה. על מנת שבביטוי של הנגזרת השנייה $x''(t)$ יהיה הגורם $\frac{k}{m}$, נרשום את פתרון המשוואה (3.11) בצורה הבאה:

$$x = x_m \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t \qquad (3.12)$$

אזי הנגזרת הראשונה תהיה:

$$x' = -\sqrt{\frac{k}{m}}\, x_m \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

והנגזרת השנייה:

$$x'' = -\frac{k}{m}\, x_m \cos \sqrt{\frac{k}{m}}\, t = -\frac{k}{m}x$$

קיבלנו בדיוק את המשוואה (3.11), ולכן הפונקציה (3.12) היא הפתרון של המשוואה המקורית (3.11). מובן שפתרון המשוואה המקורית גם הוא פונקציה:

$$x = x_m \sin \sqrt{\frac{k}{m}}\, t$$

נסמן את הגודל הקבוע $\sqrt{\frac{k}{m}}$, התלוי בתכונות המערכת, באמצעות ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (3.13)$$

ואזי אפשר לרשום את פתרון המשוואה (3.11) בצורה פשוטה יותר:

$$x = x_m \cos \omega_0 t \qquad (3.14)$$

משוואת התנועה עצמה (3.11) תקבל עתה את הצורה:

$$x'' = -\omega_0^2 x \qquad (3.15)$$

הגרף של תלות הקואורדינטה בזמן, בהתאם ל- (3.14), הוא גרף של קוסינוס (ראו ציור 59).

זמן מחזור ותדירות של תנודות הרמוניות

נברר כעת את המשמעות הפיזיקלית של ω_0.

במהלך התנודות חוזרת על עצמה תנועת הגוף באופן מחזורי.

פרק הזמן הקצר ביותר T, העובר בין שני מצבי תנועה זהים, מכונה זמן מחזור התנודות.

כאשר ידוע זמן המחזור, ניתן למצוא את **תדירות התנודות**, כלומר את **מספר התנודות ביחידת הזמן**. כאשר תנודה אחת מתבצעת בזמן T, בשניות, מוגדר מספר התנודות בשנייה ν כך:

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad (3.16)$$

במערכת היחידות הבינלאומית SI תהיה תדירות התנודות שווה לאחת, כאשר בשנייה אחת מתבצעת תנודה אחת. יחידת התדירות מכונה **הרץ** (Hz) על-שם הפיזיקאי הגרמני **ה' הרץ**.

כעבור פרק זמן המחזור T, כאשר הזווית של הקוסינוס גדלה ב- $\omega_0 T$, חוזרת התנועה על עצמה, ופונקציית הקוסינוס מקבלת את ערכיה הקודמים מחדש; אולם מהטריגונומטריה ידוע, שזמן המחזור המזערי של פונקציית הקוסינוס שווה ל- 2π. לכן:

$$\omega_0 T = 2\pi$$

ומכאן:
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (3.17)$$

ובכן: הגודל ω_0, בערכו המספרי, הוא מספר תנודות הגוף, אולם לא ב-1 שנייה, אלא ב- 2π שניות.

מכנים אותו בשם **תדירות סיבובית** או **תדירות זוויתית**. [1]

את תדירות התנודות החופשיות מכנים **התדירות העצמית של המערכת המתנודדת**.

תלות התדירות וזמן המחזור של התנודות החופשיות בתכונות המערכת

בהתאם ל- (3.13) התדירות העצמית של תנודות גוף, הקשור לקפיץ, שווה:
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

היא גדלה עם קשיחות הקפיץ (מקדם קפיץ) והולכת וקטנה עם הגדלת מסת הגוף. דבר זה טבעי: קפיץ קשה יותר מקנה לגוף תאוצה גדולה יותר, ומהירות הגוף משתנה מהר יותר כאשר גוף, שמסתו גדולה יותר, משנה את מהירותו לאט יותר.

זמן מחזור התנודות שווה ל:
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (3.18)$$

אם ברשותנו כמה קפיצים שונים וגופים בעלי מסה שונה, אפשר לוודא שהנוסחאות (3.13) ו- (3.18) מתארות נכון את אופי התלות של ω_0 ו-T ב- k וב- m.

מקדם הפרופורציונליות בין התאוצה a_τ לבין ההתרחקות s במשוואה (3.10), המתארת את תנודות המטוטלת, הוא כמו במשוואה (3.11): ריבוע של תדירות סיבובית. לכן עבור זוויות קטנות של הטיית החוט מהאנך תלויה התדירות העצמית של תנודות המטוטלת המתמטית באורך המטוטלת ובתאוצת הנפילה החופשית כך:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad (3.19)$$

[1] בהמשך נתייחס אל התדירות הסיבובית כתדירות. אפשר להבדיל בין התדירות הסיבובית ω_0 לבין התדירות ν לפי הסימנים.

וזמן מחזור התנודות שווה:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (3.20)$$

נוסחה זו נבדקה לראשונה בניסוי על-ידי הפיזיקאי ההולנדי **ה' הויגנס**, בן זמנו של **ניוטון**.

זמן מחזור התנודות גדל עם אורך המטוטלת, ואינו תלוי כלל במסתה. קל לבדוק זאת בניסויים עם כמה מטוטלות שונות. גם את תלות זמן המחזור בתאוצת הנפילה החופשית אפשר לגלות: ככל ש- g קטן יותר, כך ארוך יותר זמן המחזור של תנודת המטוטלת, ובהתאם יפעם ויתקתק שעון מטוטלת לאט יותר. שעון מטוטלת, שמשקולת על מוט תתנודד בו, יפגר ב- 3 שניות לשעה, אם נגביה ונעלה אותו לגובה של כ- 200 מטר מעל הקרקע.

את תלות זמן המחזור של המטוטלת ב- g מיישמים בתחומים רבים. על-ידי מדידת זמן המחזור אפשר למדוד את g באופן מדויק מאוד. תאוצת הנפילה החופשית משתנה בהתאם לקו הרוחב הגיאוגרפי, אולם גם על קו רוחב אחד אין היא קבועה בכל מקום, שהרי צפיפות הקרקע אינה קבועה. באזורים, שבהם הצפיפות גבוהה יותר, התאוצה g גדולה יותר. אפשר לנצל תכונה זו של המטוטלת בחיפושי עפרות נדירות ואוצרות טבע אחרים.

לעופרת ולברזל צפיפות גבוהה יותר מצפיפותה של קרקע רגילה. כך אפשר למפות את האזורים העשירים בעופרת ובברזל על-ידי מדידה השוואתית של g באזור כלשהו באמצעות המטוטלת.

מפליא שזמן מחזור תנודות הגוף, התלוי על קפיץ, וזמן מחזור התנודות של מטוטלת עבור סטיות קטנות אינם תלויים במשרעת התנודות. אפשר להמחיש זאת ויזואלית באופן הבא: הגדלת המשרעת פי 2 גורמת להגדלת הכוח המחזיר פי 2, ויחד יוכפלו פי 2 התאוצה והמהירות הרגעיות. הדרך לנקודת שיווי-המשקל ארוכה פי 2, והגוף יעבור אותה באותו פרק זמן שהיה עובר את הדרך לנקודת שיווי-המשקל בתנודה בעלת המשרעת המקורית (הקטנה פי 2).

נדגיש: תנודות המטוטלת הרמוניות עבור זוויות סטייה קטנות בלבד. אם הזוויות אינן קטנות, לא תהיה התאוצה פרופורציונלית להטיה.

הכרנו את הערכים הבסיסיים המאפיינים את התנודות ההרמוניות: משרעת התנודות x_m, זמן מחזור התנודות T, תדירות התנודות ν והתדירות הסיבובית ω_0. עתה נכיר גודל חשוב נוסף: **המופע** (הפאזה).[1]

כאשר נתונה המשרעת של התנודות ההרמוניות, מוגדרת קואורדינטת הגוף המתנודד באופן חד-משמעי ובכל רגע על-ידי הזווית של פונקציית הקוסינוס או של פונקציית הסינוס: $\varphi = \omega_0 t$.

את הגודל φ, המשמש כזווית של פונקציית הקוסינוס או של פונקציית הסינוס, מכנים מופע התנודות המתוארות על-ידי הפונקציה. היחידות של המופע הן **רדיאנים**.

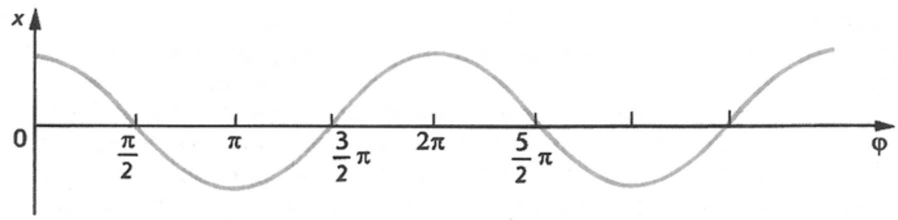
המופע קובע את הערכים של הקואורדינטה של המהירות ושל התאוצה, המשתנות גם הן בצורה הרמונית. לכן ניתן לומר, שעבור משרעת נתונה קובע המופע את מצב המערכת המתנודדת בכל רגע בזמן. זו משמעות המושג **מופע**.

תנודות בעלות משרעת ותדירות זהות עשויות להיבדל זו מזו במופע.

מכיוון ש- $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$, אזי:

$$\varphi = \omega_0 t = 2\pi \frac{t}{T} \tag{3.21}$$

היחס $\dfrac{t}{T}$ הוא חלק מזמן המחזור שחלף מרגע התחלת התנודות. **לכל פרק זמן, הנמדד בחלקי המחזור, מתאים ערך המופע ברדיאנים**. כך כעבור זמן $t = T/4$ (רבע זמן מחזור) מתאים $\varphi = \pi/2$; כעבר חצי זמן מחזור: $\varphi = \pi$; כעבור זמן מחזור שלם: $\varphi = 2\pi$ וכו'.



ציור 60

[1] מהמילה היוונית phasis - הופעה, שלב בהתפתחות תופעה כלשהי.

אפשר גם לתאר באופן גרפי את תלות קואורדינטת הנקודה המתנודדת במופע. בדומה לציור 59 מראה ציור 60 גרף של פונקציית הקוסינוס, אלא שבציר האופקי מסומנים ערכים שונים של המופע, ולא ערכים של זמן.

ייצוג תנודות הרמוניות באמצעות פונקציית קוסינוס ופונקציית סינוס

למדתם כבר שקואורדינטת גוף, המבצע תנודות הרמוניות, משתנה בזמן על-פי חוק פונקציית הסינוס או פונקציית הקוסינוס. לאחר שהגדרנו את מושג ה**מופע**, נבהיר:

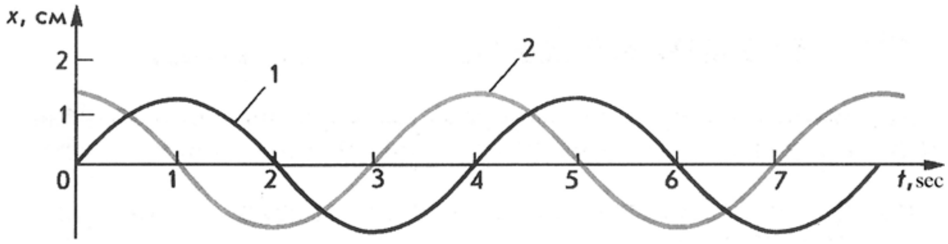
פונקציית הסינוס שונה מפונקציית הקוסינוס בהפרש זווית של רבע מחזור, כלומר ב- $\pi/2$:

$$\cos\varphi = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (3.22)$$

לכן במקום הנוסחה $x = x_m \cos \omega_0 t$ לתיאור תנודות הרמוניות ניתן להשתמש בנוסחה:

$$x = x_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (3.23)$$

אולם המופע ההתחלתי – ערך המופע ברגע $t = 0$ – אינו שווה לאפס, אלא ל- $\frac{\pi}{2}$. בדרך כלל יוצרים אנו תנודות של גוף בקצה קפיץ או בהטיה של מטוטלת בהיסט מנקודת שיווי-המשקל, ושחרורם ממצב זה. לכן כדי לתאר את התנודות נוח להשתמש בנוסחה (3.14) באמצעות פונקציית הקוסינוס מאשר בנוסחה (3.23), שמשמשת בה פונקציית הסינוס.



ציור 61

המצב היה שונה, אילו היינו מעוררים תנודות של גוף נייח במכה קצרה בזמן. אזי תשווה קואורדינטת הגוף ברגע ההתחלתי לאפס, ונוח יותר יהיה לתאר את

התנודות באמצעות פונקציית הסינוס על ידי הנוסחה:

$$x = x_m \sin \omega_0 t \qquad (3.24)$$

מכיוון שהמופע ההתחלתי שווה לאפס.

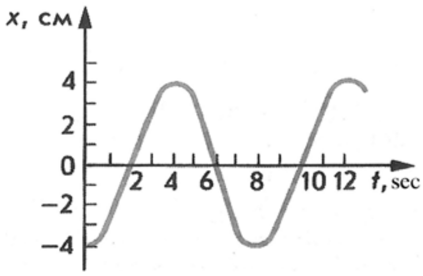
הזזת המופע

התנודות, המתוארות על-ידי הנוסחאות (3.23) ו- (3.24), שונות זו מזו במופע בלבד. **הפרש המופעים, הזזת המופע, או הפרש הפאזה** בין שתי התנודות האלה שווה ל- $\pi/2$. ציור 61 מתאר את הגרפים של הקואורדינטות בתלות הזמן עבור שתי תנודות הרמוניות, המוזזות במופע $\pi/2$: גרף 1 מתאר תנודות המתרחשות על-פי חוק פונקציית הסינוס:

$$x = x_m \sin \omega_0 t$$

ואילו גרף 2 מתאים לתנודות על-פי חוק פונקציית הקוסינוס:

$$x = x_m \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = x_m \cos \omega_0 t$$



ציור 62

כדי למצוא את הפרש המופעים בין שתי תנודות, יש לבטא אותן באמצעות אותה פונקציה טריגונומטרית: פונקציית הקוסינוס או פונקציית הסינוס.

?

1. **אילו תנודות מכונות הרמוניות?**
2. **כיצד קשורות זו לזו התאוצה והקואורדינטה בתנודות הרמוניות?**
3. **כיצד קשורה תדירות סיבובית לזמן המחזור?**
4. **מדוע תדירות התנודות של גוף הקשור לקפיץ תלויה במסת הגוף, ואילו תדירות התנודות של מטוטלת מתמטית אינה תלויה במסת המשקולת?**
5. **קואורדינטת הגוף, בסנטימטרים, משתנה עם הזמן באופן הבא:**

$$\mathbf{x = 3.5 \cos 4\pi t}$$

מהם ערכי המשרעת והתדירות הסיבובית של התנודות? מה היה מופע התנודות חמש שניות לאחר התחלתן?

התמרות אנרגיה בתנודות הרמוניות

6. מהם ערכי המשרעת וזמן המחזור של שלוש תנודות הרמוניות, המתוארות בציורים 61 ו-62?

§24 התמרות אנרגיה בתנודות הרמוניות

נחקור התמרות אנרגיה במהלך תנודות הרמוניות בשני מקרים: במערכת שאין בה חיכוך, ובמערכת שיש בה חיכוך.

התמרות אנרגיה במערכות ללא חיכוך

כאשר אנו מזיזים כדור הקשור לקפיץ (ראו ציור 56) ימינה למרחק x_m, אנו מקנים למערכת כמות של אנרגיה פוטנציאלית אלסטית:

$$W_{pm} = \frac{kx_m^{\ 2}}{2}$$

כאשר הכדור נע לשמאל, קטן עיוות הקפיץ, ועמו קטֵנה האנרגיה הפוטנציאלית האצורה בו; אולם במקביל לכך גדלה המהירות, ועמה האנרגיה הקינטית. ברגע שהכדור חולף על פני נקודת שיווי-המשקל, ערכה של האנרגיה הפוטנציאלית מזערי, ושל האנרגיה הקינטית מרבית.

לאחר המעבר דרך נקודת שיווי-המשקל הולכת המהירות וקטנה, ועמה קטנה האנרגיה הקינטית, והאנרגיה הפוטנציאלית הולכת וגדלה שוב. בנקודת הקצה השמאלית היא מגיעה למְרַבָּהּ, והאנרגיה הקינטית מתאפסת. כך מתרחשות התמרות אנרגיה במהלך התנודות: בין אנרגיה פוטנציאלית לקינטית, ולהפך. תהליך דומה מתרחש בתנודות המטוטלת.

האנרגיה הכוללת של הגוף הקשור בקפיץ שווה לסכום האנרגיות הקינטית והפוטנציאלית:

$$W = W_k + W_p = \frac{mv_x^{\ 2}}{2} + \frac{kx^2}{2} \qquad (3.25)$$

שיעורי האנרגיות הקינטית והפוטנציאלית משתנות באופן מחזורי, אולם האנרגיה הכוללת של מערכת סגורה, שלא פועלים בה כוחות חיכוך, נשארת, על-פי חוק שימור האנרגיה, קבועה. היא שווה לאנרגיה הפוטנציאלית ברגע הסטייה

המרבית מנקודת שיווי-המשקל או לאנרגיה הקינטית ברגע שבו הגוף חולף על פני נקודה זו:

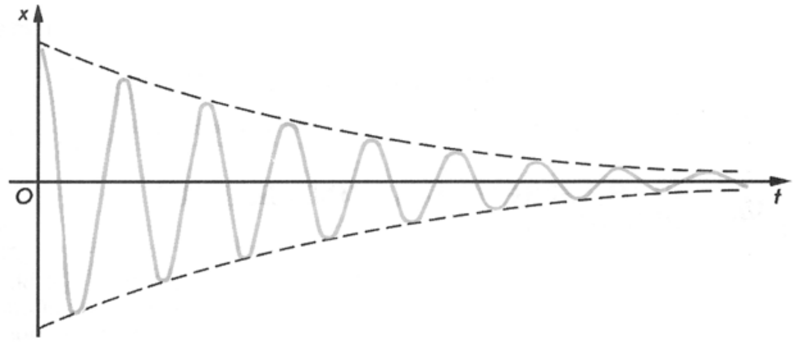
$$W = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{kx_m^2}{2} \qquad (3.26)$$

האנרגיה הכוללת של גוף מתנודד נמצאת ביחס ישר לריבוע המשרעת של הקואורדינטה או לריבוע המשרעת של תנודות המהירות (3.26).

תנודות דועכות

תנודות חופשיות של משקולת הקשורה לקפיץ או של מטוטלת הרמוניות רק אם אין חיכוך; אולם כוחות החיכוך, כוחות ההתנגדות, פועלים תמיד על גוף מתנודד.

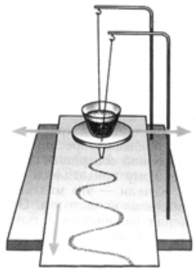
כוחות ההתנגדות מבצעים עבודה שלילית, וכך מקטינים את האנרגיה המכנית של המערכת. במהלך הזמן הולכות וקטנות הסטיות המרביות של הגוף מנקודת שיווי-המשקל, ולבסוף, לאחר שכל מאגר האנרגיה המכנית מתרוקן, תיפסקנה התנודות לגמרי. תנודות בנוכחות כוחות התנגדות הן **תנודות דועכות**.



ציור 63

גרף של תלות קואורדינטת הגוף בזמן עבור תנודות דועכות מתואר בציור 63. את הגרף הזה יכול לשרטט גוף מתנודד, למשל מטוטלת.

בציור 64 מתוארת מטוטלת, שקשור אליה משפך המלא בחול. תוך כדי תנודות מתווה החול, הנשפך על סרט נייר הנע מתחתיו, את הגרף של הקואורדינטה בתלות הזמן. זוהי שיטה פשוטה להמחשת התנודות, והיא נותנת מידע על טבעו של תהליך דועך זה.



ציור 64

במכוניות משתמשים בבולמי זעזועים מיוחדים כדי להקטין את רעידות תא הנוסעים בנסיעה בכביש משובש: בוכנה מחוררת קשורה לשלדה ונעה בתוך גליל, הקשור לציר גלגלי הרכב ומלא בנוזל סמיך. מעבר הנוזל דרך החורים שבבוכנה גורם להיווצרות כוחות התנגדות גדולים, וכתוצאה מכך – לדעיכה מהירה של התנודות.

אנרגיית הגוף המתנודד נשארת קבועה בהיעדר כוחות חיכוך.
אם פועלים במערכת כוחות התנגדות, התנודות תדעכנה.

---

§25 תנודות מאולצות, תהודה

תנודות חופשיות דועכות תמיד כעבור זמן קצר או ארוך, ולכן אין מיישמים אותן. לתנודות, שאינן דועכות והנמשכות זמן בלתי מוגבל, יישומים רבים.

השיטה הפשוטה ביותר לעורר תנודות בלתי דועכות היא הפעלת כוח חיצוני ומחזורי על מערכת. תנודות אלה מכונות **תנודות מאולצות**.

עבודת הכוח החיצוני על המערכת מספקת למערכת אנרגיה מבחוץ. אספקת האנרגיה אינה מאפשרת לתנודות לדעוך למרות פעולת כוחות החיכוך.

עניין מיוחד מעוררות תנודות מאולצות במערכת בעלת יכולת לבצע תנודות חופשיות. מקרה זה מוּכָּר לכל מי שניסה לנדנד ילד על נדנדה.

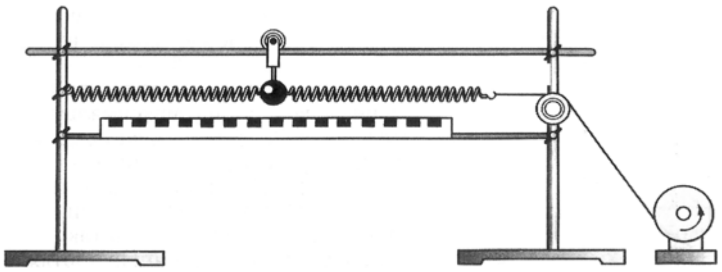
הנדנדה היא מטוטלת, כלומר מערכת בעלת תדירות עצמית מסוימת. אי-אפשר להסיט נדנדה מנקודת שיווי-המשקל למשרעת גדולה באמצעות כוח קבוע קטן. לא ניתן לנדנד את הנדנדה על-ידי דחיפות אקראיות לצדדים שונים – אפילו על-ידי אדם חזק. אולם אם נדחוף נדנדה בקצב נכון ולמגמה הנכונה בכל פעם שהיא לידינו, ניתן יהיה לנדנד אותה ללא מאמץ רב למשרעת גדולה. אומנם הדבר יארך זמן-מה, אבל כל דחיפה – די שתהיה קטנה. לאחר הדחיפה הראשונה תבצע הנדנדה תנודות חלשות מאוד; אולם אם קצב התנודות האלה שווה לקצב תזמון הדחיפות החיצוניות והדחיפה השנייה תבוא בתזמון נכון, היא תגביר את פעולת הדחיפה הראשונה. הדחיפה השלישית תגביר את התנודות עוד יותר, וכך הלאה, ותוצאות הדחיפות הבודדות יצטברו למשרעת תנודות גדולה. עם זאת, אילו לא היו הדחיפות

החיצוניות מתוזמנות היטב, היו פעולות הדחיפות העוקבות מקזזות זו את זו, ולא תהיה הגברה.

אפשרות זו – הגברה משמעותית של משרעת התנודות במערכת היכולה לבצע תנודות חופשיות – היא בעלת חשיבות רבה, כאשר תדירות הכוח החיצוני המחזורי שווה לתדירות העצמית של המערכת.

תנודות מאולצות של כדור הקשור לקפיץ

נסתכל בתנודות מאולצות של מערכת בעלת תדירות עצמית מסוימת. נוח יהיה לחקור את הכדור הקשור לקפיץ, אולם הפעם נקשור את קצה אחד הקפיצים לחוט העובר דרך גלגלת (ציור 65). הקצה האחר של החוט קשור למוט, המחובר לנקודה על היקף הדיסק. כאשר הדיסק יסתובב באמצעות מנוע חשמלי, יפעל על הכדור



ציור 65

כוח מחזורי חיצוני, והוא יתחיל להתנודד באטיות. משרעת התנודות תגדל, אך כעבור זמן-מה תתייצבנה התנודות, ומשרעת התנודות לא תגדל עוד עם הזמן. נשים לב לתדירות תנודות הכדור: היא שווה לתדירות התנודות של קצה הקפיץ, כלומר לתדירות השינוי של הכוח החיצוני (תדירות זו שווה למספר סיבובי הדיסק בשנייה). בתנודות מאולצות שווה תמיד תדירות התנודות לתדירות המחזורית של הכוח החיצוני.

תהודה

בעזרת המערך המתואר בציור 65 נבדוק כיצד תלויה משרעת התנודות המאולצות שהתייצבו בתדירות הכוח המחזורי החיצוני. נשנה לאט את תדירות הכוח המחזורי החיצוני – ונראה שמשרעת התנודות גדלה. היא תגיע לערך מרבי, כאשר תדירות הכוח המחזורי החיצוני תהיה קרובה בערכה לתדירות העצמית של התנודות החופשיות של הכדור.

כאשר תדירות הכוח המחזורי החיצוני ממשיכה לגדול, הולכת משרעת התנודות וקטנה שוב. תלות משרעת התנודות בתדירות הכוח המחזורי החיצוני מתוארת בציור 66. עבור תדירויות גבוהות מאוד של הכוח החיצוני שואפת המשרעת לאפס, מכיוון שעקב ההתמדה אין הגוף מספיק לזוז משמעותית בפרקי זמן קצרים, והוא "רועד במקום".

גידול חד של משרעת התנודות המאולצות (במערכת נטולת חיכוך לחלוטין) מתרחש כאשר תדירות הכוח החיצוני המחזורי, הפועל על המערכת, שווה לתדירות התנודות החופשיות.[1]

תופעה זאת מכונה **תהודה** (Resonance – מהמילה הלועזית שמשמעותה נותן מענה).

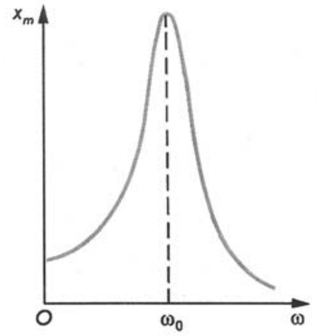
מדוע מתרחשת התהודה? ניתן להסביר את התופעה משיקולי אנרגיה.

המשרעת היא מרבית בהתרחש התהודה, משום שנוצרים התנאים המתאימים ביותר להעברת אנרגיה ממקור הכוח החיצוני אל המערכת: הכוח החיצוני המחזורי פועל באופן מתוזמן עם התנודות החופשיות, מגמתו זהה למגמת מהירות הגוף המתנודד. לכן מבצע הכוח החיצוני המחזורי החיצוני עבודה חיובית בלבד. התנודות תתייצבנה, כאשר העבודה החיובית של הכוח חיצוני המחזורי תשווה בגודלה לעבודה השלילית של כוח ההתנגדות.

אם תדירות הכוח החיצוני אינה שווה לתדירות העצמית ω_0 של תנודות המערכת, יבצע הכוח החיצוני המחזורי עבודה חיובית במשך חלק מהמחזור בלבד, ובמהלך החלק האחר של המחזור תהיה מגמת הכוח מנוגדת למגמת המהירות, ועבודת הכוח החיצוני המחזורי תהיה שלילית. העבודה הכוללת של הכוח החיצוני המחזורי במשך המחזור לא תהיה גדולה, ובהתאמה, לא תהיה גדולה משרעת התנודות. החיכוך משפיע באופן משמעותי על תופעת התהודה במערכת. העבודה החיובית של הכוח החיצוני מושקעת במלואה לקיזוז אובדן האנרגיה בעבודה השלילית של כוח ההתנגדות. לכן, ככל שקטן מקדם החיכוך, כך גדולה יותר משרעת התנודות.

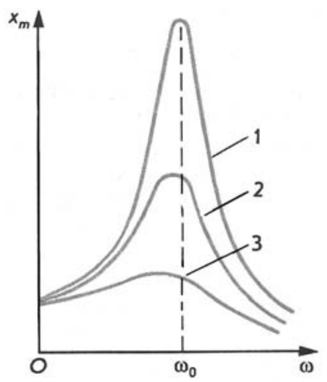
[1] עקב השפעת החיכוך מתרחשת התהודה בתדירות הכוח החיצוני המחזורי, השונָה במקצת מהתדירות העצמית של המערכת.

שינוי משרעת התנודות בתלות התדירות עבור מקדמי חיכוך שונים במשרעת כוח חיצוני מחזורי קבועה מתואר בציור 67. לעקומה 1 מתאים חיכוך מזערי, ולעקומה 3 – חיכוך מרבי. הציור מראה ש**גידול המשרעת של תנודות מאולצות במצב של תהודה בולט יותר, כאשר החיכוך במערכת קטן יותר.**



ציור 66

כאשר החיכוך קטן, גרף התהודה "חד", וכאשר החיכוך גדול, הגרף "קהה" (רחב). אם תדירות התנודות רחוקה מתדירות התהודה, קטנה משרעת התנודות וכמעט אינה תלויה בכוח ההתנגדות במערכת.



ציור 67

מהגרף רואים שתדירות התהודה במקרה של חיכוך נמוך קרובה לתדירות התנודות החופשיות ω_0, ואילו במקרה של חיכוך רב תדירות התהודה קטנה ממנה, והמשרעת מגיעה לערכה המרבי בתדירות הקטנה מתדירות התנודות החופשיות.

במצב תהודה במערכת בעלת חיכוך נמוך עשויה משרעת התנודה להיות גדולה מאוד – אף אם הכוח החיצוני המחזורי קטן; אולם במקרה זה תתייצב משרעת גדולה זו כעבור זמן ממושך.

בהתאם לחוק שימור האנרגיה אפשר לעורר במערכת תנודות בעלות משרעת גדולה, כלומר להקנות למערכת אנרגיה גדולה על-ידי כוח חיצוני קטן, כעבור זמן רב בלבד. כאשר החיכוך גדול, תהיה משרעת התנודות קטנה, והתייצבות התנודות לא תדרוש זמן ממושך.

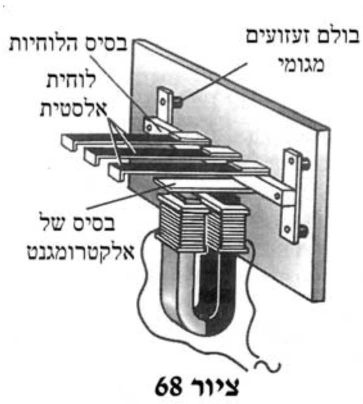
ניתן להגיע לתהודה, אם דעיכת התנודות החופשיות קטנה – אחרת אין משרעת התנודות המאולצות במצב שוויון התדירויות $\omega = \omega_0$ שונה הרבה ממשרעת התנודות בתדירויות אחרות.

כאשר מערכת נמצאת תחת השפעת כוח חיצוני מחזורי, עשויה להתרחש תופעת תהודה, הגורמת לגידול חד של משרעת התנודות.

כל גוף אלסטי – גשר, בסיס מכונה או מבנה אונייה – מהווים מערכת המאופיינת על-ידי תדירות עצמית. לעתים קרובות מלוּוָה עבודת המנוע במאמצים מחזוריים הקשורים בעבודת חלקי המנוע (בוכנות, למשל) או במרכוז לא מדויק של חלקים סובבים (צירים, למשל). אם תדירות המאמצים המחזוריים שווה לתדירות העצמית של המערכת, מופיעה התהודה. משרעת התנודות עלולה לגדול עד כדי כך שהמערכת תיהרס – אף שהמאמץ בחומר המערכת אינו עולה על סף המאמץ הגבולי של המערכת במאמץ סטטי. הסיבה לקריסת המבנה היא שברזל, פלדה וחומרים אחרים מאבדים את חוסנם באופן חריף יותר תחת מאמצים מחזוריים, וכתוצאה מכך נהרסים בפתאומיות.

בכל המקרים האלה נוקטים פעולות מיוחדות כדי לא לאפשר את הופעת התהודה או להמעיט בתוצאותיה: מגדילים את החיכוך במערכת או מתכננים את המערכת כך, שהתדירות העצמית לא תהיה שווה לתדירות הכוח המחזורי החיצוני. ידועים מקרים, שבהם נאלצו לתכנן מחדש ספינות ענקיות כדי להקטין את רעידותיהן.

דוגמה נוספת נוגעת למעבר על גשרים: במעבר גשר נאסר על חיילים לצעוד בקצב אחיד. צעדה צבאית אחידה גורמת להשפעה מחזורית על הגשר, ואם במקרה שווה תדירות ההשפעה הזאת לתדירות העצמית של תנודות הגשר, הוא עלול להיהרס.



ציור 68

עד כאן הבאנו דוגמאות של תוצאות מזיקות של התהודה; אולם יש לה גם תוצאות מועילות.

על תופעת התהודה מבוסס מכשיר למדידת התדירות של זרם חילופין. המכשיר כולל אוסף של לוחיות אלסטיות, המורכבות על בסיס משותף (ציור 68). לכל לוחית תדירות עצמית מיוחדת התלויה בתכונותיה האלסטיות, באורכהּ ובמסתהּ.

התדירויות העצמיות של הלוחיות ידועות. תחת השפעת אלקטרומגנט מבצעים הבסיס ועמו כל הלוחיות תנודות מאולצות; אולם רק לוחית אחת, שהתדירות העצמית שלה שווה לתדירות התנודות של הבסיס, תתנודד במשרעת גדולה. מנגנון זה מאפשר לגלות את תדירות זרם החילופין, שהיא תדירותו של הבסיס הרוטט.

בהמשך נכיר דוגמאות נוספות, חשובות הרבה יותר, ביישום תופעת התהודה.

?

1. **שתי מטוטלות בנויות מכדורים בעלי רדיוס שווה, התלויים בקצה חוטים בעלי אורך שווה. מסות הכדורים שונות. התנודות של איזה כדור, הקל או הכבד יותר, ייפסקו מהר יותר?**
2. **האם נזדמן לכם לראות את תופעת התהודה בבית או ברחוב? אם כן, תארו זאת והסבירו.**
3. **כדי להחזיק פתוחה דלת מסתובבת, המוחזקת במצב פתוח ומוחזרת למצב סגור על-ידי קפיצים, יש להפעיל על הידית כוח קבוע של 50 ניוטון. האם אפשר לפתוח את הדלת על-ידי הפעלת כוח של 0.005 ניוטון (ניתן להזניח את החיכוך שבצירי הדלת)? באיזה תנאי בולטות במיוחד תכונות התהודה של מערכת?**

הכרתם את נושא התנודות המכניות. נבחין בתכונה אחת, המשותפת לכל התנודות והמבדילה אותן מכל סוג אחר של תנועה מכנית:

בדרך כלל מתמקד פתרון בעיית תנועה של גוף במציאת מקום הגוף ומהירותו בכל רגע בזמן. לעומת זאת מתמקד תיאור תנודות מחזוריות במאפיינים של מחזוריות התנועה – ולא במקום ובמהירות הגוף המתנודד בכל רגע בזמן. חשוב לשלוט במשרעת ובזמן מחזור התנודות, כלומר בערכים המאפיינים את התהליך. בתנודות מאולצות יש לדעת את היחס בין תדירות הכוח המחזורי המאלץ לבין זה של התנודות החופשיות, כי יחס זה מגדיר את אופי התהליך.

דוגמאות לפתרון תרגילים

1. כמה תנודות מבצעת מטוטלת מתמטית שאורכה $l = 4.9\ m$ בזמן $t = 5\ min$?

<u>פתרון</u>

זמן מחזור התנודות נמצא על-פי הנוסחה:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

מספר התנודות המבוקש נמצא כך:

$$n = \frac{t}{T} = \frac{t}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \approx 68$$

2. קפיץ התלוי אנכית מתארך על-ידי משקולת, הקשורה לקצהו, לאורך $\Delta l = 0.8\ cm$. למה שווה מחזור התנודות T של התנודות החופשיות של המשקולת?

<u>פתרון</u>

מחזור תנודות המשקולת הקשורה לקפיץ מוגדר לפי הנוסחה:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

כאשר: m – מסת המשקולת; k – מקדם הקפיץ. על המשקולת פועלים כוח הכבידה $\vec{F}_g$ וכוח אלסטי $\vec{F}_e$. כאשר המשקולת נמצאת בשיווי-משקל, כוחות אלה שווים בגודלם:

$$F_g = F_e$$

מכיוון ש: $F_g = mg$ ו- $Fe = k\Delta l$ (**חוק הוק**), אזי: $mg = k\Delta l$, ובהתאם: $\frac{m}{k} = \frac{\Delta l}{g}$. לכן:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}} \approx 0.2\ sec$$

3. על מוט אופקי נמצאת משקולת הקשורה לקפיץ (ראו ציור 56). הצד השני של הקפיץ קשור. ברגע ההתחלתי מסיטים את המשקולת ממצב שיווי-המשקל ב- $x_m = 10\ cm$ ומשחררים אותה. מצאו את קואורדינטת המשקולת כעבור 1/8 זמן מחזור של התנודות מהרגע ההתחלתי. הזניחו את החיכוך.

פתרון

תלות קואורדינטת המשקולת בזמן היא: $x = x_m \cos \omega_0 t$.

מכיוון ש- $\omega_0 = \frac{2\pi}{t}$ ו- $t = \frac{T}{8}$, אזי:

$$x = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8}\right) = x_m \cos\frac{\pi}{4} \approx 0.071 \text{ m}$$

4. משקולת, הקשורה לקצה קפיץ, מתנודדת לאורך מוט אופקי חלק (ראו ציור 56). מצאו את היחס בין האנרגיה הקינטית של המשקולת לבין האנרגיה הפוטנציאלית של המערכת, ברגע שבו המשקולת נמצאת בנקודת האמצע בין הנקודה הקיצונית לבין נקודת שיווי-המשקל.

פתרון

קואורדינטת הנקודה הנתונה שווה למחצית משרעת התנודות: $x = \frac{x_m}{2}$. בחלוף המשקולת באותה נקודה שווה האנרגיה הפוטנציאלית של המערכת:

$$W_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kx_m^2}{8}$$

אולם בכל רגע בזמן מתקיים:

$$W_k + W_p = \frac{kx_m^2}{2}$$

לכן האנרגיה הקינטית של המשקולת ברגע שהיא חולפת בנקודה הנתונה תחושב כך:

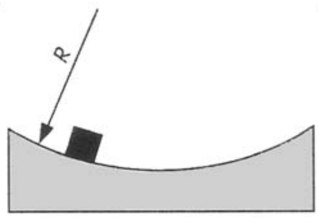
$$W_k = \frac{kx_m^2}{2} - W_p = \frac{kx_m^2}{2} - \frac{kx_m^2}{8} = \frac{3}{8}kx_m^2$$

לכן:

$$\frac{W_k}{W_p} = 3$$

מקבץ תרגילים 3

1. **משקולת שמסתה 100 גרם מבצעת תנודות בתדירות 2 הרץ בהשפעת קפיץ. מצאו את מקדם הקפיץ.**
2. **אורך מטוטלת פוקו בכנסיית איזק בסנט-פטרבורג הוא 98 מטר. מהו מחזור התנודות של המטוטלת?**
3. **מטוטלת אחת ביצעה $n_1 = 10$ תנודות, ואחרת – $n_2 = 6$ תנודות באותו פרק זמן. הפרש האורכים של המטוטלות $\Delta l = 16\ cm$. מה אורכה של כל מטוטלת?**
4. **בכמה ישתנה זמן מחזור התנודות של מטוטלת, אם תועבר מכדור הארץ לירח? מסת הירח קטנה פי 81 ממסת כדור הארץ, ורדיוס כדור הארץ גדול פי 3.7 מרדיוס הירח.**
5. **כדור, התלוי מהתקרה על חוט ארוך, הוסט לזווית קטנה ושוחרר. כדור אחר נפל בנפילה חופשית מנקודת הקשירה של החוט לתקרה ללא מהירות התחלתית. איזה מהכדורים יגיע מהר יותר לנקודת שיווי-המשקל של הכדור הראשון, אם התחילו את תנועתם בו-זמנית?**
6. **כדור, הקשור לקצה קפיץ, הוסט למרחק 1 ס"מ מנקודת שיווי-משקלו ושוחרר. איזו דרך יעבור הכדור ב- 2 שניות, אם תדירות תנודותיו $\nu = 5\ Hz$? (ניתן להזניח את דעיכת התנודות).**
7. **גוף, שמסתו 200 גרם, קשור לקצה קפיץ ומתנודד במישור אופקי. משרעת התנודות 2 ס"מ, ומקדם הקפיץ 16 N/m. מצאו את התדירות הסיבובית של הגוף ואת האנרגיה הכוללת האצורה במערכת.**
8. **קובייה קטנה מתנדנדת חופשית ללא חיכוך בתחתית שקע כדורי (ציור 69). מה מחזור תנודותיה? רדיוס העקמומיות של השקע הוא R.**



ציור 69

9. **מכונית נוסעת בדרך משובשת. המרחק בין הבליטות בדרך הוא בערך 8 מטרים. זמן מחזור התנודות החופשיות של המרכב שלה 1.5 שנייה. באיזו מהירות של המכונית תהיינה הרעידות בכיוון האנכי בולטות במיוחד?**

תקציר פרק 3

1. התנודות בתחומי הפיזיקה השונים (במכניקה, בחשמל) מתוארות על-ידי חוקים כמותיים זהים. מבדילים בין תנודות **חופשיות** לתנודות **מאולצות**.

2. תנודות **חופשיות** מופיעות במערכת בהשפעת כוחות פנימיים, לאחר שהמערכת הוצאה ממצב שיווי-משקלה. תנודות חופשיות מבצעת משקולת, הקשורה לקצה קפיץ ומטוטלת. במהלך הזמן דועכות התנודות החופשיות עקב החיכוך.
תנודות **מאולצות** מופיעות במערכת בעקבות פעולה של כוח חיצוני מחזורי. תנודות אלה אינן דועכות, כל עוד פועל הכוח החיצוני. דוגמה לתנודות מאולצות היא נדנדה, שמנדנדים בדחיפות מחזוריות.

3. תנודות חופשיות של משקולת הקשורה לקפיץ מתוארות על-ידי החוק השני של ניוטון; במקרה הנדון החוק הוא:

$$x'' = -\omega_0^2 x$$

כאשר: x – סטיית המשקולת מנקודת שיווי-המשקל; x'' – תאוצת המשקולת; ω_0^2 – קבוע, התלוי בתכונות המערכת. משוואה דומה (שבה הסטייה והתאוצה מסומנות באותיות אחרות) מתארת את תנודות המטוטלת המתמטית.

4. פתרון המשוואה, המתארת את התנודות החופשיות, הוא:

$$x = x_m \cos \omega_0$$

תנודות המתרחשות לפי חוק זה (או לפי חוק פונקציית הסינוס) מכונות תנודות **הרמוניות**.

5. גודל הסטייה המרבית x_m מנקודת שיווי-המשקל מכונה **משרעת התנודות**.
הגודל ω_0 מכונה **תדירות סיבובית של התנודות**, ומתבטא באמצעות התדירות ν כך:

$$\omega_0 = 2\pi\nu$$

6. פרק הזמן המזערי, שאחריו חוזרת תנועת הגוף על עצמה, מכונה **זמן מחזור התנודה**, וניתן לבטאו באמצעות התדירות הסיבובית באופן הבא:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

7. את הגודל, המשמש כזווית של פונקציית הקוסינוס או של פונקציית הסינוס, מכנים **מופע התנודות**. המופע מגדיר את משרעת הגוף המתנודד בכל רגע.