

26. זוגיות, אי-זוגיות ומחזוריות של פונקציות טריגונומטריות

בכיתה י' למדתם כי עבור כל ערך של x מתקיימים השוויונות:

$$\sin(-x) = -\sin x, \cos(-x) = \cos x$$

לכן, $y = \sin x$ היא פונקציה אי-זוגית, ו- $y = \cos x$ היא פונקציה זוגית.

כדי לבדוק אם פונקציה זוגית או אי-זוגית, יש להציב בביטוי הפונקציה במקום x

את $(-x)$, ולבדוק איזה מהשוויונות יתקיימו: $f(-x) = f(x)$ – פונקציה זוגית,

$f(-x) = -f(x)$ – פונקציה אי-זוגית. אם לא מתקיים אף אחד מהם משמע הפונקציה

אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

$$\text{עבור פונקציית טנגנס נקבל: } \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x)$$

$$\text{לכן מסיקים כי } \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan(x)$$

כלומר, טנגנס היא פונקציה אי-זוגית.

בדרך זו אפשר לבדוק את תכונת הזוגיות של פונקציה כלשהי.

דוגמה 1

בדקו האם הפונקציה $y = 2 + \sin x \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ זוגית או אי-זוגית.

נזכירכם כי לחקירת פונקציות טריגונומטריות מקובל להשתמש ברדיאנים כיחידות

זווית: במקרה זה, המשתנה x הוא מספר טהור, המשתייך לקבוצת מספרים ממשיים

$x \in \mathbb{R}$, כאשר לזווית מלאה של 360° מתאים הערך $x = 2\pi$, לזווית ישרה מתאים

הערך $x = \frac{\pi}{2}$ וכי.

כדי לבדוק את סימן הפונקציה $y(-x)$, נשתמש בנוסחאות של פונקציות

טריגונומטריות של זוויות גדולות: $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin x$, לכן: $y = 2 + \sin^2 x$.

כעת נחשב את $y(-x)$: $y(-x) = 2 + \sin^2(-x) = 2 + (-\sin x)^2 = 2 + \sin^2 x = y(x)$

כלומר, הפונקציה היא זוגית. \triangleright

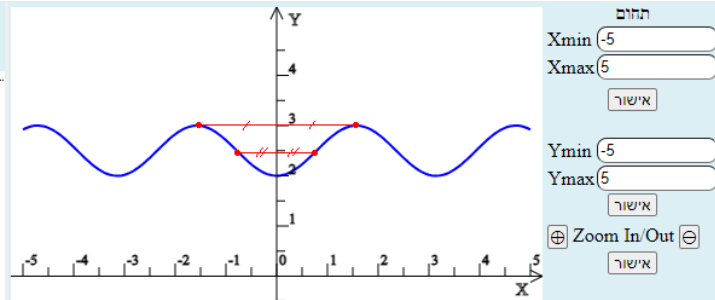
נבדוק את המסקנה: נשרטט גרפים של שתי הפונקציות, $y(x)$ ו- $y(-x)$ באמצעות

התוכנה לבניית גרפים, ונוודא כי הגרפים סימטריים ביחס לציר y (כפי שלמדתם

בכיתה י', הגרפים של פונקציות $y(x)$ ו- $y(-x)$ סימטריים ביחס לציר y כאשר

הפונקציה זוגית וסימטריים ביחס לראשית הצירים אם הפונקציה אי-זוגית).

$$2 + \sin x \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$$



26.1 מחזוריות של פונקציה

ידוע כי עבור כל x מתקיימים השוויונות:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

מכאן נובע כי ערכי הפונקציות חוזרות על עצמם באופן **מחזורי** כאשר המשתנה x משתנה ב- 2π . פונקציות כאלה מכונות **מחזוריות** בעלות מחזור של 2π .

הגדרה פונקציה $f(x)$ מכונה מחזורית אם קיים מספר כזה $T \neq 0$ שעבור כל x מתחום

$$f(x - T) = f(x) = f(x + T) \quad \text{הגדרה של הפונקציה מתקיים השוויון:}$$

המספר T נקרא **מחזור** הפונקציה $f(x)$.

מהגדרה זו נובע, כי עם x שייך לתחום הגדרה של פונקציה $f(x)$, אזי גם המספרים $x + T, x - T$ ובכלל כל המספרים מהסוג $x + Tn, n \in \mathbb{Z}$ גם שייכים לתחום ההגדרה

$$f(x + Tn) = f(x), \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{של הפונקציה, ומתקיים:}$$

נוכיח כי המספר 2π הוא המחזור הקטן ביותר של פונקציה $y = \cos x$.

יהיה $T > 0$ מחזור של קוסינוס, כלומר עבור כל x מתקיים שוויון

$$\cos(x + T) = \cos x$$

ניקח $x = 0$. נקבל: $\cos T = 1$, מכאן: $T = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

כיוון ש- $T > 0$, מסיקים כי הערכים האפשריים של T הם: $2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$,

לכן המחזור לא יכול להיות קטן מ- 2π . בדומה לכך אפשר להוכיח כי המספר

2π הוא גם המחזור החיובי הקטן ביותר של פונקציה $y = \sin x$.

פונקציות טריגונומטריות

דוגמה 2

הוכיחו כי $f(x) = \sin 3x$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור $T = \frac{2\pi}{3}$.

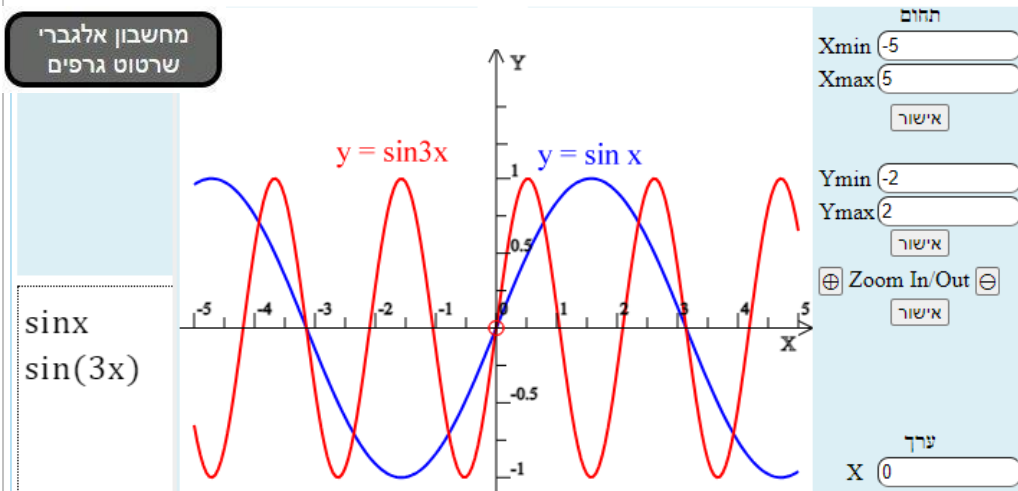
אם פונקציה מוגדרת עבור כל x ממשי, אזי כדי לוודא שהיא מחזורית בעלת מחזור

T , מספיק להראות כי עבור כל x מתקיים השוויון: $f(x + T) = f(x)$.

הפונקציה הנתונה מוגדרת עבור כל $x \in \mathbb{R}$. ועבורה מתקיים:

$$\triangleright f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x)$$

נתבונן בגרף הפונקציה $f(x) = \sin 3x$ ונשווה אותו לגרף הפונקציה $f(x) = \sin x$:



רואים כי גרף הפונקציה $f(x) = \sin 3x$ "צפוף" יותר מגרף הפונקציה $f(x) = \sin x$,

והמחזור שלה איפו קטן פי-3 ממחזור הפונקציה $f(x) = \sin x$.

דוגמה 3

הוכיחו כי פונקציה $y = \tan x$ היא מחזורית בעלת מחזור π .

אם x שייך לתחום הגדרה של הפונקציה, כלומר $x \neq \frac{\pi}{2} \pm n\pi, n \in \mathbb{Z}$, אזי נקבל מהנוסחאות לפונקציות טריגונומטריות של זוויות גדולות:

$$\tan(x - \pi) = -\tan(\pi - x) = -(-\tan x) = \tan x, \quad \tan(x + \pi) = \tan x$$

$$\text{ובכן, } \tan(x - \pi) = \tan x = \tan(x + \pi)$$

\triangleright לכן π הוא מחזור הפונקציה $y = \tan x$.

נוכיח כי המספר π הוא המחזור הקטן ביותר של פונקציה $y = \tan x$.

פונקציות טריגונומטריות

יהיה T מחזור של טנגנס, כלומר השוויון $\tan(x + T) = \tan x$ מתקיים עבור כל x .

נציב $x = 0$: $\tan T = 0, T = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

כיוון שמספר שלם חיובי הקטן ביותר שווה ל-1, נסיק כי $T = \pi$ הוא המחזור הקטן ביותר של הפונקציה $y = \tan x$.



דוגמה 4

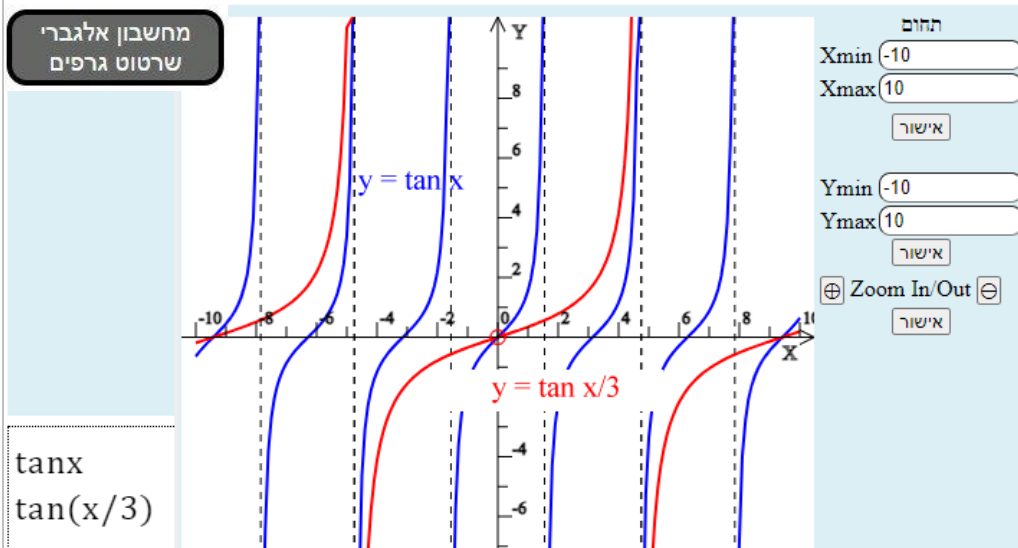
הוכיחו כי $y = \tan\left(\frac{x}{3}\right)$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור 3π .

כיוון ש- $\tan\left(\frac{x+3\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{x}{3} + \pi\right) = \tan\frac{x}{3}$

וגם $\tan\left(\frac{x-3\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{x}{3} - \pi\right) = \tan\frac{x}{3}$

מסיקים כי $y = \tan\left(\frac{x}{3}\right)$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור 3π .

נתבונן בגרף הפונקציה $y = \tan\left(\frac{x}{3}\right)$ ונשווה אותו לגרף הפונקציה $f(x) = \tan x$:



רואים כי גרף הפונקציה $y = \tan\left(\frac{x}{3}\right)$ "צפוף" פחות מגרף הפונקציה $f(x) = \tan x$,

והמחזור שלה אינו גדול פי-3 ממחזור הפונקציה $f(x) = \tan x$.

פונקציות טריגונומטריות

הערה לסקרנים

פונקציות מחזוריות מתארות תהליכים פיזיקליים רבים כמו: תנודות של משקולת התלויה בקפיץ, תנודות של מטוטלת, תנועת כוכבי לכת, זרם חילופין ועוד. מתכונות של פונקציות מחזוריות נובע, כי מספיק לתאר את המתרחש בזמן השווה למחזור הפונקציה: בכל פרקי זמן השווים למחזור התנהגות הפונקציה זהה.

תרגילים

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

בדקו האם הפונקציה היא אי-זוגית או אי-זוגית:

26.1 א. $y = \cos 3x$ ב. $y = 2 \sin 4x$ ג. $y = \frac{x}{2} \cdot \tan^2 x$

26.2 א. $y = \sin x + x$ ב. $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ג. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - x^2$
ד. $y = x \cdot \cos \frac{x}{2}$ ה. $y = x \sin x$ ו. $y = 2 \sin^2 x$

26.3 א. $y = \frac{\sin x}{x} + \sin x \cos x$ ב. $y = 3 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi - x)$ ג. $y = \frac{1}{2} \cos(2x) \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2x\right) + 3$

ז. $y = x^2 + \frac{1+\cos x}{2}$

הוכיחו כי פונקציה היא מחזורית בעלת מחזור 2π :

26.4 א. $y = \cos x - 1$ ב. $y = \sin x + 1$ ג. $y = 3 \sin x$

ד. $y = \frac{\cos x}{2}$ ה. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ו. $y = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$

הוכיחו כי פונקציה היא מחזורית בעלת מחזור T , אם נתון:

26.5 א. $y = \sin 2x, T = \pi$ ב. $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right), T = 4\pi$

ג. $y = \tan 2x, T = \frac{\pi}{2}$ ד. $y = \sin\left(\frac{4x}{5}\right), T = \frac{5\pi}{2}$

מצאו את המחזור החיובי הקטן ביותר של פונקציה:

26.5 א. $y = \cos\left(\frac{2x}{5}\right)$ ב. $y = \sin\left(\frac{3x}{2}\right)$ ג. $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ ד. $y = |\sin x|$

תשובות

26.1 ב. אי-זוגית ד. אי-זוגית ו. זוגית

26.2 ב. לא זוגית ולא אי-זוגית ד. זוגית ו. זוגית

26.5 ב. $\frac{4\pi}{3}$ ד. π

פונקציות טריגונומטריות

26.2 פונקציות טריגונומטריות – בעיות קיצון

דוגמה 5

מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $y = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$.
נכפיל ונחלק כל איבר בביטוי $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$y = a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

כיוון ש- $1 \leq \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq 1$, אפשר לסמן: $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{אז:}$$

לכן אפשר לרשום:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \varphi \cdot \cos x + \cos \varphi \cdot \sin x)$$

ניעזר בנוסחה של סינוס של סכום, ונקבל סופית:

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} (\sin \varphi \cdot \cos x + \cos \varphi \cdot \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(\varphi + x)$$

כיוון שערך מקסימלי של סינוס שווה ל-1, ומינימלי ל-1-,

$$\triangleright \quad y_{\max} = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad y_{\min} = -\sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{נקבל תשובה סופית:}$$

דוגמה 6

מצאו את הערך המקסימלי של הפונקציה $y = \sin x \cdot \cos^3 x - \sin^3 x \cdot \cos x$.

נפתח את הביטוי: $y = \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)$

ניעזר בנוסחאות לסינוס וקוסינוס זווית כפולה: $y = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x$

נשתמש בנוסחה לסינוס זווית כפולה פעם נוספת: $y = \frac{1}{4} \sin 4x$.

$$\triangleright \quad \text{מכאן מקבלים תשובה: } y_{\max} = \frac{1}{4}$$

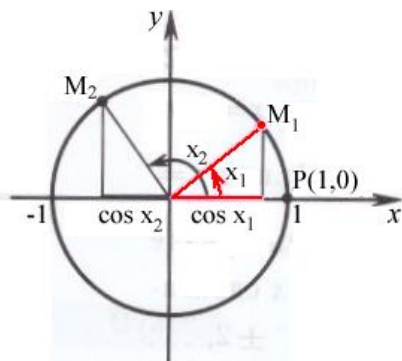
27.1 תכונות הפונקציה וגרף של $y = \cos x$

נזכירכם כי פונקציה $y = \cos x$ מוגדרת בכל ציר x , וטווח הערכים שלה הוא הקטע $[-1, 1]$. לכן גרף הפונקציה נמצא בין הישרים $y = -1$ ו- $y = 1$.

כיוון שפונקציה $y = \cos x$ מחזורית בעלת מחזור 2π , מספיק לבנות את הגרף שלה בקטע כלשהו שאורכו 2π , לדוגמה בקטע $-\pi \leq x \leq \pi$;

אזי בכל הקטעים המתקבלים מקטע זה בהזזות ל- $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ הגרף יהיה זהה.

פונקציה $y = \cos x$ היא זוגית. לכן גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר Oy , וכדי לבנות גרף בקטע $-\pi \leq x \leq \pi$ מספיק לבנות אותו בקטע $0 \leq x \leq \pi$, ולאחר מכן לשקף אותו ביחס לציר Oy .



לפני שנתחיל לבנות את הגרף נראה כי הפונקציה $y = \cos x$ יורדת בקטע $0 \leq x \leq \pi$

ברם, במהלך סיבוב הנקודה $P(1, 0)$ סביב ראשית הצירים נגד כיוון השעון לזווית מ- 0 עד π שיעור x של הנקודה כלומר, $\cos x$ הולך וקטן מ- 1 עד ל- -1 , משמע הפונקציה $y = \cos x$ יורדת בקטע $[0, \pi]$.

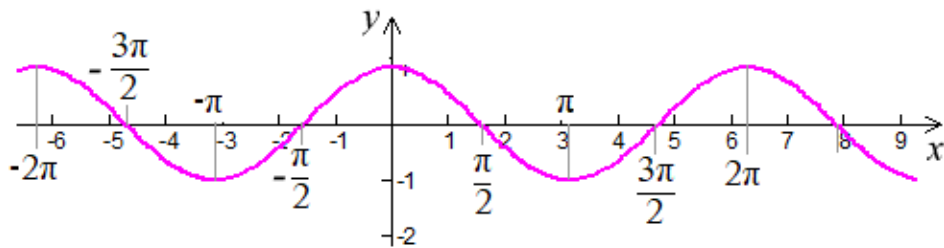
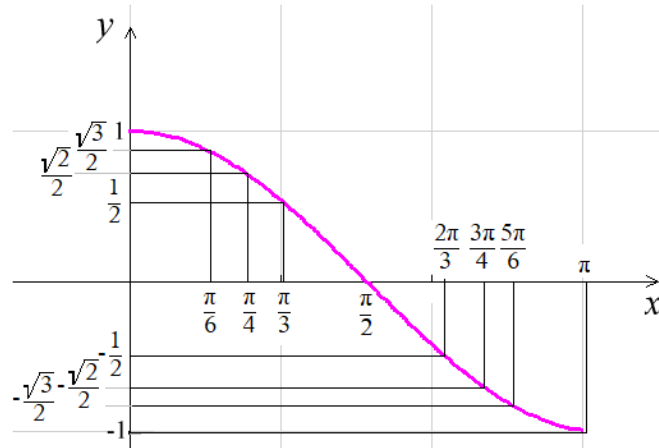
ניעזר בתכונה זו של הפונקציה, נסמן כמה נקודות של הגרף ונשרטט אותו בקטע זה. נשתמש בתכונת הזוגיות של פונקציה $y = \cos x$, ונשקף את הגרף שבנינו בקטע $[0, \pi]$ ביחס לציר Oy . כך נקבל את גרף הפונקציה בקטע $[-\pi, \pi]$.

כיוון שפונקציה $y = \cos x$ היא פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π , ובנינו גרף שלה בקטע שאורכו שווה למחזור הפונקציה, נעתיק אותו לאורך כל ציר המספרים באמצעות ההזזות ל- 2π , 4π וכו' ימינה, ו- -2π , -4π וכו' שמאלה, כלומר באופן כללי ל- $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

ובכן, הגרף הפונקציה $y = \cos x$ נבנה באופן גאומטרי על כל ציר מספרים, החל מבייית חלק ממנו בקטע $[0, \pi]$.

פונקציות טריגונומטריות

לכן, את כל תכונות הפונקציה $y = \cos x$ אפשר לקבל מחקירתה בקטע $[0, \pi]$.
 למשל: הפונקציה $y = \cos x$ עולה בקטע $[-\pi, 0]$, כיוון שהיא יורדת בקטע $[0, \pi]$,
 והיא זוגית.



תכונות עיקריות של הפונקציה $y = \cos x$:

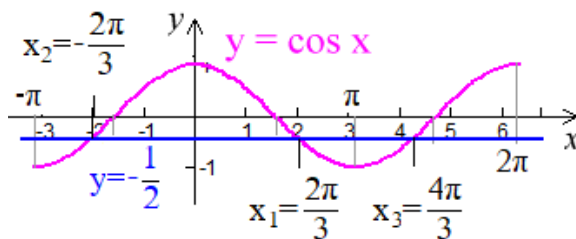
- א. תחום הגדרה – קבוצת כל מספרים ממשיים \mathbb{R} ;
- ב. תחום ערכים – קטע $[-1, 1]$;
- ג. הפונקציה מחזורית בעלת המחזור $T = 2\pi$;
- ד. פונקציה $y = \cos x$ זוגית;
- ה. ערכי הפונקציה $y = \cos x$:
 - בנקו $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - ערך מינימלי השווה ל-1 בנקודות $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - ערך מקסימלי השווה ל-1 בנקודות $x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;

פונקציות טריגונומטריות

- חיוביים בקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ובקטעים המוזזים מקטע זה ב- $2\pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$
- שליליים בקטע $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ ובקטעים המוזזים מקטע זה ב- $2\pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$
- פונקציה $y = \cos x$ גדלה בקטע $[\pi, 2\pi]$ וקטנה בקטע $[0, \pi]$ ובקטעים המוזזים מקטעים אלה ב- $2\pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

דוגמה 1

מצאו את כל פתרונות המשוואה $\cos x = -\frac{1}{2}$ בתחום $-\pi \leq x \leq 2\pi$.
 נבנה את הגרפים של פונקציות $y = \cos x$ ו- $y = -\frac{1}{2}$ בתחום זה. הגרפים נחתכים בשלוש נקודות x_1, x_2, x_3 ששיעוריהן מהווים פתרונות המשוואה.



בקטע $[0, \pi]$ פתרון המשוואה $\cos x = -\frac{1}{2}$ הוא $x_1 = \frac{2\pi}{3}$. מהגרף רואים שהנקודות x_1 ו- x_2 סימטריות ביחס לציר Oy , כלומר $x_2 = -x_1 = -\frac{2\pi}{3}$, ו- $x_3 = x_2 + 2\pi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$.
 תשובה: $x_1 = \frac{2\pi}{3}, x_2 = -\frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{4\pi}{3}$

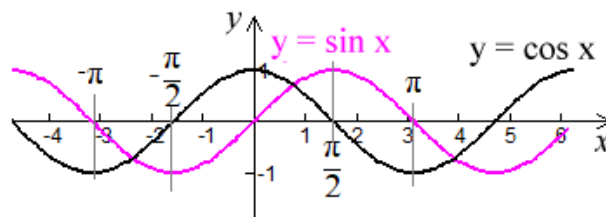
דוגמה 2

מצאו את כל הפתרונות של האי-שוויון $\cos x > -\frac{1}{2}$ בקטע $-\pi \leq x \leq 2\pi$.
 מהגרף רואים כי גרף הפונקציה $y = \cos x$ נמצא מעל גרף הפונקציה $y = -\frac{1}{2}$ בקטעים $(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ ו- $(\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$.
 תשובה: $-\frac{2\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} < x \leq 2\pi$

27.2 תכונות הפונקציה וגרף של $y = \sin x$

פונקציה $y = \sin x$ מוגדרת בכל ציר המספרים, היא אי-זוגית ובעלת מחזור $T = 2\pi$. את גרף הפונקציה אפשר לבנות באותה הדרך כמו גרף הפונקציה $y = \cos x$, החל מבנייה לדוגמה, בקטע $[0, \pi]$.

אולם פשוט יותר להיעזר בנוסחה $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, אשר אומרת כי את הגרף של $\sin x$ אפשר לקבל באמצעות הזזת הגרף של $\cos x$ לאורך ציר x ימינה ל- $\frac{\pi}{2}$.



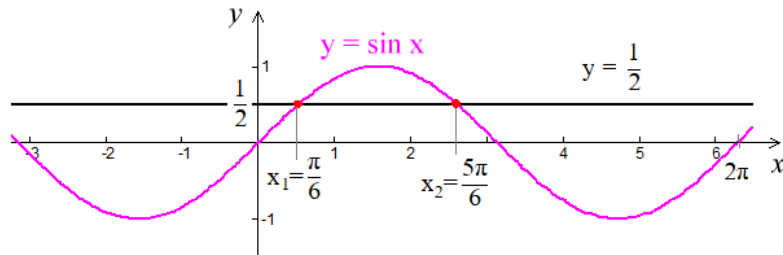
תכונות עיקריות של הפונקציה $y = \sin x$:

- ו. תחום הגדרה – קבוצת כל מספרים ממשיים \mathbb{R} ;
- ז. תחום ערכים – קטע $[-1, 1]$;
- ח. הפונקציה מחזורית בעלת המחזור $T = 2\pi$;
- ט. פונקציה $y = \sin x$ – אי-זוגית;
- י. ערכי הפונקציה $y = \sin x$:
 - בנקודות $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
 - ערך מינימלי השווה ל-1 בנקודות $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - ערך מקסימלי השווה ל-1 בנקודות $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - חיוביים בקטע $(0, \pi)$ ובקטעים המוזזים מקטע זה ב- $2\pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$;
 - שליליים בקטע $(\pi, 2\pi)$ ובקטעים המוזזים מקטע זה ב- $2\pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$;
 - פונקציה $y = \sin x$ עולה בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ויורדת בקטע $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ובקטעים המוזזים מקטעים אלה ב- $2\pi n, n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

פונקציות טריגונומטריות

דוגמה 3

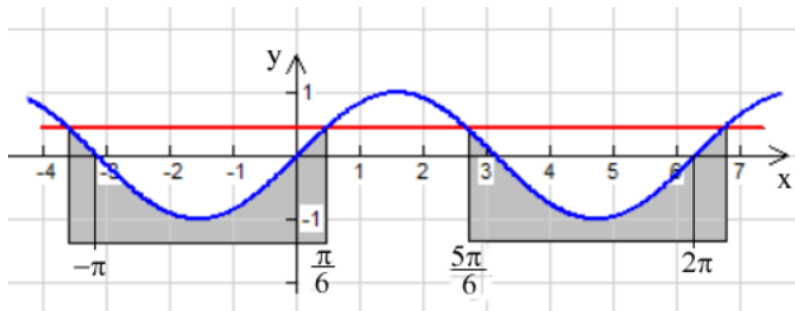
מצאו את כל פתרונות המשוואה $\sin x = \frac{1}{2}$ בתחום $-\pi \leq x \leq 2\pi$.
 נבנה את הגרפים של פונקציות $y = \sin x$ ו- $y = \frac{1}{2}$ בתחום זה. הגרפים נחתכים בשתי נקודות x_1, x_2 ששיעוריהן מהווים פתרונות המשוואה.



בקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ פתרון המשוואה $\sin x = \frac{1}{2}$ הוא $x_1 = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ (כלומר, זווית (ברדיאנים) אשר סינוס שלו ברביע הראשון שווה ל- $\frac{1}{2}$).
 הפתרון השני הוא: $x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ (כיוון ש- $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6}$).
 תשובה: $x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5\pi}{6}$

דוגמה 4

מצאו את כל הפתרונות של האי-שוויון $\sin x < \frac{1}{2}$ בתחום $-\pi \leq x \leq 2\pi$.
 מהגרף רואים כי גרף הפונקציה $y = \sin x$ נמצא מתחת לגרף הפונקציה $y = \frac{1}{2}$ בקטעים $(-\pi, \frac{\pi}{6})$ ו- $(\frac{5\pi}{6}, 2\pi]$.
 תשובה: $-\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \leq x \leq 2\pi$



פונקציות טריגונומטריות

27.3 תכונות הפונקציה וגרף של $y = \tan x$

נזכיר כי פונקציה $y = \tan x$ מוגדרת עבור ערכי x המקיימים תנאי:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}, \text{ וטווח ערכים - כל מספר ממשי: } -\infty < y < \infty.$$

כיוון שפונקציה $y = \tan x$ אי-זוגית ומחזורית בעלת מחזור π , מספיק לבנות את הגרף שלה בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$, ולאחר מכן לשקף אותו באופן סימטרי ביחס לראשית הצירים. כך יתקבל גרף בקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; לבסוף, נשתמש בתכונת המחזוריות ונשרטט גרף הפונקציה $y = \tan x$ בכל תחום הגדרתה.

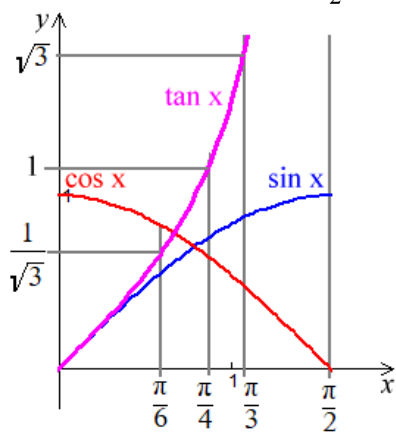
לפני שנתחיל לבנות את גרף הפונקציה $y = \tan x$ בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$ נראה כי בקטע זה הפונקציה גדלה.

נשתמש בזהות: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$ המכנה $\sin x$ עולה כלומר,

עבור שתי נקודות x_1 ו- x_2 כאלה ש- $x_2 > x_1$ מתקיים:

$$(1) \quad \sin x_2 > \sin x_1$$

$$(2) \quad \frac{1}{\cos x_2} > \frac{1}{\cos x_1} \quad \text{לכן } \cos x_2 < \cos x_1 \text{ : המכנה } \cos x \text{ יורד}$$



נכפיל את שני האי-שוויונות (מותר לעשות זאת ללא שינוי כיוון, כי כל האיברים חיוביים), ונקבל:

$\tan x_2 > \tan x_1$, כלומר, פונקציית טנגנס בתחום זה (ברביע ראשון) גדלה.

כעת אפשר לחשב כמה נקודות של גרף הפונקציה, לחבר אותן בקו רצוף, ולקבל גרף של טנגנס בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$.

כעת, נייעזר בתכונת האי-זוגיות של הפונקציה $y = \tan x$, נשקף את הגרף באופן סימטרי ביחס

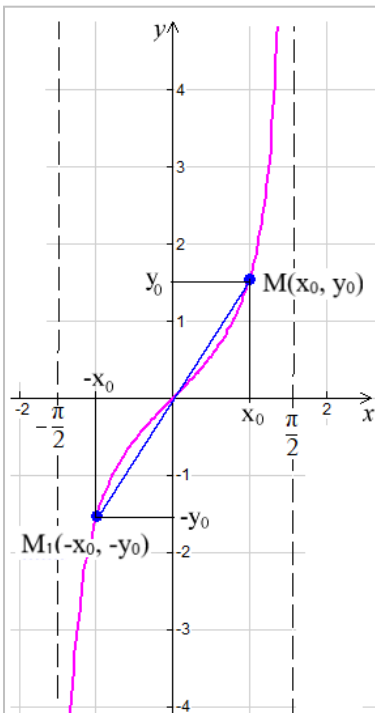
לראשית הצירים, ונקבל את גרף הפונקציה בתחום $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. נזכיר, כי פונקציית

טנגנס אינה מוגדרת בנקודות $x = \pm \frac{\pi}{2}$. אם $x < \frac{\pi}{2}$ ו- x מתקרב ל- $\frac{\pi}{2}$ אזי

$\sin x$ מתקרב ל-1, ו- $\cos x$ נשאר חיובי ושואף לאפס, לכן השבר $\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

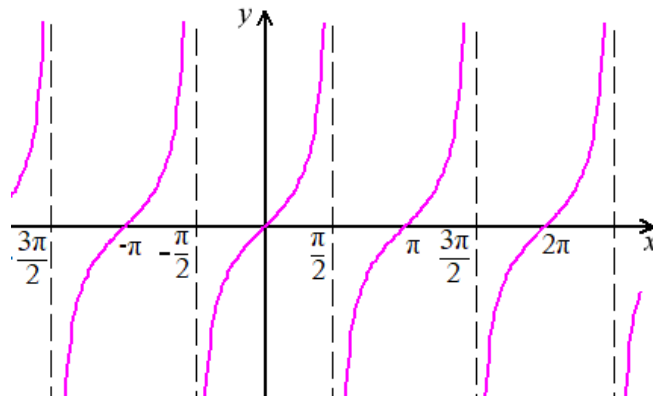
גדל עד אינסוף, וגרף הפונקציה $y = \tan x$ מתקרב לישר אנכי $x = \frac{\pi}{2}$.

פונקציות טריגונומטריות



בדומה לכך, כאשר ערכי x שליליים והם מתקרבים ל- $-\frac{\pi}{2}$, גרף הפונקציה $y = \tan x$ מתקרב לישר אנכי $x = -\frac{\pi}{2}$. ישרי אנכי כזה, אליו מתקרב גרף הפונקציה כאשר שיעורי x מתקרבים לשיעור x שבביטוי הישר נקרא אסימפטוטה אנכית. ערכי הפונקציה ליד אסימפטוטה אנכית שואפים לאינסוף ($x \rightarrow \pm\infty$).

נעבור לבניית גרף הפונקציה $y = \tan x$ בכל תחום הגדרתה. הפונקציה היא מחזורית בעלת המחזור $T = \pi$. לכן גרף הפונקציה מתקבל מהגרף שלה בקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ באמצעות העתקות לקטעים $\pi n, n \in \mathbb{Z}$ לאורך ציר x



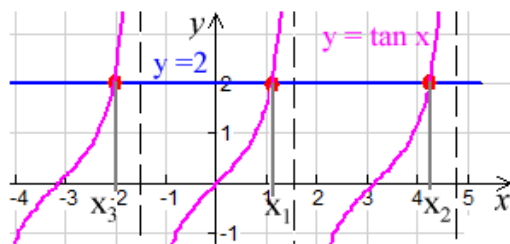
ובכן, גרף הפונקציה $y = \tan x$ נבנה על כל ציר מספרים באמצעות פעולות גאומטריות (שיקוף והעתקה) על חלק הגרף הנבנה בתחום $(0, \frac{\pi}{2})$. לכן תכונות הגרף בכל תחום הגדרת הפונקציה נובעות מתכונותיה בתחום זה, למשל: הפונקציה $y = \tan x$ עולה בקטע $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, כיוון שהיא עולה בקטע $(0, \frac{\pi}{2})$ והיא אי-זוגית.

פונקציות טריגונומטריות

- נמנה את התכונות העיקריות של הפונקציה $y = \tan x$:
- יא. תחום הגדרה – קבוצת כל מספרים ממשיים המקיימים $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$;
 - יב. תחום ערכים – כל מספרים ממשיים \mathbb{R} ;
 - יג. הפונקציה מחזורית בעלת המחזור $T = \pi$;
 - יד. פונקציה $y = \tan x$ אי-זוגית;
 - טו. ערכי הפונקציה $y = \tan x$:
 - 0 – בנקודות $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
 - חיוביים בקטעים $(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$;
 - שליליים בקטעים $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z}$;
 - פונקציה $y = \tan x$ עולה בקטעים $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$.

דוגמה 5

מצאו את כל פתרונות המשוואה $\tan x = 2$ בתחום $-\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$.
 נבנה את הגרפים של פונקציות $y = \tan x$ ו- $y = 2$ בתחום זה. הגרפים נחתכים בשלוש נקודות ששיעוריהן x_1, x_2, x_3 מהווים פתרונות המשוואה $\tan x = 2$.
 בתחום $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ פתרון המשוואה הוא $x_1 = \arctan 2$. כיוון שפונקציה $y = \tan x$ מחזורית בעלת המחזור $T = \pi$, אזי שני הפתרונות הנוספים הם:
 $x_2 = \arctan 2 + \pi$ ו- $x_3 = \arctan 2 - \pi$.



נמצא בעזרת מחשבון: $\arctan 2 = 1.11$, לכן התשובה הסופית היא:

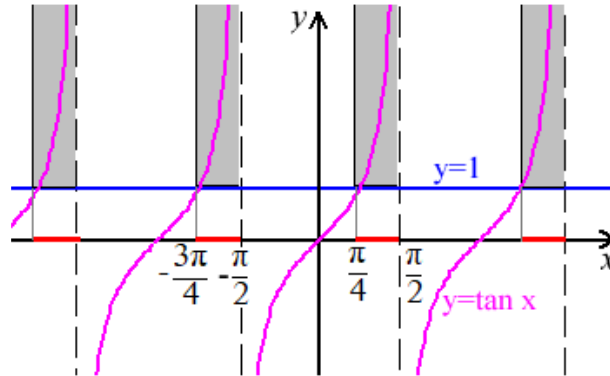
תשובה: $x_3 = -2.03, x_2 = 4.25, x_1 = 1.11$ ▷

פונקציות טריגונומטריות

דוגמה 6

מצאו את כל הפתרונות של האי-שוויון $\tan x > 1$.

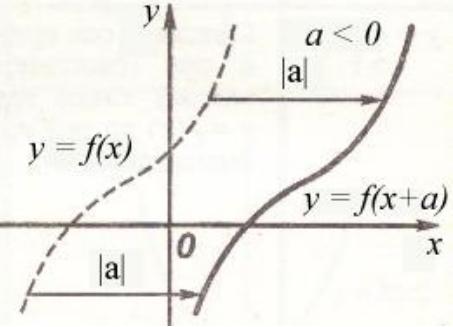
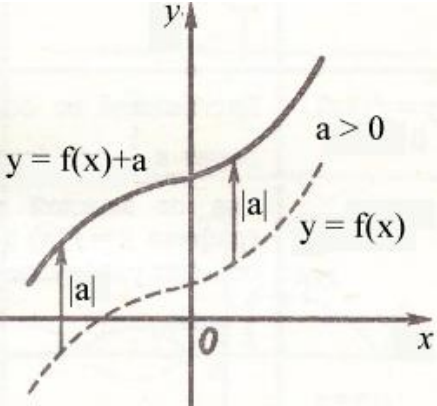
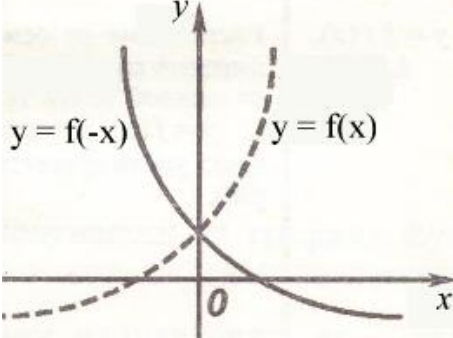
נבנה את הגרפים של שתי הפונקציות: $y = \tan x$ ו- $y = 1$.



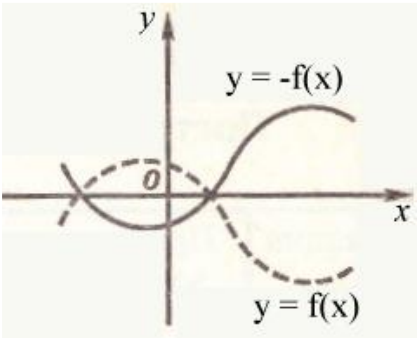
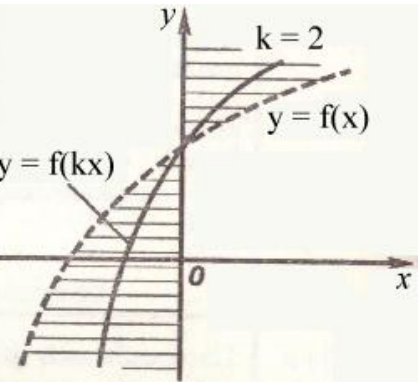
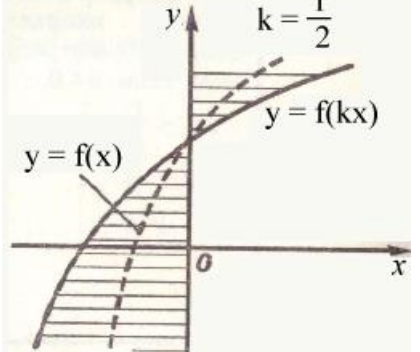
מהגרפים רואים כי גרף הפונקציה $y = \tan x$ נמצא מעל הישר $y = 1$ בקטע $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ וגם בקטעים המתקבלים בהעתקות הקטע הזה ל- $\pi, 2\pi, 3\pi, -\pi, -2\pi$ וכו'.

תשובה: $\frac{\pi}{4} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

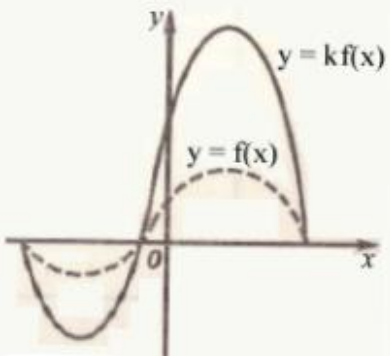
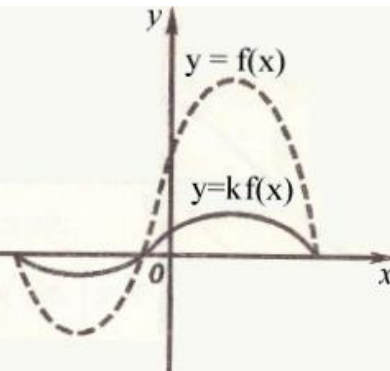
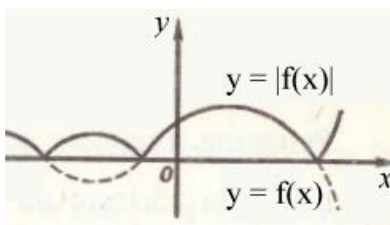
27.4 חקירת גרפים של פונקציות טריגונומטריות - סיכום

המחשה גרפית	פעולה על הגרף $y = f(x)$	פונקציה
	<p>העתקה מקבילה לאורך ציר x ל- a יחידות בכיוון חיובי אם $a < 0$, או לכיוון שלילי אם $a > 0$.</p>	$y = f(x + a)$
	<p>העתקה מקבילה לאורך ציר y ל- a יחידות בכיוון חיובי אם $a > 0$, או לכיוון שלילי אם $a < 0$.</p>	$y = f(x) + a$
	<p>שיקוף סימטרי ביחס לציר y.</p>	$y = f(-x)$

פונקציות טריגונומטריות

המחשה גרפית	פעולה על הגרף $y = f(x)$	פונקציה
	שיקוף סימטרי ביחס לציר x .	$y = -f(x)$
	כיווץ לאורך ציר x פי- k (המרחק מכל נקודת הגרף לציר y קטן פי- k)	$y = f(kx)$ $k > 1$
	מתיחה לאורך ציר x פי- $\frac{1}{k}$ (המרחק מכל נקודת הגרף לציר y גדל פי- $\frac{1}{k}$).	$y = f(kx)$ $0 < k < 1$

פונקציות טריגונומטריות

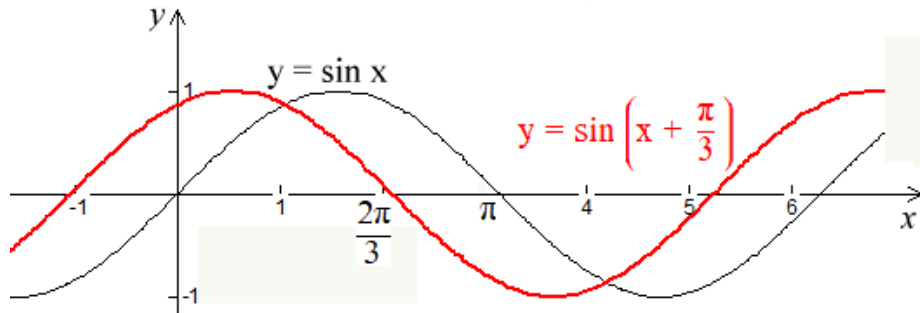
המחשה גרפית	פעולה על הגרף $y = f(x)$	פונקציה
	<p>מתיחה אנכית מציר x כלפי מעלה פי-k (המרחק מכל נקודת הגרף לציר x גדל פי-k)</p>	<p>$y = k f(x)$ $k > 1$</p>
	<p>כיווץ אנכי לכיוון ציר x פי-$\frac{1}{k}$ (המרחק מכל נקודת הגרף לציר x קטן פי-k)</p>	<p>$y = k f(x)$ $0 < k < 1$</p>
	<p>חלק מהגרף שמעל ציר x נשאר ללא שינוי; החלק שמתחת לציר x משקפים באופן סימטרי ביחס לציר x.</p>	<p>$y = f(kx)$</p>

פונקציות טריגונומטריות

ניעזר בטבלה המסכמת את הפעולות עם גרפים לצורך בניית גרפים של פונקציות טריגונומטריות:

דוגמה 7 בנו גרף הפונקציה: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

הגרף הנדרש מתקבל מהגרף הבסיסי של פונקציית סינוס: $y = \sin x$ על-ידי העתקה לאורך ציר x בכיוון שלילי ל- $\frac{\pi}{3}$ יחידות:



מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

תרגילים

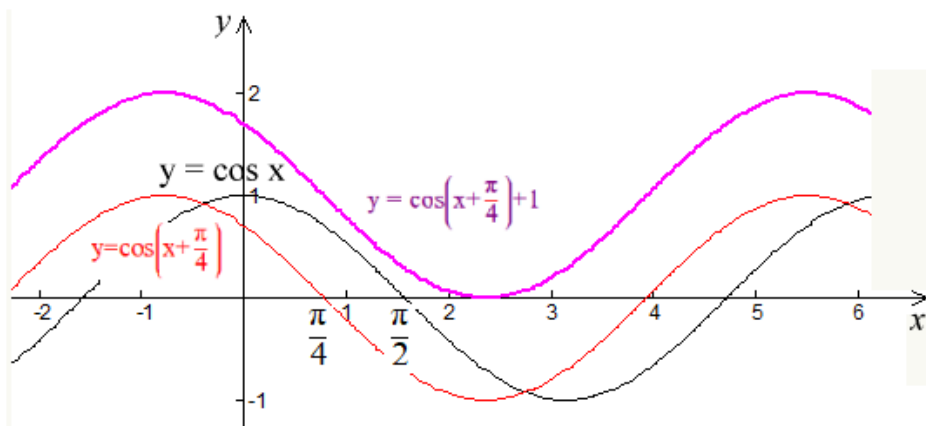
בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ב. $y = \cos(x + 1)$ ג. $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

דוגמה 8 בנו גרף הפונקציה: $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

נעתיק את הגרף הבסיסי של קוסינוס לכיוון שלילי של ציר x ל- $\frac{\pi}{4}$ יחידות.

נקבל גרף של פונקציה $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ לאחר מכן נעתיק אותו לכיוון חיובי של ציר y ליחידה 1:



פונקציות טריגונומטריות

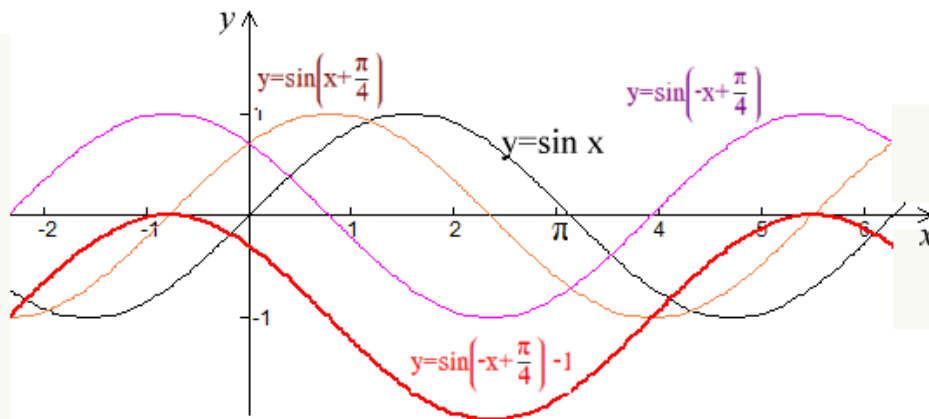
תרגילים

בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = \sin x - 1$ ב. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$ ג. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

דוגמה 9 בנו גרף הפונקציה: $y = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right) - 1$

נעתיק גרף הפונקציה $y = \sin x$ לאורך ציר x לכיוון שלילי ל- $\frac{\pi}{4}$ יחידות, ונקבל גרף הפונקציה $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ נשקף את הגרף האחרון ביחס לציר y , ונקבל גרף הפונקציה $y = \sin\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$. השלב האחרון – להעתיק את הגרף לאורך ציר y בכיוון השלילי ליחידה 1:



תרגילים

בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

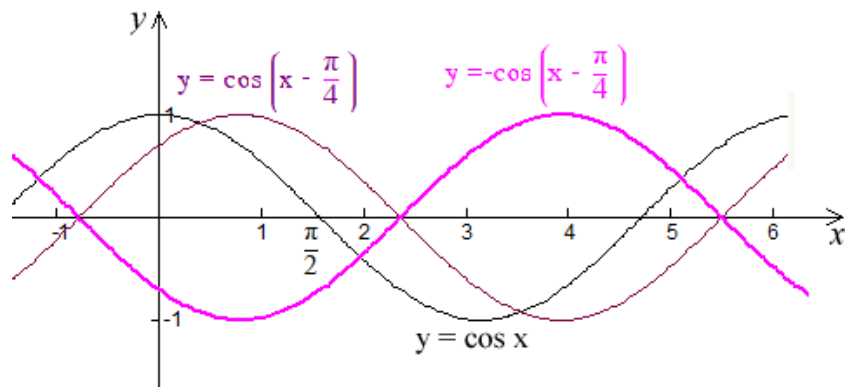
א. $y = \tan(-x)$ ב. $y = \cos\left(-x + \frac{\pi}{6}\right)$ ג. $y = \sin\left(-x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

דוגמה 10 בנו גרף הפונקציה: $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

בונים גרף הפונקציה $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ כמו שהוסבר בדוגמה 1.

לאחר מכן נשקף את הגרף שהתקבל ביחס לציר x :

פונקציות טריגונומטריות



תרגילים

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

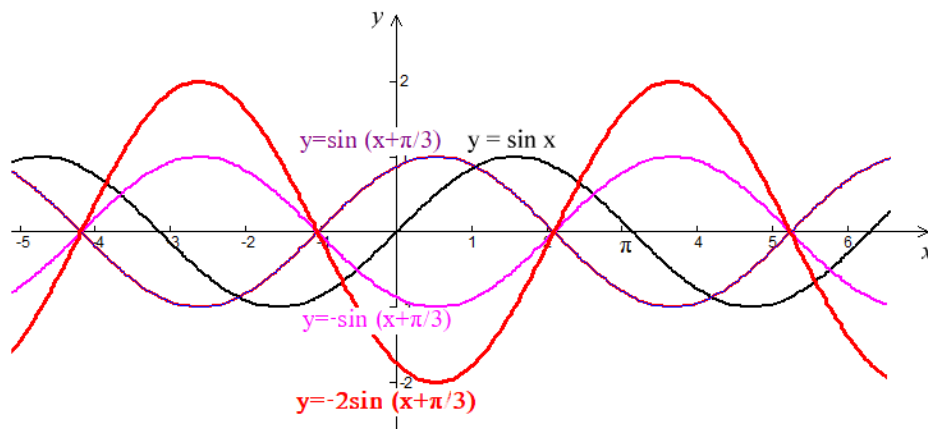
בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = -\sin(x + 1)$ ב. $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

דוגמה 11 בנו גרף הפונקציה: $y = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

השלב הראשון – העתקת הגרף הבסיסי של סינוס לאורך ציר x בכיוון השלילי ל- $\frac{\pi}{3}$ יחידות. השלב השני – שיקוף ביחס לציר x . קיבלנו גרף של פונקציה

$y = -\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. כעת נמתח את הגרף האחרון בכיוון אנכי פי-2 (נגדיל מרחקים מכל נקודת הגרף לציר x פי-2):



פונקציות טריגונומטריות

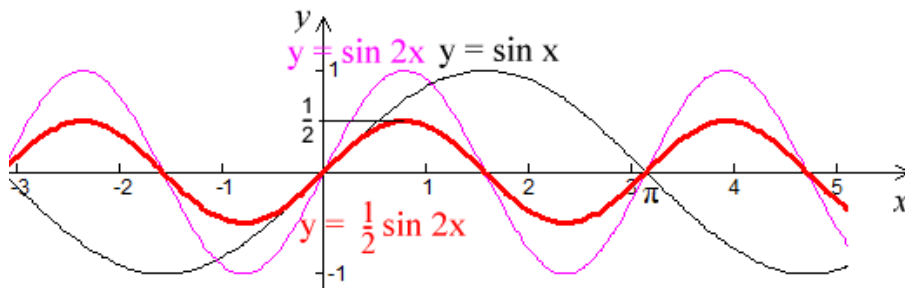
תרגילים

בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ב. $y = \frac{1}{2} \sin x$ ג. $y = -3 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

דוגמה 12 בנו גרף הפונקציה: $y = \frac{1}{2} \sin 2x$

השלב הראשון – נכוף את הגרף הבסיסי של סינוס לכיוון ציר y פי-2 כלומר, נקטין מרחק מכל נקודת גרף הפונקציה $y = \sin x$ לציר y פי-2. כך נקבל את הגרף $y = \sin 2x$. לאחר מכן נכוף את הגרף פי-2 לכיוון ציר x . כך נקבל את הגרף הנדרש:



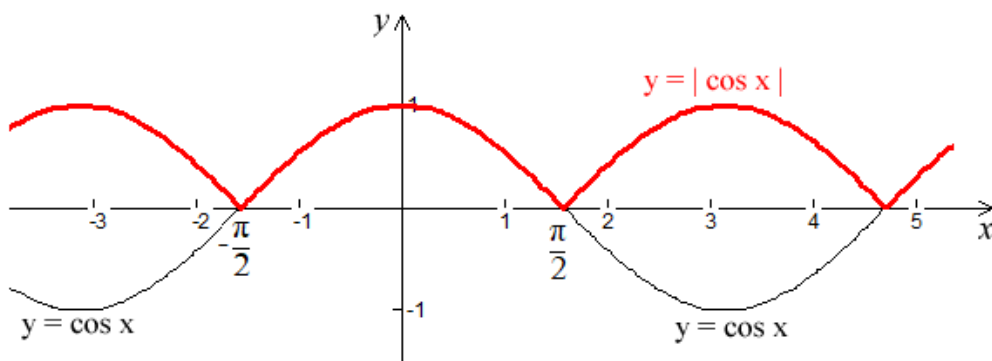
תרגילים

בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = \cos 3x$ ב. $y = -3 \sin \frac{x}{2}$ ג. $y = 2 \sin \frac{x}{3}$

דוגמה 13 בנו גרף הפונקציה: $y = |\cos x|$

חלק מהגרף $y = \cos x$ הנמצא מתחת לציר x (כלומר, עבור הערכי $y \leq 0$) נשקף סימטרי ביחס לציר x . הגרף הנדרש הוא איחוד שתי העקומות: $y = \cos x$ עבור ערכי $y \geq 0$ ו- $y = -\cos x$ עבור $y \leq 0$.



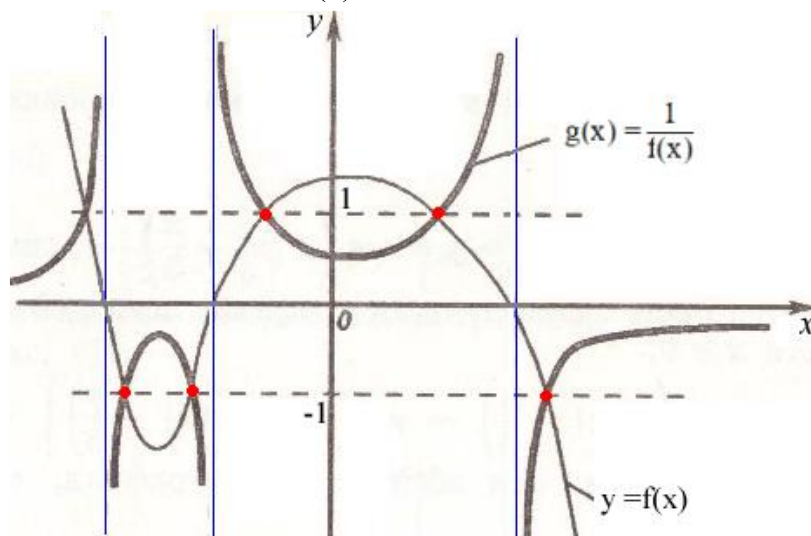
פונקציות טריגונומטריות

בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = |\sin x|$ ב. $y = |\tan x|$ ג. $y = \left| \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \right|$
 ד. $y = \left| \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right|$ ה. $y = \left| \cos x - \frac{1}{2} \right|$ ו. $y = \left| \sin x - \frac{1}{3} \right|$

דוגמה 14 נתון גרף הפונקציה $y = f(x)$.

בהסתמך על הגרף הזה בנו גרף הפונקציה: $g(x) = \frac{1}{f(x)}$



נשרטט ישירים אופקיים $y = 1$ ו- $y = -1$. דרך אותן הנקודות בהן ישר זה חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ עובר גם גרף הפונקציה $g(x)$ (כאשר $f = 1$ גם $g = \frac{1}{f} = 1$). נציין כי לשתי הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחומי חיוביות ושליליות זהים (כאשר $f > 0$ גם $g > 0$ כלומר, אם בקטע מסוים גרף $f(x)$ נמצא מעל ציר x אזי אותה התכונה לגרף $g(x)$. ברור כי בנקודות בהן $f(x)$ מתאפסת $g(x)$ אינה מוגדרת. לכן ישירים אנכיים העוברים דרך שורשי הפונקציה (נקודות האפס) הם אסימפטוטות אנכיות של הפונקציה $g(x)$.

הערה: פונקציה $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ אינה פונקציה הפוכה אליה, כמו שלמדתם בפרקים קודמים!

פונקציות טריגונומטריות

דוגמה 14

בנו גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sin x}$.

ראשית כל, נציין כי פונקציה זו מחזורית בעלת מחזור 2π .

הוכחה: $y(x+2\pi) = \frac{1}{\sin(x+2\pi)} = \frac{1}{\sin x} = y(x)$

לכן מספיק לבנות את גרף הפונקציה בקטע $[0, 2\pi]$.

נתבסס בגרף הפונקציה $y = \sin x$. בנקודות $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ו- $x_2 = -\frac{\pi}{2}$ ערכי שתי

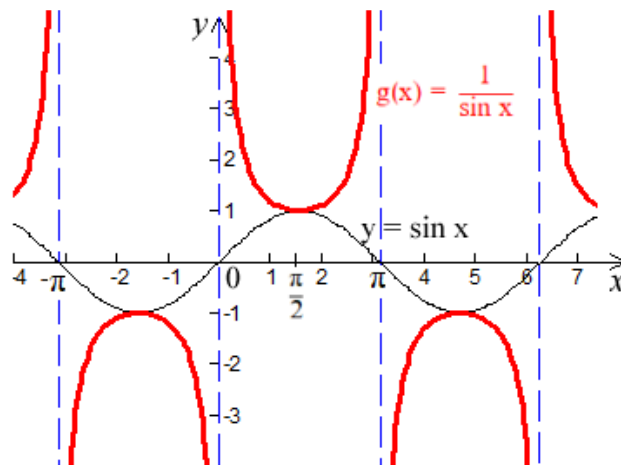
הפונקציות שווים: $\sin \frac{\pi}{2} = 1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1} = 1, \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{-1} = -1$

בקטע $[0, \pi]$ מתקיים: $\sin x \geq 0, \sin(0) = \sin(\pi) = 0$

לכן בקטע זה גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sin x}$ נמצא ברביע I, ובקצות הקטע ערכי y

שואפים לאינסוף: $y(x \rightarrow 0) \rightarrow \infty, y(x \rightarrow \pi) \rightarrow \infty$, כלומר דרך קצות הקטע הזה

עוברות אסימפטוטות אנכיות:



תרגילים

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

בנו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $y = \frac{1}{\cos x}$ ב. $y = \tan x \cdot \frac{1}{\sin x}$ ג. $y = \cot x \cdot \frac{1}{\cos x}$

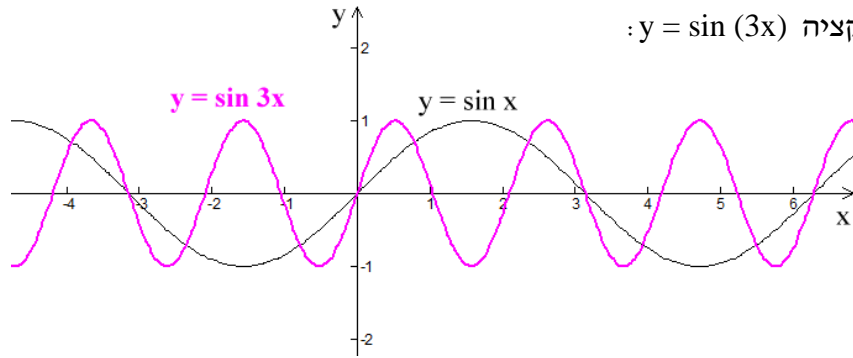
פונקציות טריגונומטריות

דוגמה מסכמת

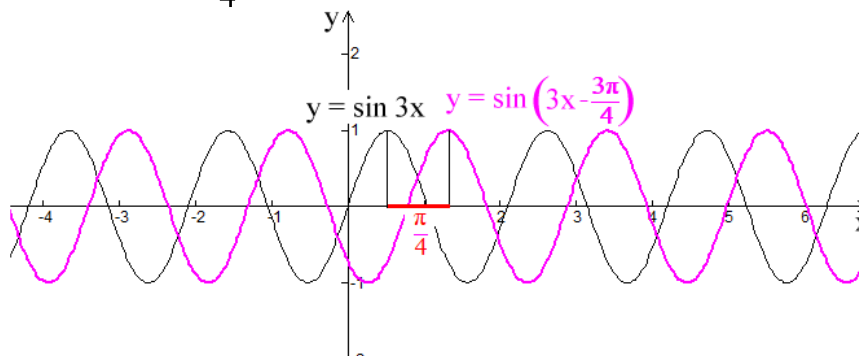
בנו סקיצת הגרף של הפונקציה $f(x) = 2 \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$.

א. משרטטים גרף של $y = \sin x$, ומקבצים אותו פי-3 לאורך ציר x. כך נקבל גרף

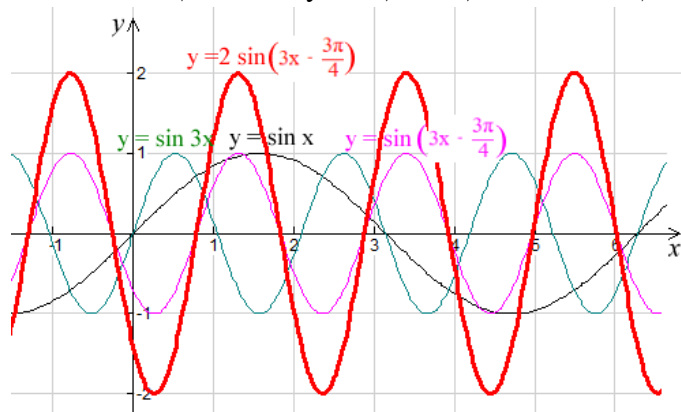
הפונקציה $y = \sin(3x)$:



ב. כיוון ש- $\sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(3\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$, גרף הפונקציה $y = \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right)$ מתקבל מהגרף של $y = \sin 3x$ על-ידי ההזזה ימינה לגודל $\frac{\pi}{4}$:



ג. השלב האחרון – מתיחת הגרף לאורך ציר y פי-2 (המקדם לפני סינוס):



פונקציות טריגונומטריות

28. מחזוריות של פונקציות טריגונומטריות מורכבות

נבדוק מחזוריות של פונקציה מורכבת מהסוג $F(x) = f(g(x))$, כאשר $g(x)$ היא פונקציה מחזורית ו- $f(x)$ אינה מחזורית.

דוגמה 1 $F(x) = f(g(x)) = (\sin x)^2$, $g(x) = \sin x$, $f(x) = x^2$

עפ"י הגדרת המחזוריות, עלינו לבדוק האם קיים T כזה שעבורו מתקיים:

$$F(x + T) = F(x) \rightarrow f(g(x + T)) = f(g(x)), T = ?$$

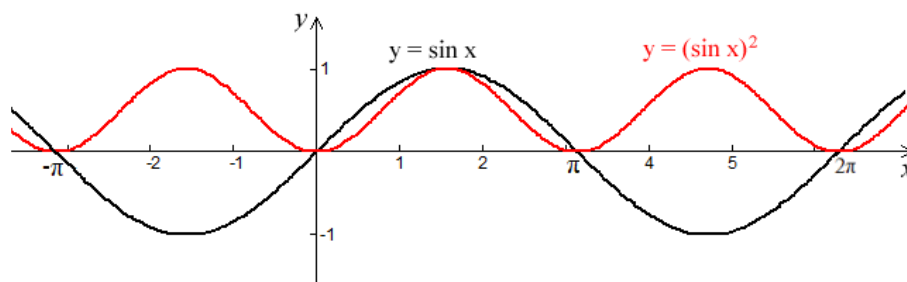
אם $g(x)$ היא מחזורית בעלת מחזור t , משמע $g(x + t) = g(x)$, אזי ברור כי $T = t$ מקיים את התנאי למחזוריות של פונקציה מורכבת:

$$F(x + t) = f(g(x + t)) = f(g(x)) = F(x)$$

כלומר, במקרה כאשר הפונקציה הפנימית בפונקציה מורכבת היא מחזורית, גם הפונקציה המורכבת היא מחזורית בעלת מחזור משותף עם הפונקציה הפנימית.

תשובה: הפונקציה $F(x) = (\sin x)^2$ היא מחזורית בעלת מחזור מינימלי $T = 2\pi$.

נתבונן בגרף של שתי הפונקציות $\sin x$ ו- $\sin^2 x$, ונודא את המסקנה:



דוגמה 2 $F(x) = f(g(x)) = \sqrt{\cos x}$, $g(x) = \cos x$, $f(x) = \sqrt{x}$

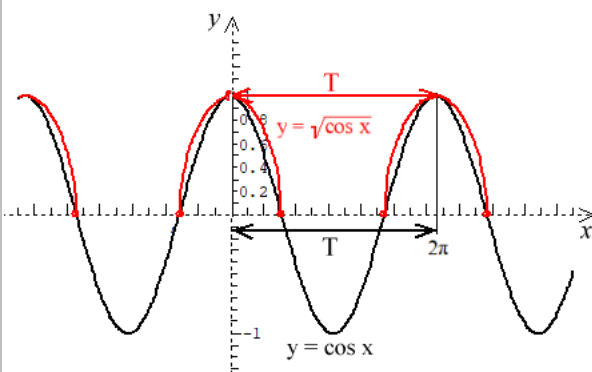
כמו בדוגמה 1, המחזור של

פונקציה חיזונית $F(x)$ נקבע על-

ידי המחזור של פונקציה פנימית:

$\cos(x + T) = \cos x$ המחזור

המינימלי $T = 2\pi$.



פונקציות טריגונומטריות

ומה קורה כאשר פונקציה פנימית $g(x)$ אינה מחזורית, ופונקציה $f(g)$ היא מחזורית?
האם פונקציה מורכבת $f(g(x))$ היא מחזורית?

נניח כי המחזור הקטן ביותר של פונקציה חיצונית f הוא T , כלומר,

$$f(g(x)+T) = f(g(x))$$

מחזור של פונקציה מורכבת $f(g(x))$ הוא המספר t כזה שעבור יתקיים:

$$f(g(x+t)) = f(g(x))$$

מהשוואת שתי השוויונות מקבלים את התנאי לקיומו של המחזור t :

$$g(x+t) = g(x) + T$$

דוגמה 3 בדקו האם פונקציה $F(x) = \sin(\sqrt{x})$ מחזורית.

מחזור הפונקציה $f(x) = \sin x$ הוא $T = 2\pi$ (תחילה נבדוק את המחזור הקטן

ביותר). עלינו לבדוק האם קיים מספר קבוע t המקיים את המשוואה

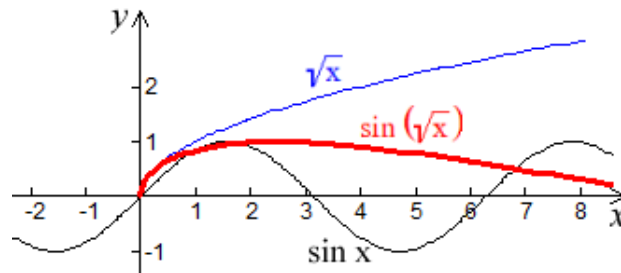
$$\sqrt{x+t} = \sqrt{x} + 2\pi$$

נפתור את המשוואה:

$$x+t = x + 4\pi\sqrt{x} + 4\pi^2, \quad t = 4\pi^2 + 4\pi\sqrt{x}$$

מצאנו כי t אינו קבוע (תלוי ב- x), לכן הפונקציה המורכבת $F(x) = \sin(\sqrt{x})$

אינה מחזורית. נוודא זאת בהתבוננות בגרף הפונקציה:



דוגמה 4 בדקו האם פונקציה $F(x) = \cos(x^2)$ מחזורית.

מחזור קטן ביותר של הפונקציה $f(x) = \cos x$ הוא $T = 2\pi$.

עלינו לבדוק האם קיים מספר קבוע t המקיים את המשוואה:

$$(x+t)^2 = x^2 + 2\pi$$

פונקציות טריגונומטריות

נפתור את המשוואה לגבי הנעלם t :

$$x^2 + 2xt + t^2 = x^2 + 2\pi, \quad t^2 + 2xt - 2\pi = 0$$

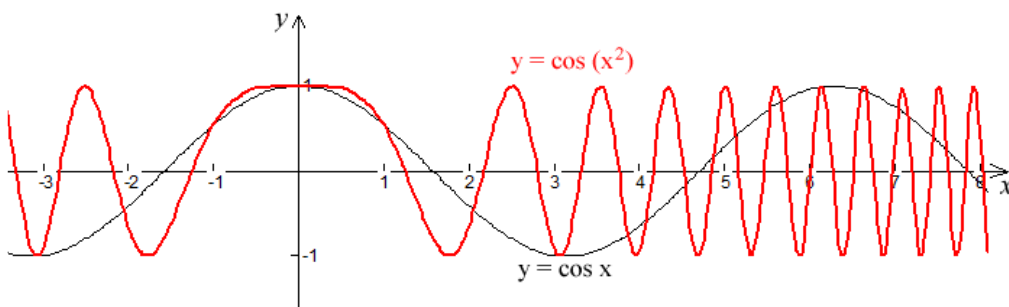
קיבלנו משוואה ריבועית, הפתרונות שלה תלויים ב- x :

$$t_{1,2} = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 8\pi}}{2} = -x \pm \sqrt{x^2 + 2\pi}$$



לכן הפונקציה $F(x) = \cos(x^2)$ אינה מחזורית.

נבדוק זאת בהתבוננות בגרף הפונקציה:



תרגילים

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

28.1 הוכיחו כי המספר T הוא מחזור הפונקציה:

א. $f(x) = \sqrt{\sin 2x - 1}$, $T = \pi$ ב. $f(x) = \cos^2 x$, $T = \pi$

ג. $f(x) = \sin^3 x$, $T = 2\pi$ ד. $f(x) = |\sin x|$, $T = \pi$

ה. $f(x) = \sin(\cos x)$, $T = 2\pi$ ו. $f(x) = \sin(\tan x)$, $T = \pi$

ז. $f(x) = \frac{3 \cos^2 x - 4 \cos x + 2}{2 \cos^2 x - 3 \cos x}$, $T = 2\pi$ ח. $f(x) = \sqrt{\cos x}$, $T = 2\pi$

28.2 הוכיחו כי הפונקציה אינה מחזורית:

א. $f(x) = x^2 - 4$ ב. $f(x) = x^3 + 8$ ג. $f(x) = x^2 + \sin x$

ד. $f(x) = x(\cos^2 x + 1)$ ה. $f(x) = x - \cos 2\pi x$ ו. $f(x) = (x - 2)(1 + \tan^2 x)$

פונקציות טריגונומטריות

28.1 מחזוריות של סכום או מכפלת פונקציות בעלות מחזור משותף

(העשרה)

יהיו $F(x)$ ו- $G(x)$ פונקציות מחזוריות בעלות מחזור T משותף, כלומר:

$$F(x + T) = F(x), G(x + T) = G(x)$$

נרכיב פונקציה חדשה $L(x)$ מהסוג:

$$L(x) = A \cdot F(x) \pm B \cdot G(x) \pm C \cdot F(x) \cdot G(x)$$

כאשר A, B ו- C הם מספרים.

נשאלת שאלה: האם $L(x)$ מחזורית?

שאלה זאת חשובה בניתוח תופעות מחזוריות בטבע – תנודות מכניות, התפשטות קול, זרם חשמלי ועוד. לדוגמה: צלילי מוזיקה בודדים מתוארים על-ידי פונקציות טריגונומטריות בסיסיות (כמו סינוס או קוסינוס), ואילו אקורדים מהווים חיבור של שניים או יותר צלילים בודדים, כלומר, חיבור של פונקציות שונות, ייתכן בעלי מחזורים שונים. אילו תוצאת החיבור לא תהיה פונקציה מחזורית – הצליל שייווצר לא יהיה נעים לאוזן, אלא צורם.

נוכיח כי פונקציה $L(x)$ גם היא מחזורית בעלת אותו המחזור T .

תחילה נבדוק מצב כאשר $C = 0$ (כלומר, פונקציה L מהווה חיבור או חיסור של שתי פונקציות F ו- G). כיוון שפונקציות F ו- G מחזוריות נקבל:

$$L(x + T) = A \cdot F(x + T) \pm B \cdot G(x + T) = A \cdot F(x) \pm B \cdot G(x) = L(x)$$

לכן גם פונקציה $L(x)$ היא מחזורית בעלת אותו מחזור T .

דוגמה 5

האם פונקציה $L(x)$ המהווה חיבור של שתי פונקציות מחזוריות $F(x) = 2\cos x$

ו- $G(x) = 3\sin x$: $L(x) = 2\cos x + 3\sin x$ היא מחזורית?

דרך I. כפי שראינו קודם, את הביטוי $y = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ אפשר להציג כסינוס

של זווית אחרת: $y = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$, כאשר זווית φ מתבטאת באמצעות a

ו- b : $\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, ולא תלויה ב- x .

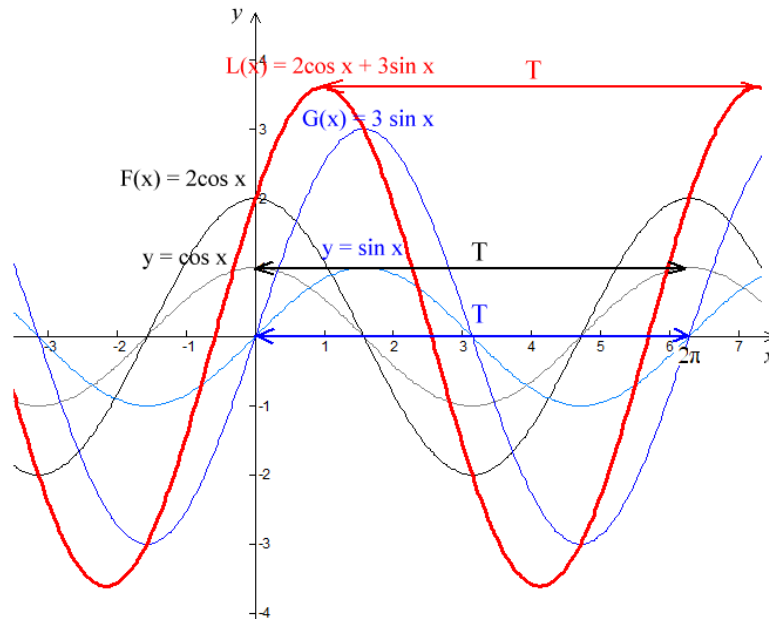
לכן מחזור הפונקציה $L(x)$ שווה למחזור הפונקציה $\sin(x + \varphi)$, כלומר 2π .

דוגמה 6 כיוון שמחזור של כל אחת מהפונקציות $F(x)$ ו- $G(x)$ הוא $T = 2\pi$,

גם פונקציה $L(x)$ היא מחזורית בעלת אותו מחזור:

$$\triangleright L(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) + 3\sin(x+2\pi) = 2\cos x + 3\sin x = L(x)$$

נוודא את המסקנה באמצעות הגרף:



המסקנה אינה משתנה אם מוסיפים לחיבור של שתי פונקציות את מכפלתן:

$$L(x) = A \cdot F(x) \pm B \cdot G(x) \pm C \cdot F(x) \cdot G(x) \quad \text{אם } \mathbf{דוגמה 6}$$

$$F(x) = 2\sin(x+1), G(x) = 5\cos(x-2), C = 3$$

נקבל עבור ערכי המחזור הקטן ביותר T של $F(x)$ ו- $G(x)$:

$$2\sin(x+1 + T) = 2\sin(x+1), x+1 + T = x+1 + 2\pi, T = 2\pi$$

$$5\cos(x-2 + T) = 5\cos(x-2), x-2 + T = x-2 + 2\pi, T = 2\pi$$

נוודא כי תוספת המכפלה אינה משפיעה על מחזוריות הפונקציה $L(x)$:

$$L(x+2\pi) =$$

$$2\cos(x+1+2\pi) + 3\sin(x-2+2\pi) + 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin(x+1+2\pi) \cdot \cos(x-2+2\pi) =$$

$$\triangleright = 2\cos(x+1) + 3\sin(x-2) + 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin(x+1) \cdot \cos(x-2) = L(x)$$

התוצאה תהיה שונה במקרה של חיבור או מכפלת פונקציות שלפחות אחת מהן אינה

מחזורית: נניח כי $L(x) = F(x) + G(x)$

כאשר $F(x)$ היא זוגית בעלת המחזור T , ו- $G(x)$ אינה מחזורית:

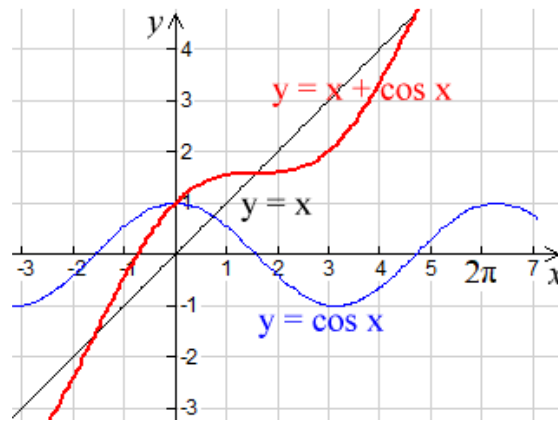
$$F(x + T) = F(x), G(x + T) \neq G(x)$$

נבדוק אם חיבור הפונקציות הוא פונקציה מחזורית או לאו:

$$L(x + T) = F(x + T) + G(x + T) = F(x) + G(x + T) \neq F(x) + G(x) = L(x)$$

כלומר, חיבור שתי פונקציות שאחת מהן מחזורית ושנייה אינה מחזורית היא פונקציה שאינה מחזורית.

נבדוק זאת על הדוגמה: $L(x) = x + \cos x$, שבה $y = x$ אינה פונקציה מחזורית:

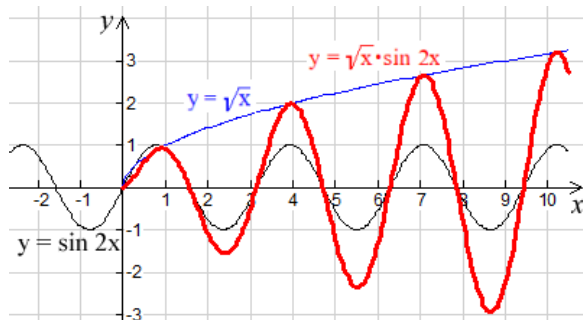


מסקנה דומה מסיקים לגבי מכפלת פונקציות שלפחות אחת מהן אינה מחזורית:

נניח כי $L(x) = F(x) \cdot G(x)$, כאשר $F(x + T) = F(x), G(x + T) \neq G(x)$

עבור פונקציית המכפלה מקבלים:

$$L(x+T) = F(x+T) \cdot G(x+T) = F(x) \cdot G(x+T) \neq F(x) \cdot G(x) = L(x)$$



דוגמה: $F(x) = \sin 2x$

פונקציות טריגונומטריות

תרגילים

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

28.3 בדקו והוכיחו כי פונקציה $L(x)$ מחזורית:

א. $L(x) = 3 \sin x + 2 \cos^2 x$

ב. $L(x) = 3 \cos x - 2 \sin^3 x$

ג. $L(x) = \frac{1}{2} \sin \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \cos \left(\frac{x}{3} - 1 \right)$

ד. $L(x) = 2 \sin (2x - \pi) \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)$

28.4 בדקו והוכיחו כי פונקציה $L(x)$ אינה מחזורית:

א. $L(x) = x^2 \cdot \cos x$

ב. $L(x) = -2x \cdot \sin x^2$

ג. $L(x) = 2x^2 - \sin \pi x$

ד. $L(x) = 2 \cos 2x + 3 \sin 3x$

29. נגזרת פונקציות טריגונומטריות

29.1 נגזרת של סינוס

נוכיח כי לפונקציית סינוס קיימת נגזרת בכל תחום הגדרתה, והיא שווה ל-

$$(1) \quad (\sin x)' = \cos x$$

נשתמש בנוסחה להפרש סינוסים:

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

ונמצא:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\sin x)}{\Delta x} &= \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2 \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \end{aligned}$$

כדי להוכיח את הנוסחה (1) מספיק להראות כי:

א. $\frac{\sin \left(\frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1$ כאשר $\Delta x \rightarrow 0$

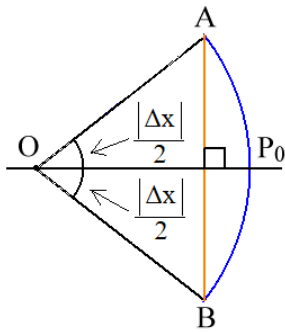
ב. $\cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \rightarrow \cos x_0$ כאשר $\Delta x \rightarrow 0$

בהתבסס על הטענות האלה אפשר לקבל את הנוסחה (1).

פונקציות טריגונומטריות

ברם, כאשר $\Delta x \rightarrow 0$ נקבל:

$$\frac{\Delta(\sin x)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \rightarrow 1 \cdot \cos x_0 = \cos x_0$$



לטענות א. ו- ב. עליהן התבססנו יש המחשה גאומטרית פשוטה: על מעגל יחידה נקצה מהנקודה P_0 לשני כיוונים קשתות P_0A ו- P_0B שאורכן $\frac{\Delta x}{2}$.

אז אורך הקשת AB שווה ל- $|\Delta x|$, ואורך המיתר AB

$$\text{שווה ל- } 2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|$$

עבור Δx קטנים אורך המיתר AB בפועל לא שונה מאורך הקשת הנשענת עליו.

לכן:

$$\frac{AB}{\cup AB} = \frac{\left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|}{\left| \frac{\Delta x}{2} \right|} = \left| \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right| \rightarrow 1, \Delta x \rightarrow 0$$

ב. נציין כי אורך המיתר AB קטן מאורך הקשת AB , כלומר

$$2 \cdot \sin \frac{|\Delta x|}{2} < 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2}$$

נשתמש בנוסחה להפרש קוסינוסים והאי-שוויון הזה ונקבל:

$$\begin{aligned} & \left| \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) - \cos x_0 \right| = \\ & = \left| -2 \sin \frac{\Delta x}{4} \cdot \sin \left(x_0 + \frac{\Delta x}{4} \right) \right| \leq \left| 2 \cdot \sin \frac{\Delta x}{4} \right| \leq \frac{|\Delta x|}{2} \\ & \text{אולם, } \frac{|\Delta x|}{2} \rightarrow 0 \text{ כאשר } \Delta x \rightarrow 0. \text{ לכן } \Delta x \rightarrow 0, \cos \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right) \rightarrow \cos x_0 \end{aligned}$$

דוגמה

עפ"י כלל הגזרה של פונקציה מורכבת מקבלים:

$$(\sin(ax + b))' = a \cdot \cos(ax + b)$$

פונקציות טריגונומטריות

29.2 נגזרת של קוסינוס, טנגנס וקוטנגנס

נוכיח את הטענות הבאות :

לפונקציות $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ קיימות נגזרות בכל תחומי הגדרתן, ומתקיימות הנוסחאות הבאות :

$$(2) \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(3) \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(4) \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

הוכחות הנוסחאות (2) ו-(3) מבוססות על השוויונות :

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

וכללי גזרה של פונקציה מורכבת :

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x$$

כדי להוכיח את הנוסחאות (3) ו-(4) נשתמש בכללי גזרת המנה של שתי פונקציות והנוסחאות לנגזרת של סינוס וקוסינוס :

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - (\cos x)' \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - (\sin x)' \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

תרגילים



מצאו נגזרת של כל פונקציה :

29.1 א. $y = 2 \sin x$ ב. $y = 1 - \frac{1}{2} \sin x$

ג. $y = -0.5 \sin x$ ד. $y = 0.5 + 1.5 \sin x$

29.2 א. $y = 3 \cos x$ ב. $y = x + 2 \cos x$

ג. $y = 1 - \cos x$ ד. $y = 2 \sin x + 1.5 \cos x$

פונקציות טריגונומטריות

29.3 א. $y = \sqrt{3} - 3 \tan x$ ב. $y = \cos x - \tan x$
 ג. $y = \frac{1}{2} \tan x$ ד. $y = 2 \tan x - \sin x$

מצאו את $f'(0)$ ו- $f'(\pi)$ אם נתון: 29.4

א. $y = \frac{1}{7} \cos(2x - \pi)$ ב. $f(x) = x - \tan(-2x)$
 ג. $y = 3 \sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$ ד. $y = 2 \cos \frac{x}{2}$

פתרו את המשוואה $f'(x) = 0$ אם נתון: 29.5

א. $y = \frac{1}{2}x + \cos x$ ב. $f(x) = x - \tan x$
 ג. $f(x) = 2 \sin x - 1$ ד. $f(x) = x - \cos x$

מצאו נגזרת של כל פונקציה:

29.6 א. $f(x) = x^3 \cdot \sin 2x$ ב. $f(x) = x^4 + \tan 2x$

 ג. $f(x) = \frac{\cos 3x}{x}$ ד. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

29.7 א. $f(x) = \sin^2 x$ ב. $f(x) = \tan x + \cot x$

 ג. $f(x) = \cos^2 x$ ד. $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

29.8 א. $f(x) = \cos 2x \cdot \sin x + \sin 2x \cdot \cos x$ ב. $f(x) = \cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}$

 ג. $f(x) = \sin 5x \cdot \sin 3x + \cos 5x \cdot \cos 3x$ ד. $f(x) = \sin 3x \cdot \cos 3x$

רשמו נוסחה פונקציה $f(x)$ אחת לפחות, המקיימת: 29.9

א. $f'(x) = 1 - \cos x$ ב. $f'(x) = 2 \cos 2x$

 ג. $f'(x) = -\cos x$ ד. $f'(x) = 3 \sin x$

תשובות

29.3 ג. $\frac{1}{2 \cos^2 x}$

29.2 ד. $2 \cos x - 1.5 \sin x$

29.5 ד. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

29.4 ד. $0; -1$

29.9 ג. למשל: $f(x) = -\sin x$

29.7 ב. $-\frac{4 \cos 2x}{\sin^2 2x}$

30. פונקציות טריגונומטריות – יישומים

פונקציות טריגונומטריות מתארות תופעות רבות שמתרחשות בטבע, לדוגמה: גלי קול, התפשטות אור, גלים על פני המים, תנודות מכניות, זרם חילופין ועוד תופעות רבות אשר תיאורן דורש טכניקה מתמטית מתקדמת ושימוש בתוכנות מחשב.

ברם, בין תופעות אלה יש תופעות אותן ניתן לתאר באמצעות פונקציות טריגונומטריות. התופעה הבסיסית ביותר אשר מהווה בסיס לכל תופעות הגלים מכונה **תנודות הרמוניות**: גדלים המשתנים לפי החוק

$$(1) \quad f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$(2) \quad f(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{או}$$

לפי חוק זה משתנה מיקום המשקולת התלויה בקפיץ לאחר שמותחים ומשחררים אותו. במקרה זה A הוא המרחק המרבי של המשקולת מנקודת שווי המשקל המכונה **משרעת** (או אמפליטודה), ω מכונה **תדירות** התנודות, ו- φ - **מופע התחלתי** (או פאזה).

נמצא את קשר בין התדירות למחזור התנודות:

על-פי הגדרת המחזור הקטן ביותר T של פונקציה נקבל:

$$f(t + T) = f(t), \quad A \cos(\omega(t + T) + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\omega(t + T) + \varphi - (\omega t + \varphi) = 2\pi, \quad \omega T = 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

הדוגמה הפשוטה ביותר של תנודות הרמוניות היא

תנועה של גוף קטן M במסלול מעגלי בעל רדיוס A . נניח כי מהירות זוויתית של הגוף קבועה, כלומר, הזווית φ בין הרדיוס OM לבין ציר x גדלה בכל שנייה בגודל קבוע ω . אם ברגע התחלתי הזווית הייתה φ , אזי כעבור t

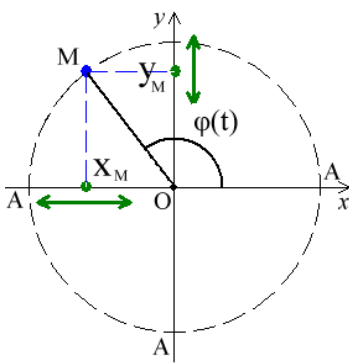
$$\text{שניות הזווית תהיה} - \varphi(t) = \angle AOM = \varphi + \omega t$$

נתבונן בתנועה של היטל הנקודה M על ציר x . על-פי ההגדרה של קוסינוס:

$$x_M = R \cos \angle AOM = A \cos(\omega t + \varphi)$$

בדומה לכך, היטל y של נקודה M נע לאורך ציר y לפי החוק:

$$y_M = R \sin \angle AOM = A \sin(\omega t + \varphi)$$



נמצא זמן מחזור T של תנועות ההיטלים x_M ו- y_M : ברור כי הוא שווה לזמן שבו נקודה M מבצעת סיבוב מלא של $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$. כיוון שזווית סיבוב הנקודה M בשנייה אחת שווה ל- $\omega \text{ rad}$, הזמן של סיבוב מלא שווה ל- $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
 כעבור זמן T מתחילת התנועה, הנקודה תתחיל סיבוב חדש, והיטלי הנקודה יתחילו לנוע בכיוון הפוך, כלומר, תנועת ההיטלים היא למעשה *תנודה*, מכאן השם תנודה הרמונית.

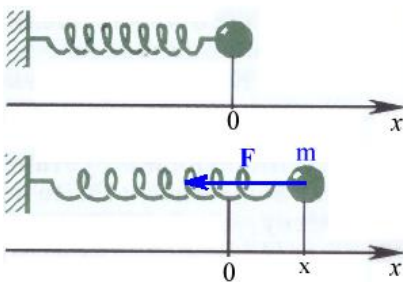
נחשב את מהירות הנקודה בתנועתה במסלול:

כיוון שהיקף המעגל שווה ל- $L = 2\pi R = 2\pi A$, ואת המרחק הזה הנקודה עוברת בזמן המחזור: $T = \frac{2\pi}{\omega}$, נקבל כי המהירות שווה ל-

$$v = \frac{2\pi A}{T} = \frac{2\pi A}{\frac{2\pi}{\omega}} = A \cdot \omega$$

כאשר $\omega = 1$, $A = 1$ ו- $\varphi = 0$, נקבל: $x_M = \cos t$, $y_M = \sin t$.

נציין, כי תנודה הרמונית יכול לבצע לא רק היטל דמיוני של מקום הגוף, אלא גם גוף אמיתי (נדנדה, מסור חשמלי, מכשירים מכניים המבצעים תנועה הלך-חזור וכ"ד)



תופעה אחרת המתוארת באמצעות פונקציות טריגונומטריות היא תנודת משקולת הקשורה לקפיץ. נניח כי משקולת שמסתה m קשורה לקצה אחד של קפיץ המונח על שולחן אופקי. הקצה השני של הקפיץ מקובע. נסמן את כיוון התנועה באמצעות ציר x , ונניח כי במצב שיווי משקל (כאשר הקפיץ

רפוי) המשקולת הייתה במקום $x = 0$.

אם מותכים או מכווצים את הקפיץ מתפתח בו כוח אלסטי בכיוון ההפוך לכיוון המתיחה, הפועל להחזרת הקפיץ למצב רפוי.

אם מידת המתיחה לא גדולה, גודל הכוח המחזיר F נמצא ביחס ישר לשינוי אורך

הקפיץ Δx : $F = -k \cdot \Delta x$

כאשר סימן מינוס מסמן את כיוון הכוח (נגד שינוי האורך). חוק זה מכונה חוק הוק.

אם כוח זה מופעל על גוף שמסתו m , הוא יתחיל לנוע בתאוצה a , אשר בהתאם לחוק שני של ניוטון תלויה בגודל הכוח ובמסת הגוף: $a = \frac{F}{m}$.

פונקציות טריגונומטריות

נזכירכם כי התאוצה a מהווה קצב שינוי המהירות, כלומר, נגזרת של מהירות בזמן:

$$a = v'(t) \text{ . אולם, המהירות } v \text{ בעצמה היא נגזרת של מרחק } x : v = x'(t) \text{ .}$$

לכן, התאוצה a שווה לנגזרת שנייה של המרחק בזמן: $a = x''(t)$.

אם ברגע $t = 0$ הגוף היה במקום $x = 0$, אזי התארכות הקפיץ ברגע t תהיה שווה למיקום שלו ברגע זה: $\Delta x = x(t)$, הכוח המחזיר יהיה $F = -k \cdot x$, ולפי החוק השני

$$\text{של ניוטון נרשום: } F(t) = m \cdot a(t) = -k \cdot x(t), \quad m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t)$$

ולבסוף מקבלים משוואה עבור מקום הגוף כפונקציה של זמן:

$$x''(t) = -\frac{k}{m} x(t)$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ : } \omega^2 \text{ כ-קבוע}$$

ונקבל משוואה המקשרת בין הנגזרת השנייה לבין הפונקציה $x(t)$ עצמה,

$$(3) \quad x''(t) = -\omega^2 \cdot x(t) \text{ : המכונה משוואה דיפרנציאלית}$$

נראה כי גודל פיזיקלי המשתנה בזמן בהתאם למשוואה זו מתאר תנודות הרמוניות: ניחוש זה מבוסס על דמיון בין תנועת המשקולת הקשורה לקפיץ לבין תנועות היטלי הנקודה המסתובבת במעגל.

נבדוק שעבור כל הקבועים A ו- φ הפונקציה $f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ מקיימת את

המשוואה (3). עפ"י כללי גזרה של פונקציה מורכבת נקבל:

$$f'(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \quad f''(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t)$$

אחת ההשלכות של פתרון המשוואה של תנודות הרמוניות היא מפתיעה למדי: כיוון שמחזור התנועה שווה ל- $T = \frac{2\pi}{\omega}$, ו- ω תלויה רק במסת המשקולת ובקבוע הקפיץ k (שמשמעו – כוח אלסטי שנוצר בקפיץ כאשר מאריכים אותו למטר אחד), ואינה תלויה ב- A (ההתארכות המקסימלית של הקפיץ), יוצא כי מחזור התנודות אינו תלוי במידת ההתארכות של קפיץ!

דוגמה אחרת של תנודות הרמוניות – תנודת המטוטלת. גם עבורה נכונה המסקנה: מחזור התנודות אינו תלוי בהתרחקות המקסימלית של מטוטלת ממצב שווי משקל!