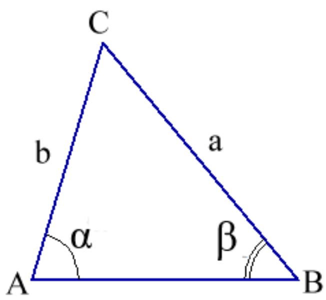
25א. יישומי טריגונומטריה בהוכחת משפטים בגאומטריה

שימוש בזהויות טריגונומטריות מאפשר לעיתים לפשט הוכחות משפטים וטענות בגיאומטריה, וגם לפתור בעיות ולרשום תוצאות באמצעות פונקציות טריגונומטריות בצורה המאפשרת בדיקה במחשב.

דוגמה 1

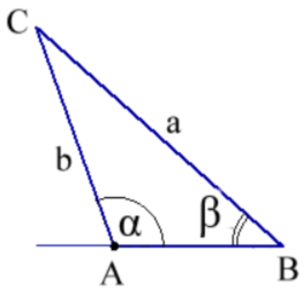
טענה: במשולש, צלע גדולה יותר נמצאת מול זווית גדולה יותר.



הוכחה. יהיו a ו- b שתי צלעות במשולש, ו- α ו- β – הזוויות ממול. נוכיח כי אם α > β, אזי a > b.

והיפך: אם a > b, אזי α > β.

אם הזוויות α ו- β חדות, אזי לפי התכונות של פונקציית סינוס: עבור α > β מתקיים: sin α > sin β. לפי משפט סינוסים: $\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}$, לכן מסיקים כי a > b.



אם זווית α כהה (שתי זוויות לא יכולות להיות כהות בו-זמנית), אזי הזווית (180° - α) – חדה וגדולה מזווית β (כזווית חיצונית במשולש, שאינה סמוכה לזווית β.

לכן: $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) > \sin\beta$.

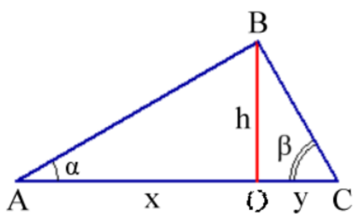
שוב מסיקים כי a > b.

נוכיח **טענה הפוכה**: נתון a > b, יש להוכיח כי α > β.

נניח כי α ≤ β. אם α = β, אזי המשולש שווה-שוקיים, ו- a = b. אם α < β, אזי לפי מה שהוכחנו, a < b. בשני המקרים קיבלנו סתירה, כיוון שהנחנו כי a > b, לכן α > β. **מ.ש.ל.**

דוגמה 2

טענה: במשולש ישר-זווית, גובה על היתר שווה לממוצע גיאומטרי של הקטעים שאותם הוא מקצה על היתר:



$$\boxed{h = \sqrt{x \cdot y}}$$

הוכחה

עפ"י ההגדרות של פונקציות טריגונומטריות במשולש ישר-זווית נרשום:

$$h = x \cdot \tan\alpha,\ h = y \cdot \tan\beta$$

כיוון שמשולש ABC הוא משולש ישר-זווית, מתקיים: $\beta = 90° - \alpha$,

לכן: $\tan\beta = \tan(90° - \alpha) = \cot\alpha$

נכפיל את שני הביטויים של h: $h^2 = x \cdot y \cdot \tan\alpha \cdot \cot$

עפ"י הגדרת הפונקציה קוטנגנס: $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$

לכן נקבל:

$$h^2 = x \cdot y \cdot \tan\alpha \cdot \frac{1}{\tan\alpha} = x \cdot y$$

$$h = \sqrt{x \cdot y}$$ **מ.ש.ל.**

דוגמה 3

נוכיח **נוסחת הרון** לשטח משולש: $\boxed{S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}}$

כאשר p הוא מחצית היקף המשולש: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

הוכחה

ניעזר בנוסחה לשטח משולש עפ"י שתי צלעות וזווית ביניהן: $S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin\gamma$

נבטא את הזווית γ עפ"י משפט קוסינוסים: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

כיוון ש- $\sin\gamma = \sqrt{1 - (\cos\gamma)^2}$, נפתח ביטוי ל- $1 - (\cos\gamma)^2$:

$$1 - (\cos\gamma)^2 = (1 - \cos\gamma) \cdot (1 + \cos\gamma) = \left(1 - \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$

$$= \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab} \cdot \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2ab} =$$

$$= \frac{(a+b+c-2a)(a+b+c-2b)}{2ab} \cdot \frac{(a+b+c-2c)(a+b+c)}{2ab} =$$

$$= \frac{(2p-2a)\cdot(2p-2b)}{2ab} \cdot \frac{(2p-2c)\cdot 2p}{2ab} = \frac{16\cdot(p-a)(p-b)\cdot(p-c)\cdot p}{4a^2b^2} =$$

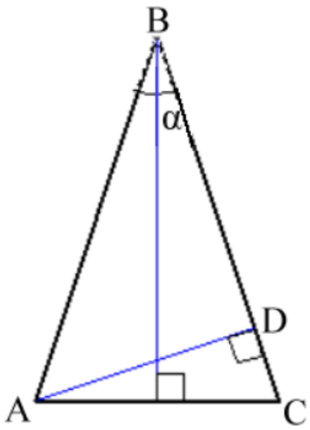
$$= \frac{4p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2}.$$

נציב בביטוי לשטח:

$$S = \frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sqrt{\frac{4p\cdot(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2}} = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$$

מ.ש.ל.

דוגמה 4



נתון: סכום שני גבהים לא שווים במשולש שווה-שוקיים שווה ל- d, זווית ראש - α.

הביעו את שוקי המשולש באמצעות d ו- α..

◀ עפ"י הנתון: $AB = BC$, $\angle B = \alpha$, $AD + BK = d$,

כאשר AD ו- BK הם הגבהים של $\triangle ABC$.

נסמן: $AB = x$.

אז מהמשולשים $\triangle ADB$ ו- $\triangle AKB$ נקבל:

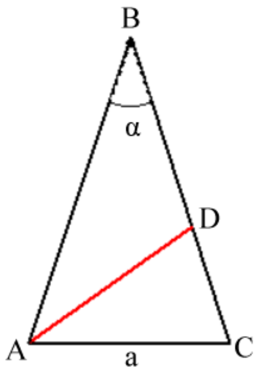
$$AD = x\cdot\sin\alpha,\ BK = x\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

מכאן נקבל תשובה:

$$x\cdot\left(\sin\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}\right) = d,$$

▷ $$x = \frac{d}{\sin\alpha + \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{\sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{d}{2\sin\frac{\pi+\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\pi-3\alpha}{4}}$$

דוגמה 5



בסיס משולש שווה-שוקיים שווה ל- a, וזיית ראש – α.

הביעו את אורך חוצה-הזווית AD באמצעות a ו- α.

עפ״י הנתון: $\angle B = \alpha$, לכן:

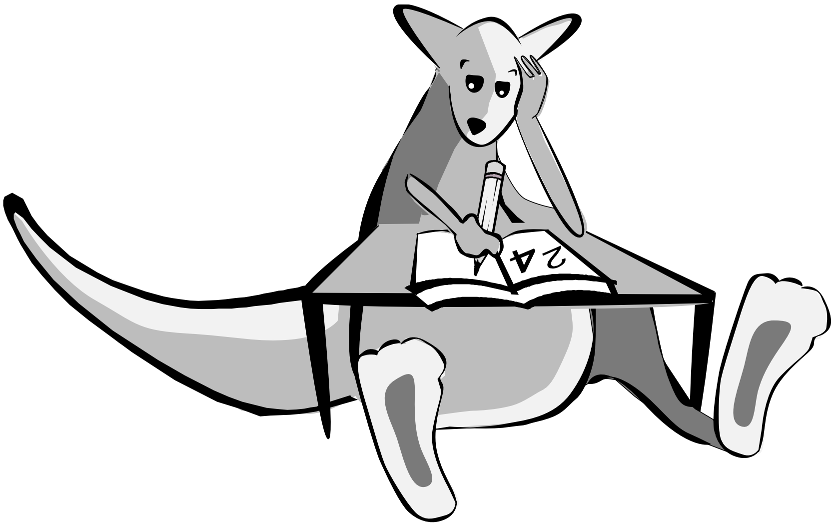
כיוון ש- AD היא חוצה-זווית A, אז $\angle DAC = 45° - \frac{\alpha}{4}$.

מכאן נקבל:

$$\angle ADC = 180° - \angle C - \angle DAC = 45° + \frac{3}{4}\alpha$$

מהמשולש $\triangle ADC$ עפ״י משפט סינוסים נקבל:

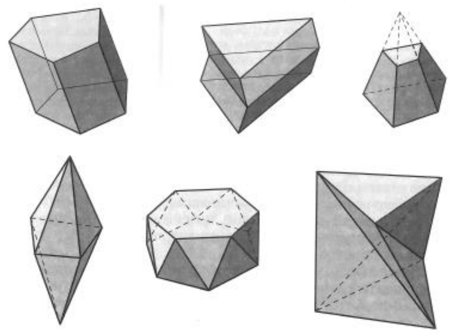
תשובה: $AD = \dfrac{a\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(45° + \frac{3}{4}\alpha\right)}$ ▷



ב25. יישומי טריגונומטריה בגיאומטריה במרחב

שימוש בנוסחאות טריגונומטריות מאפשר לחשב את הערכים המאופיינים את הגופים במרחב, כמו : מידות, שטח פנים ונפח. גופים במרחב יכולים להיות בעלי צורה תלת-ממדית כלשהי, כך שחישוב מדויק של מידותיה ברוב המקרים אינו אפשרי ; לעיתים אפשר לחלק את הגוף לגופים בעלי צורות פשוטות המאפשרות חישוב מדויק.

בין כל הגופים הפשוטים והבסיסיים ביותר הם **פאונים.**



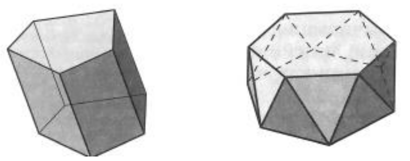
פאון הוא גוף תלת-ממדי הבנוי ממצולעים בלבד הנקראים **פאות**.

צלעות של הפאות נקראות **צלעות** של פאון (לעיתים הן נקראות **מקצועות**).

קודקודים של פאון – הקודקודים של המצולעים הבונים את הפאון.

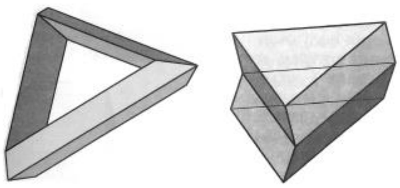
אלכסון של פאון קטע המחבר שני קודקודים שאינם על אותה פאה.

שימו לב : אלכסון של פאה (כלומר של אחד המצולעים הבונים את הפאון) אינו נחשב לאלכסון של הפאון עצמו.

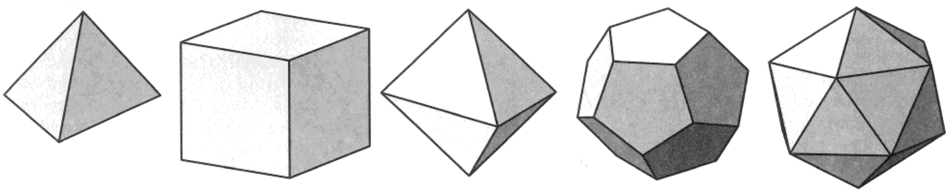


פאון קמור – פאון שכל הקטעים המחברים קודקודים נמצאים בתוכו או על פאותיו.

פאונים **לא קמורים** :



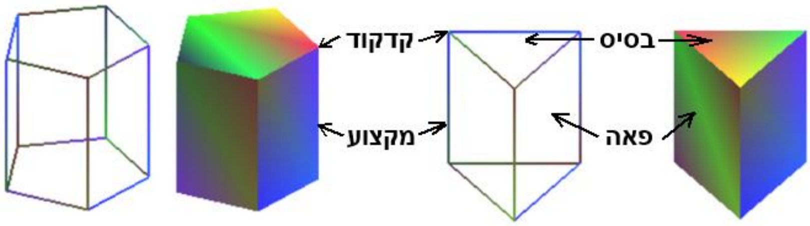
פאון משוכלל – פאון קמור שכל פאותיו הן מצולעידם משוכללים חופפים, ומספר הפאות הנפגשות בקודקוד שווה בכל הקודקודים.



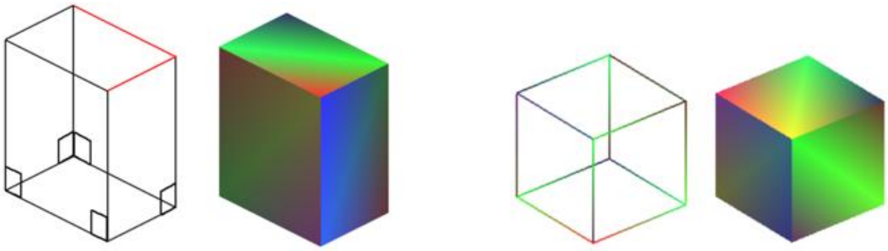
מנסרה - פאון הבנוי משני מצולעים חופפים הנקראים **בסיסים**, הנמצאים במישורים מקבילים, וצלעותיהם מקבילות בהתאמה ;

שאר פאותיו הן מקביליות המחברות בין הבסיסים, והן מהוות את **המעטפת.**

סוגי מנסרות

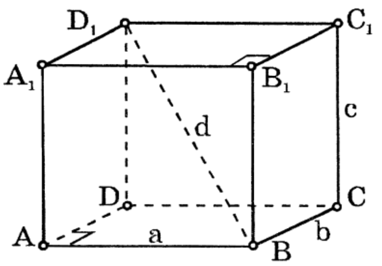


מנסרה משולשת   מנסרה מחומשת



קובייה   תיבה

תיבה – פאון שכל פאותיו הם מלבנים.



התיבה היא מקרה פרטי של מנסרה ישרה שבה הבסיסים הם מלבנים.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - מנסרה ישרה.

כאשר ABCD הוא מלבן, התיבה

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ מכונה **תיבה.**

שטח המעטפת של תיבה בעלת צלעות הבסיס a ו- b וגובה c שווה לסכום השטחים של פאות צד:

$$A = 2\times b\times c + 2\times a\times c = 2\times(b\times c + a\times c)$$

שטח פנים של תיבה שווה לסכום שטחי המעטפת ושני הבסיסים:

$$S = A + 2\times a\times b$$

נפח של תיבה זו שווה למכפלת שטח הבסיס S בגובה c:

$$V = S\times c = a\times b\times c$$

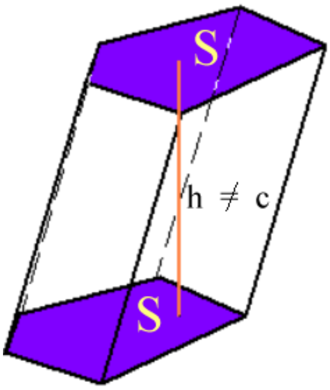
באופן דומה מחשבים את שטח המעטפת והנפח של מנסרה ישרה שבסיסיה אינם מלבנים אלא מצולעים כלשהם:

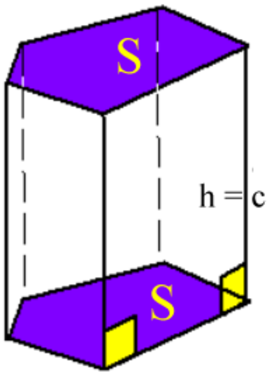
שטח המעטפת A של מנסרה שווה לסכום השטחים של כל פאות צד,

ושטח פנים של מנסרה שווה לסכום שטח המעטפת ושני הבסיסים: $A + 2\times S$.

נפח המנסרה (ישרה ולא ישרה): $V = S\times h$ כאשר h הוא גובה של מנסרה.

שימו לב: גובה של מנסרה שווה לצלע של פאת צד רק במנסרה ישרה! במקרה של מנסרה שאינה ישרה פאות הצד הן מקביליות (ולא מלבנים, כמו במנסרה ישרה), לכן הגובה במקרה זה לא שווה לאורך המקצוע (ראו שרטוט מטה).

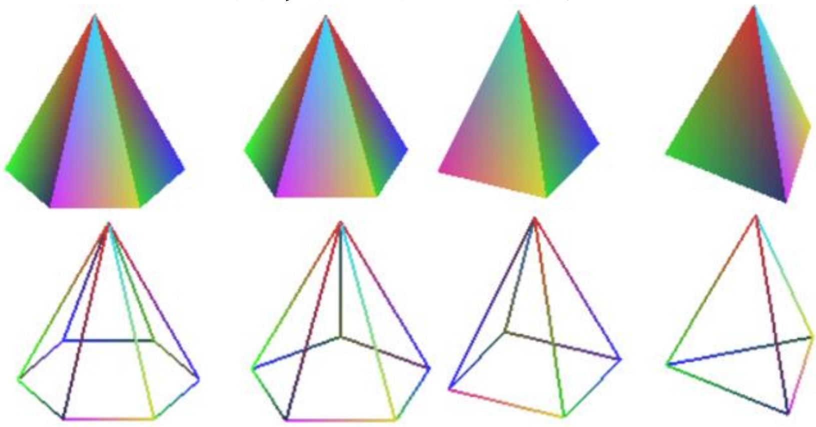




פירמידה

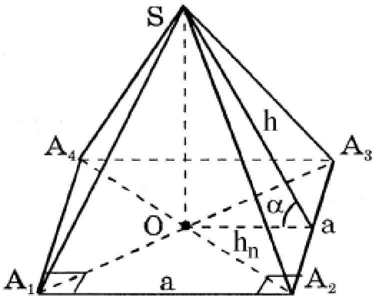
פירמידה – גוף הבנוי ממצולע (הנקרא **בסיס** הפירמידה), נקודה מחוץ למישור המצולע (הנקראת **ראש** הפירמידה), ומכל המשולשים הנוצרים על ידי הנקודה וצלעות המצולע (**מעטפת** הפירמידה).

פירמידה משוכללת – פירמידה שבסיסה – מצולע משוכלל.



פירמידה:

משולשת **מרובעת** **מחומשת** **משושה**



פירמידה ישרה – פירמידה שבה כל צלעות המעטפת שוות זו לזו.

פירמידה ישרה משוכללת: הבסיס - מצולע משוכלל, כל **הפאות** – משולשים חופפים, **הגובה** מחבר את ראש הפירמידה עם **מרכז** המצולע שבבסיס : $A_1A_2\ldots A_n$ - מצולע משוכלל, גובה SO יורד למרכז O של הבסיס, המסקנה :

הפירמידה $SA_1A_2\ldots A_n$ היא פירמידה משוכללת ישרה.

נחשב את **שטח המעטפת** של פירמידה ישרה שבבסיסה מצולע משוכלל בעל n צלעות,

כאשר אורך של צלע הבסיס – a, גובה של פעה – h, וזווית השיפוע של פאה - α.

שטח פאה אחת : $A_n = \dfrac{a\cdot h}{2}$ שטח כל הפאות : $A = n\cdot A_n = \dfrac{n\cdot a\cdot h}{2} = \dfrac{p\cdot h}{2}$

כאשר p – היקף הבסיס.

שטח פנים של פירמידה ישרה משוכללת שווה לסכום שטחי המעטפת והבסיס.

שטח הבסיס שווה לסכום השטחים של n משולשים עליהם אפשר לחלק את המצולע המשוכלל שבבסיס הפירמידה.

גובה של כל משולש שווה ל- $h_n = \dfrac{h}{\cos\alpha}$

לכן שטח של כל משולש שווה ל- $S_n = \dfrac{a\cdot h_n}{2} = \dfrac{a\cdot h}{2\cos\alpha}$

ושטח המצולע בבסיס : $S = n\cdot S_n = \dfrac{n\cdot a\cdot h}{2\cos\alpha} = \dfrac{p\cdot h}{2\cos\alpha} = \dfrac{A}{\cos\alpha}$

שטח הפנים של פירמידה ישרה שווה איפו : $A_{total} = A + \dfrac{A}{\cos\alpha}$

כאשר A הוא שטח המעטפת.

נפח הפירמידה מכל סוג שהוא - משוכללת, ישרה, או לא מיוחדת :

$$V = \frac{1}{3}S\cdot H$$

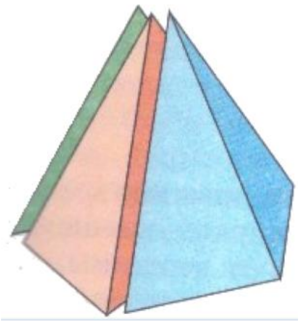
כאשר $H = SO$ הוא גובה הפירמידה ו- S - שטח הבסיס.

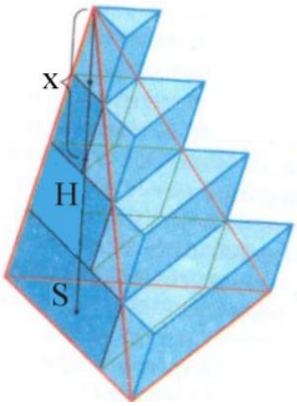
הערות

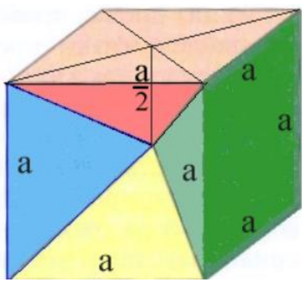
א. את ההוכחה של נוסחה זו נלמד בהמשך הקורס.

ב. גובה H לבסיס משמעו – אנך מקדקוד הפירמידה למישור הבסיס.

לסקרנים







בדומה לכך שכל מצולע אפשר לחלק למשולשים, כך גם כל פירמידה אפשר לחלק לפירמידות משולשות בעלות אותו גובה.

לכן את הנוסחה לנפח פירמידה מספיק להוכיח למקרה של פירמידה משולשת.

ברם, הוכחת הנוסחה לנפח הפירמידה כביכול הפשוטה ביותר דורשת שימוש בשיטות של חשבון אינטגרלי.

לראשונה הוכיח אותה המתמטיקאי היווני הגדול ארכימדס במאה ה- 3 לפנה"ס; ארכימדס לא ידע חשבון אינטגרלי בצורה כמו שאנו משתמשים בו היום (הוא למעשה הקדים אותו בכ- 800 שנים!). ההוכחה שלו הייתה מוצגת בספרי גיאומטריה שנים רבות, אולם עקב קושי רב (הכרוך בייצוג האינטגרל כגבול הסכום של אינסוף מחוברים אינסוף קטנים), היא מכונה "מדרגות של סטן".

אחת ההשלכות החשבות של ההוכחה היא הטענה כי מספיק להוכיח את הנוסחה לפירמידה כלשהי.

משפט זה מאפשר לאמת את הנוסחה עבור פירימידה ישרה מרובעת: מהשרטור רואים כי 6 פירמידות כאלה מרכיבות את הקובייה.

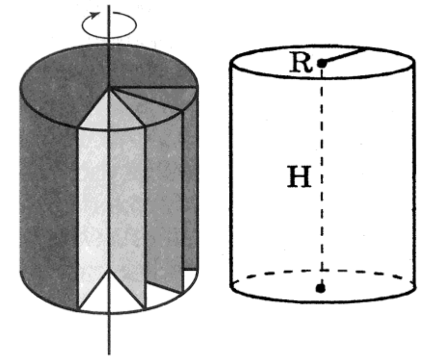
נסמן את הפח של כל פירמידה ב- V, אז אפשר לרשום עבור נפח הקובייה: $a^3 = 6V$, לכן נפח של פירמידה אחת שווה ל-

$$V = \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{3} S \cdot H$$

כאשר $S = a^2$ הוא שטח בסיס ו- $H = \frac{a}{2}$ - גובה של כל פירמידה.

גליל ישר

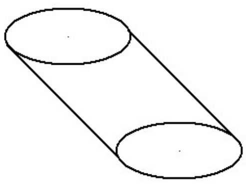
גליל - גוף המורכב משני עיגולים חופפים הנמצאים במישורים מקבילים, ומכל הקטעים המחברים עיגולים אלה.



לשני העיגולים קוראים **בסיסי הגליל.**

ניתן לתאר את הגליל כגוף הנוצר **מסיבוב של מלבן** סביב אחת מצלעותיו.

גליל ישר – גליל שבו הקטע המחבר את מרכזי הבסיסים מאונך למישורי הבסיסים.



גליל לא ישר

שטח המעטפת ונפח הגליל

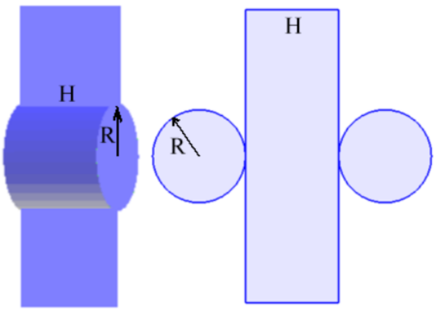
שטח המעטפת של גליל:

$$S_M = 2\pi RH$$

שטח פנים של גליל (מעטפת ובסיסים יחד):

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

הוכחה

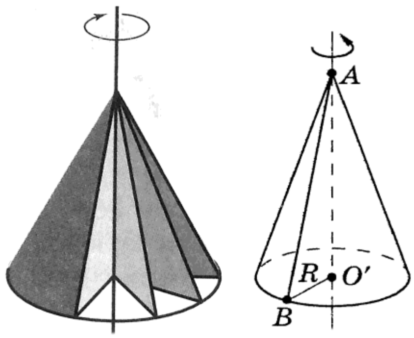


נתבונן בפריסת הגליל: היא כוללת מלבן שגובהו - גובה הגליל H ורוחבו - היקף הבסיס $2\pi R$, ושני עיגולים – בסיסי הגליל.

שטח של מעטפת של הגליל שווה לשטח המלבן, ושטח הפנים שווה לסכום שטחי המעטפת ושני הבסיסים. **מ.ש.ל.**

נפח הגליל: $V = S \cdot H = \pi R^2 H$

חרוט



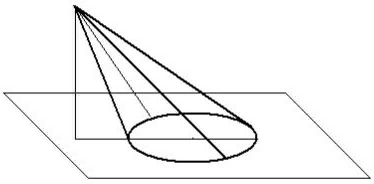
חרוט - גוף המורכב מעיגול, נקודה הנמצאת מחוץ לעיגול, וכל הקטעים המחברים את הנקודה עם נקודות העיגול.

לעיגול קוראים **בסיס** החרוט.

לנקודה קוראים **קדקוד** החרוט.

ניתן לתאר את החרוט כגוף הנוצר **מסיבוב של משולש** ישר זווית סביב אחת מנציביו.

חרוט ישר – גליל שבו הקטע המחבר את מרכזי הבסיסים מאונך למישורי הבסיסים.

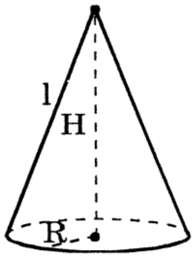


חרוט לא ישר

שטח מעטפת ונפח חרוט

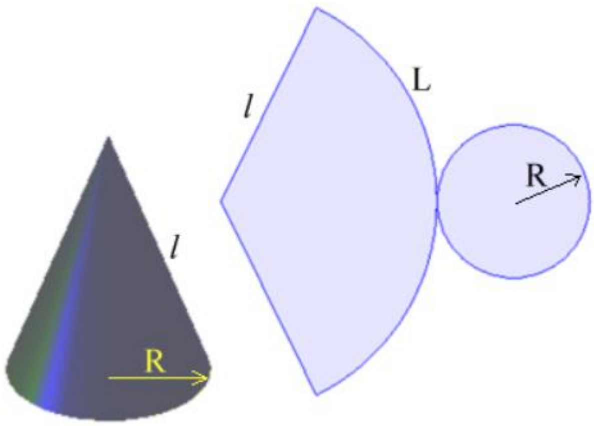
גובה של חרוט (H) – קטע שקצהו האחד בקודקוד החרוט, וקצהו האחר על מישור הבסיס, והוא מאונך למישור הבסיס.

קו יוצר של חרוט ישר (l)– קטע המחבר את קודקוד החרוט עם נקודה על היקף הבסיס.



הערה : במשולש ישר זווית ה"יוצר" את חרוט, היתר הוא קו יוצר של החרוט.

נחשב את שטח **המעטפת** של חרוט.



לצורך זה ניעזר בפריסה של חרוט. רואים כי צורת המעטפת היא גזרה מעגלית בעלת רדיוס R ואורך הקשת שווה להיקף המעגל בבסיס החרוט : $L = 2\pi R$ (אחרת הפריסה לא תתקפל לחרוט שלם).

היחס בין שטח הגזרה S_M לבין שטח עיגול בעל אותו רדיוס *l* שווה ליחס בין אורך הקשת L להיקף המעגל $2\pi l$:

$$\frac{S_M}{\pi l^2} = \frac{L}{2\pi l} = \frac{2\pi R}{2\pi l} = \frac{R}{l}$$

מכאן מקבלים את **שטח העטפת של חרוט** : $S_M = \pi R l$

נוסיף את שטח הבסיס ונקבל את **שטח פנים** של חרוט : $S = \pi R l + \pi R^2$

את הנוסחה ל**נפח חרוט** נביא ללא הוכחה:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

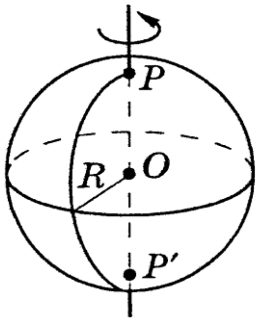
נציין את הדמיון של בין נוסחה זו לבין הנוסחה לנפח פירמידה ($V = \frac{1}{3} S \cdot H$):
את שתי הנוסחאות אפשר לפרש כשליש המכפלה של שטח בסיס וגובה.

כדור

כדור – כל נקודות המרחב שמרחקיהן מנקודה קבועה שווים זה לזה.

הנקודה הקבועה – **מרכז** הכדור.

כדור נוצר ע"י סיבוב חצי עיגול סביב קוטר PP'.



נפח ושטח פנים של כדור

שטח כדור: $S = 4\pi R^2$

נפח כדור: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

הערה

פיתוח הנוסחאות לשטח ונפח כדור מבוסס על חשבון אינטגרלי, והוא יובא בהמשך הקורס.

לסקרנים

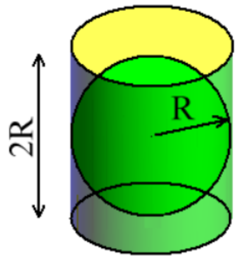
חישוב מדויק של נפח כדור סיקרן את המתמטיקאים מימי קדם (עקב השימוש בכדורי מתכת בהנדסה אזרחית ובמכונות מלחמה). תפקידו של ארכימדס היה מהנדס העיר; במסגרת תפקידו הוא תכנן ובנה מכונות רבות, ולצורך כך היה עליו לדעת משקל של כדור, שנמצא ביחס ישר לנפח.

ארכימדס השתמש בשיטה של "מדרגות הסטן" (פריסת הגוף לשכבות דקות וחיבור נפחים של כל הפרוסות שמספרם שואף לאינסוף ועובי שואף לאפס) כדי למצוא נוסחה לנפח כדור.

יחד עם הנוסחה לחישוב ישיר של נפח כדור, ארכימדס מצא קשר פשוט בין נפח כדור לנפח גליל שחוסם אותו. לצורך כך הוא השתמש ב"כלל המנוף" במכניקה אותו הוא ניסח והשתמש בו הן לבניית מכונות והן להוכחת משפטים במתמטיקה (כמו המשפט לנקודת מפגש תיכונים במשולש).

נתבונן בשרטוט: נפח הכדור בעל רדיוס R שווה

ל- $V_C = \frac{4}{3}\pi R^3$.



ונפח הגליל הוא $Vg = S \cdot H = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$.

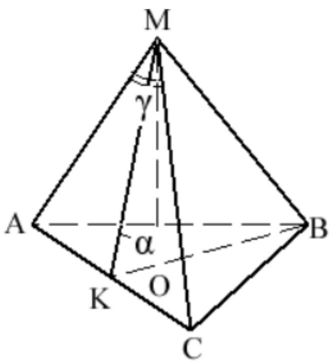
יחס הנפחים שווה איפו ל-

$$\frac{V_g}{V_c} = \frac{2\pi R^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2} = 1.5$$

נוסחה זו חרוטה עפ״י צוואתו של ארכימדס במצבה שלו בעיר סירקוז ביוון.

דוגמאות של פתרון בעיות ביישומי טריגונומטריה

דוגמה 1



מעטפת של פירמידה משוכללת ישרה גדולה פי- 5 משטח הבסיס. מצאו את זווית הקדקוד של פאת צד.

נסמן: $\angle MKO = \alpha$.

עפ״י הנתון, יחס שטח המעטפת לשטח הבסיס הוא:

$$\frac{S_M}{S_B} = \frac{1}{5} = \cos\alpha$$

נסמן את הזווית המבוקשת ב- γ: $\angle AMC = \gamma$

אז נקבל:

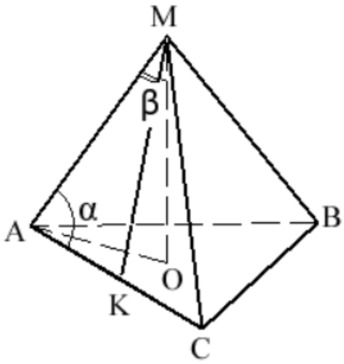
$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{KC}{MK} = \frac{\sqrt{3} \cdot OK}{MK} = \sqrt{3} \cdot \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

ובכן:

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}, \ \frac{\gamma}{2} = \arctan\frac{\sqrt{3}}{5}$$

ניעזר במחשבון ונקבל התשובה הסופית: $\gamma = 2 \cdot \arctan\frac{\sqrt{3}}{5} = 0.667$

דוגמה 2



הזווית בין מקצוע של פירמידה משולשת ישרה לצלע הבסיס היא α.

מצאו את הזווית בין המקצוע לבין גובה הפירמידה ואת תחום הערכים האפשריים של α .

נשרטט גובה MK של הפאה AMC מקדקוד הפאה.

◄ עפ״י הנתון: $\angle MAK = \alpha$. נסמן: $\angle AMO = \beta$.

כיוון שבסיס הפירמידה הוא משולש שווה-צלעות, מרכז הבסיס O נמצא בנקודת מפגש התיכונים (שהם גם חוצי זוויות של המשולש ABC), לכן אפשר לרשום:

$$\cos\alpha = \frac{AK}{AM} = \frac{\sqrt{3}\cdot AO}{2\cdot AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\beta$$

לכן:

$$\sin\beta = \frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}},\ \beta = \arcsin\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}}$$

כיוון ש-

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin\beta,\ 0 < \sin\beta < 1$$

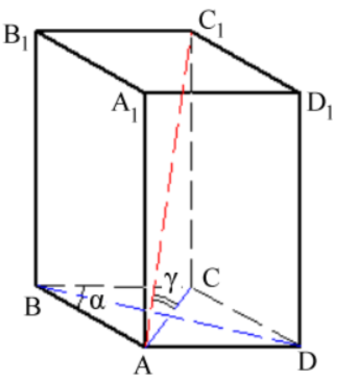
מקבלים:

$$0 < \cos\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

תשובה סופית:

$$\beta = \arcsin\frac{2\cos\alpha}{\sqrt{3}},\ \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

דוגמה 3



בסיס מנסרה ישרה הוא מקבילית שיחס צלעותיה הוא $1:2$ וזווית חדה שווה α.

גובה המנסרה שווה לאלכסון הגדול של הבסיס.

מצאו את הזווית $\angle C_1AC$ בין האלכסון הקטן של המנסרה לבין מישור הבסיס.

◄ נניח כי $AC < BD$. אז לפי הנתונים:

$BD = C_1C$,$\angle ABC = \alpha$.

כיוון ש- $AB:BC = 1:2$, אפשר לרשום: $AB = x,\ BC = 2x$.

עפ״י משפט קוסינוסים עבור המשולש ΔABC מקבלים:

$$AC^2 = x^2 + 4x^2 - 4x^2\cdot\cos\alpha = x^2(5 - 4\cos\alpha)$$

בדומה לכך:

$$BD^2 = x^2(5 + 4\cos\alpha)$$

נסמן: $\angle C_1AC = \gamma$, אז נקבל:

$$\tan\gamma = \frac{C_1C}{AC} = \sqrt{\frac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$$

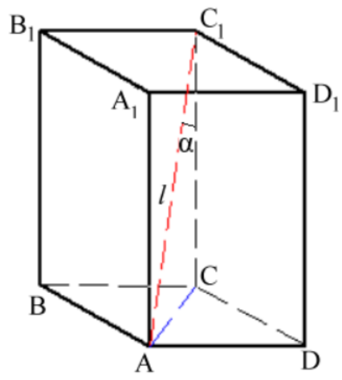
תשובה:

$$\gamma = \arctan\sqrt{\frac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$$

דוגמה 4

אורך האלכסון של תיבה ישרה שווה l, והזווית בינו לבין המקצוע היא α.

מצאו את נפח התיבה, אם היקף הבסיס שווה P.



עפ״י הנתון: $AC_1 = l,\ \angle AC_1C = \alpha$

לכן: $C_1C = l\cdot\cos\alpha,\ \ AC = l\cdot\sin\alpha$

נסמן ב- a ו- b את הצלעות של בסיס התיבה, אז עפ״י הנתון:

$$a + b = \frac{P}{2},\ \ a^2 + b^2 = l^2\sin^2\alpha$$

נמצא את שטח הבסיס:

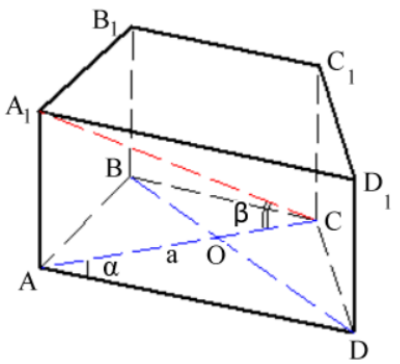
$$S = a\cdot b = \frac{1}{2}\left((a+b)^2 - (a^2+b^2)\right) =$$

$$= \frac{1}{8}\left(p^2 - 4\cdot l^2\sin^2\alpha\right)$$

נכפיל בגובה ונמצא את נפח התיבה.

תשובה: $V = \frac{1}{8}\left(P^2 - 4\cdot l^2\cdot\sin^2\alpha\right)\cdot l\cdot\cos\alpha$

דוגמה 5



בסיס של מנסרה ישרה הוא טרפז שווה-שוקיים.

אורך האלכסון של הטרפז שווה ל- a, והזווית בינו

לבין הבסיס הגדול היא α.

הזווית בין אלכסון המנסרה לבין הבסיס היא β.

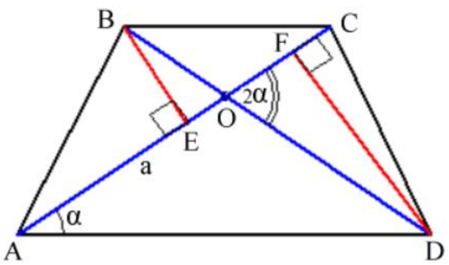
מצאו את נפח המנסרה.

נפח המנסרה שווה ל- $V = S\cdot h$.

עלינו למצוא את שטח הטרפז שבבסיס המנסרה.

עפ״י הנתון, בטרפז ABCD מתקיים:

$$AB = CD,\ AC = a,\ \angle CAD = \alpha$$



מכאן נובע: $\angle COD = 2\alpha$ (כזווית חיצונית במשולש AOD).

נחשב את שטח הטרפז:

$$S = \frac{1}{2}AC \cdot BE + \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2}AC \cdot BO \cdot \sin(2\alpha) + \frac{1}{2}AC \cdot OD \cdot \sin(2\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot \sin(2\alpha) \cdot (BO + OD) = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin(2\alpha) = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin(2\alpha)$$

שימו לב: הנוסחה לשטח טרפז שכעת פיתחנו עבור טרפז שווה-שוקיים מתקיימת עבור טרפז כלשהו:

שטח טרפז שווה למחצית המכפלה של אלכסוני הטרפז בסינוס זווית ביניהם.

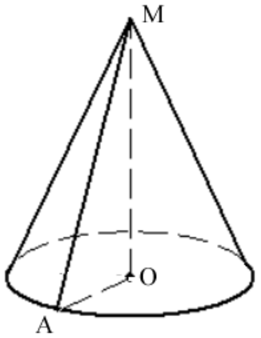
מהמשולש ישר-הזווית A_1AC שבו זווית חדה שווה ל- $\angle A_1CA = \beta$ מוצאים:

$$A_1A = a \tan \beta$$

לבסוף מציבים ומקבים תשובה:

$$V = S \cdot A_1A = \frac{a^3}{2} \cdot \sin 2\alpha \cdot \tan \beta$$

דוגמה 6



הפרש בין קו יוצר וגובה החרוט שווה ל- d, והזווית ביניהם שווה ל- α.

מצאו את נפח החרוט.

עפ"י הנתון: $AM - OM = d,\ \angle AMO = \alpha$.

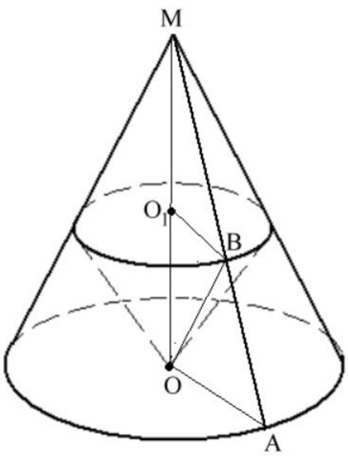
נסמן: $AO = r$,

אז: $AM = \frac{r}{\sin \alpha},\ OM = r \cdot \cot \alpha$

מכאן נקבל: $\frac{r}{\sin \alpha} - r \cdot \cot \alpha = d,\ \ r = \frac{d \cdot \sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$

תשובה סופית: $V = \frac{1}{3} \cdot \pi d^3 \cdot \left(\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}\right)^3$

דוגמה 7



בחרוט שגובהו H, הזווית בין קו יוצר וגובה שווה ל- α.

בחרוט חסום חרוט אחר כך, שהקדקוד שלו נמצא במרכז הבסיס של החרוט הראשון, וקווי היוצר של שני החרוטים מאונכים באופן הדדי.

מצאו את הנפח של החרוט החסום.

עפ"י הנתון: $MO = H,\ \angle OMA = \alpha$.

כיוון ש- $OB\perp AM,\ O_1B\perp OM$ מסיקים כי $\angle O_1BO = \angle OMA$.

מהמשולש ישר-הזווית OBM מוצאים:

$$OB = H\cdot\sin\alpha,\ O_1B = OB\cdot\cos\alpha$$

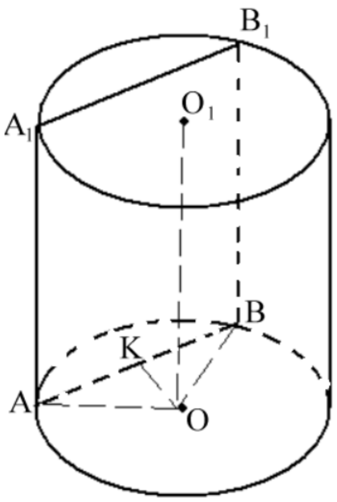
לכן נפח החרוט החסום שוו ל-

$$V = \frac{\pi}{3}\cdot(O_1B)^2\cdot O_1O =$$

$$= \frac{\pi}{3}\cdot(OB)^3\cdot(\cos\alpha)^2\cdot\sin\alpha = \frac{\pi H^3}{12}\cdot(\sin\alpha)^2\cdot(\sin 2\alpha)^2$$

תשובה סופית: $V = \dfrac{\pi H^3}{12}\cdot(\sin\alpha)^2\cdot(\sin 2\alpha)^2$

דוגמה 8



מישור המקביל לציר של גליל ישר מחלק את המעגל שבבסיס הגליל ביחס m:n.

שטח החתך שווה ל- S. מצאו את שטח מעטפת הגליל.

המיתר AB מחלק את המעגל בבסיס ביחס m:n, לכן

הזווית המרכזית $\angle AOB$ שווה ל- $\measuredangle AOB = \dfrac{2\pi n}{m+n}$

עפ"י הנתון: $AB\cdot A_1A = S$.

נעביר במשולש AOB גובה OK, אז היתר AO במשולש ישר-זווית AOK השווה לרדיוס הבסיס

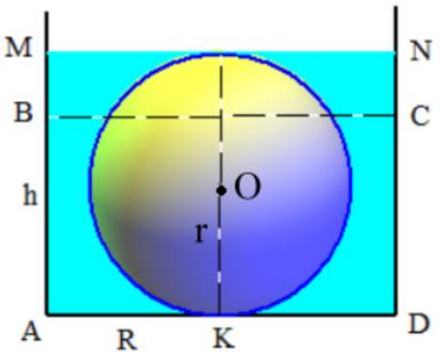
שווה ל- $AO = \dfrac{AB}{2\sin\left(\dfrac{\pi n}{m+n}\right)}$

נציב לנוסחה לשטח המעטפת של הגליל (שטח מלבן שגובהו – גובה הגלילי ואורכו – היקף הבסיס:

$$S_M = 2\pi\cdot AO\cdot A_1A = \frac{\pi\cdot AB\cdot A_1A}{\sin\left(\dfrac{\pi n}{m+n}\right)} = \frac{\pi S}{\sin\left(\dfrac{\pi n}{m+n}\right)}$$

תשובה סופית: $S_M = \dfrac{\pi S}{\sin\left(\dfrac{\pi n}{m+n}\right)}$

דוגמה 9



בתוך המכל שצורתו גליל בעל רדיוס בסיס $R = 4$ cm נמצא כדור שרדיוסו $r = 3$ cm.
המכל מלאו במים כך שמפלס המים מגיע למשטח עליון של הכדור (הכדור אינו צף).
מצאו את עובי שכבת המים שתיווצר לאחר שיוציאו את הכדור מהמכל.

◄ יהיה AMND חתך אנכי של המכל העובר דרך ציר הגליל, שבו MN – מפלס המים.
עפ״י הנתון: $AK = R = 4$ cm, $OK = r = 3$ cm.
נפח המים V במכל שווה לנפח הגליל פחות נפח הכדור:

$$V = \pi\left(2\cdot R^2\cdot r - \frac{4}{3}r^3\right) = 60\pi$$

לאחר הוצאת הכדור, מפלס המיים יירד עד לקו BC.
נסמן $AB = h$, אז $V = \pi\cdot R2\cdot h = 16\pi\cdot h = 60\pi$, מכאן: $h = 3.75$ cm.

תשובה: 3.75 cm.

תרגילים

25.1 אורכי כל הצלעות במנסרה משולשת משוכללת שווות ל- 2 ס״מ.
מצאו את שטח החתך העובר דרך צלע צד ואמצע של צלע הבסיס הנגדית.

25.2 במנסרה מרובעת משוכללת, המרחק מקדקוד הבסיס העליון לאמצע האלכסון הבסיס התחתון שווה ל- 10 ס״מ. גובה המנסרה שווה ל- 6 ס״מ.
מצאו את אורכי כל צלעות המנסרה.

25.3 במנסרה מרובעת משוכללת $ABCDA_1B_1C_1D_1$, צלע הבסיס שווה ל- 4 ס״מ, ומקצוע - $\sqrt{5}$ ס״מ.
מצאו את שטח החתך העובר דרך צלע צד AA_1 ואמצע של צלע הבסיס CD.

25.4 במנסרה משולשת משוכללת אורכו של מקצוע שווה ל- 3 ס״מ, והמרחק מקדקוד הבסיס העליון לאמצע של צלע הנגדית בבסיס תחתון שווה ל- 6 ס״מ.
מצאו את אורכי הצלעות האחרות של המנסרה.

25.5 בתיבה ישרה $ABCDA_1B_1C_1D_1$ נתון :

$$AB = 2,\ AD = 3\sqrt{2},\ \sphericalangle BAD = 45°,\ B_1D = \sqrt{19}$$

מצאו את שטח המעטפת ושטח פנים של התיבה.

25.6 בתיבה ישרה $ABCDA_1B_1C_1D_1$ נתון :

$$AD = 2,\ CD = 3,\ \angle ADC = A_1C = \sqrt{35}$$

מצאו את שטח המעטפת ושטח פנים של התיבה.

25.7 בפירמידה משולשת משוכללת צלע הבסיס שווה ל- 4 ס״מ, וגובה 6 ס״מ.
מצאו את שטח המעטפת של הפירמידה.

25.8 בפירמידה מרובעת משוכללת צלע הבסיס שווה ל- 5 ס״מ, וגובה 7 ס״מ.
מצאו את שטח המעטפת של הפירמידה.

25.9 בפירמידה מרובעת משוכללת נתונים : אורך המקצוע – ס״מ $3\sqrt{2}$
וגובה – ס״מ $\sqrt{6}$. מצאו את שטח המעטפת של הפירמידה.

25.10 בתיבה ישרה $ABCDA_1B_1C_1D_1$ נתון :

$$\angle CAD = 45°,\ \angle ADC_1 = 90°,\ AC = 8\text{ cm},\ CC_1 = 4\sqrt{2}\text{ cm}$$

מצאו את שטח המעטפת של התיבה.

25.11 רדיוס הבסיס של גליל ישר קטן פי- 3 מגובהו, ושטח המעטפת
שווה ל- 288π סמ״ר. מצאו את מידות הגליל.

25.12 שטח מעטפת של הגליל הוא כפול משטח הבסיס, ושטח פנים הוא 500π סמ״ר.
מצאו את מידות הגליל.

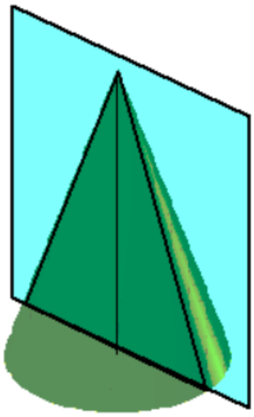
25.13 פריסת המעטפת של הגליל מהווה מלבן ABCD, שבו $AC = 4$ cm,
ו- $\angle CAD = 30°$. מצאו את שטח המעטפת אם גובה הגליל הוא CD.

25.14 פריסת המעטפת של הגליל מהווה מלבן ABCD, שבו $AC = 8$ cm,
ו- $\angle CAD = 30°$. מצאו את שטח המעטפת אם גובה הגליל הוא AD.

25.15 חתך העובר דרך ציר החרוט מהווה משולש שווה-שוקיים ישר-זווית שאורך היתר שלו שווה ל- 12 ס״מ. מצאו את שטח פנים של החרוט.

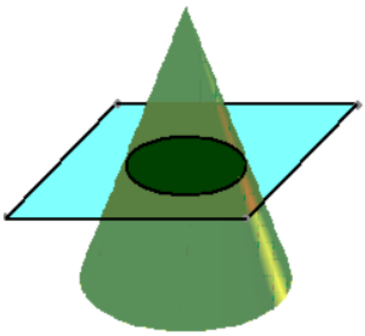
25.16 חתך החרוט העובר דרך הציר מהווה משולש שווה-שוקיים, בעל זווית קדקוד של- $120°$ וצלעות שאורן 16 ס״מ כל אחת. מצאו את שטח פנים של החרוט.

25.17 חתך החרוט העובר דרך הציר מהווה משולש ששטחו $16\sqrt{3}$ סמ"ר, ואחת מזוויותיו שווה ל- $120°$.
מצאו את שטח פנים של החרוט.

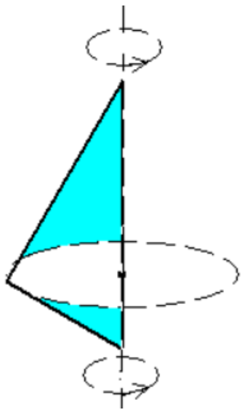


25.18 מצאו את שטח הפנים של החרוט אם נתון כי היקף החתך העובר דרך הציר שווה ל- 16 ס"מ, וזווית פריסת המעטפת היא $120°$.

25.19 מצאו את שטח הפנים של החרוט אם נתון כי שטח החתך העובר דרך הציר שווה ל- 48 סמ"ר, וזווית פריסת המעטפת היא $216°$.



25.20 מצאו, באיזה יחס מחלק את גובה החרוט מישור המקביל למישור הבסיס אם נתון, כי שטח פנים של החרוט הנחתך שווה למחצית שטח פנים של כל החרוט, ורדיוס הבסיס וקו יוצר של החרוט הגדול שווים בהתאמה ל- 2 ו- 6 ס"מ.

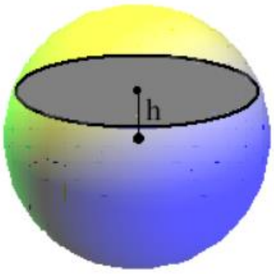


25.21 במשולש ישר-זווית אורכו של אחד מהניצבים 8 ס"מ והזווית הצמודה אליו היא $30°$.
המשולש מסתובב סביב הציר העובר דרך היתר.
מצאו את שטח המעטפת של הגוף שנוצר.

25.22 במשולש שווה-שוקים אורכה של כל שוק היא 4 ס"מ ואחת מזוויותיו היא $120°$. המשולש מסתובב סביב הציר העובר דרך הצלע הארוכה.
מצאו את שטח המעטפת של הגוף שנוצר.

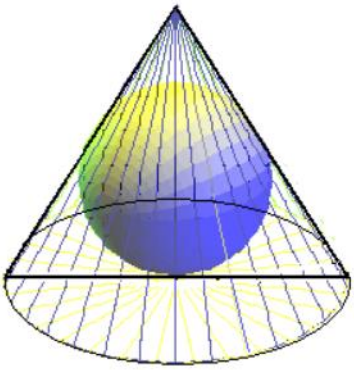
25.23 בטרפז שווה-שוקים אורכי הבסיסים הם 14 ו- 50 ס"מ והאלכסון – 40 ס"מ.
הטרפז מסתובב סביב הציר העובר דרך הבסיס הקטן.
מצאו את שטח המעטפת של הגוף שנוצר.

25.24 שטח חתך הכדור ע"י המישור המרוחק ממרכז הכדור ל- $h=12$ ס"מ הוא 25π סמ"ר. מצאו את שטח הכדור.

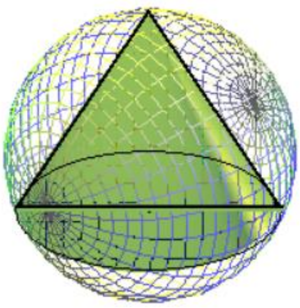


25.25 היקף חתך הכדור ע"י המישור המרוחק ממרכז הכדור ל- $h=8$ ס"מ הוא 12π ס"מ. מצאו את שטח הכדור.

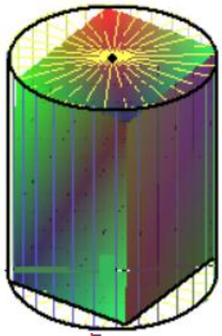
25.26 חתך החרוט העובר דרך ציר החרוט הוא משולש שווה-צלעות. אורכו של קו יוצר של החרוט – 3 ס"מ. בחורט זה חסום כדור. מצאו את שטח הפנים של הכדור.

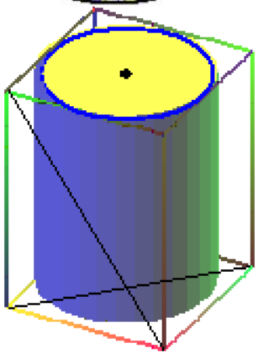


25.27 חתך החרוט העובר דרך ציר החרוט הוא משולש שווה-צלעות. החורט חסום בכדור. מצאו את שטח פנים של הכדור אם נתון כי רדיוס של בסיס החרוט שווה ל- $2\sqrt{3}$ ס"מ.



25.28 תיבה ישרה שבסיסה ריבוע חסומה בגליל.
גובה התיבה – 24 ס"מ, האלכסון של פאה – 26 ס"מ.
מצאו את שטח המעטפת של הגליל.





25.29 גליל חסום בתיבה ישרה שבסיסה ריבוע.
האלכסון של בסיס התיבה שווה ל - $4\sqrt{2}$ ס"מ,
והאלכסון של פאה – 5 ס"מ.
מצאו את שטח המעטפת של הגליל.

25.30 הבסיס במנסרה ישרה הוא משולש ישר-זווית. יחס אורכי הניצבים ומקצוע התיבה הוא 1:2:3. נפח המנסרה שווה ל- 24 סמ"ק. מצאו את שטח המעטפת של המנסרה.

25.31 הבסיס במנסרה ישרה הוא משולש ישר-זווית שבו יחס הניצבים הוא 2:3.
נפח המנסרה שווה ל- 48 סמ"ק והמקצוע – 4 ס"מ.
מצאו את שטח המעטפת של המנסרה.

25.32 לגליל וחרוט שווים רדיוסי הבסיסים והגבהים. נפח הגליל הוא 60 סמ"ק.
מצאו את נפח החרוט.

25.33 לגליל וחרוט שווים רדיוסי הבסיסים והגבהים. נפח החרוט הוא 40 סמ"ק.
מצאו את נפח הגליל.

25.34 זווית מרכזית בפריסת מעטפת החרוט שווה ל- $120°$.
גובה החרוט שווה - $4\sqrt{2}$ ס"מ. מצאו את נפח החרוט.

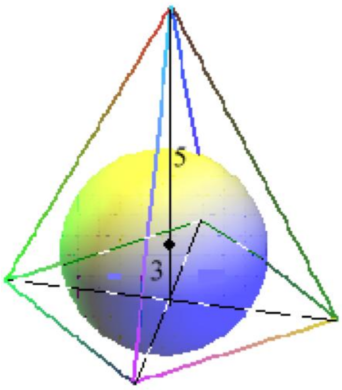
25.35 זווית מרכזית בפריסת מעטפת החרוט שווה ל- $240°$.
גובה החרוט שווה ל- $2\sqrt{5}$ ס"מ. מצאו את נפח החרוט.

25.36 את הכדור בעל נפח של 36π סמ"ק חתכו עם המישור העובר דרך מרכז הכדור.
מצאו את שטח הפנים של כל אחד משני החלקים שנוצרו.

25.37 הבסיס של תיבה ישרה הוא ריבוע בעל צלע של 6 ס"מ ;
מקצוע התיבה שווה ל- $2\sqrt{7}$ ס"מ. מצאו את נפח הכדור שחוסם את התיבה.

25.38 את הכדור חתכו עם המישור העובר דרך מרכז הכדור. שטח פנים של כל אחד משני החלקים שנוצרו שווה ל- 12π סמ"ר. מצאו את נפח הכדור.

25.39 הגליל חסום בכדור. גובה הגליל שווה ל-$2\sqrt{7}$ ס"מ, וצלע של משולש שווה-צלעות החסום בבסיס הגליל שווה ל- $3\sqrt{3}$ ס"מ.
מצאו את נפח הכדור.



25.40 כדור חסום בפירמידה מרובעת משוכללת ישרה ; מרכז
הכדור מחלק את גובה הפירמידה ביחס 5:3 מהקדקוד.
צלע בסיס הפירמידה שווה ל- 18 ס"מ.
מצאו את שטח הכדור.

25.41 כדור חסום בפירמידה משולשת משוכללת ישרה ; מרכז
הכדור מחלק את גובה הפירמידה ביחס 5:4 מהקדקוד.
צלע בסיס הפירמידה שווה $12\sqrt{3}$ ס"מ.
מצאו את שטח הכדור.

תשובות

25.7	$4(\sqrt{3}+2\sqrt{21})$ סמ"ר	25.8	$5(5+\sqrt{221})$ ס"מ
25.9	60 סמ"ר	25.10	128 סמ"ר
25.12	24π סמ"ר	25.13	$\left(\frac{6}{\pi}+4\sqrt{3}\right)$ סמ"ר
25.14	$\left(\frac{8}{\pi}+16\sqrt{3}\right)$ סמ"ר	25.15	$36\pi\cdot(\sqrt{2}+1)$ סמ"ר
25.16	$64\pi\cdot(3+2\sqrt{3})$ סמ"ר	25.17	$16\pi\cdot(3+2\sqrt{3})$ סמ"ר
25.18	$S = 16\pi$ סמ"ר	25.19	96π סמ"ר
25.20	$\frac{1}{\sqrt{2}-1}$	25.21	$\frac{32\pi(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$ סמ"ר

25.22 16π

25.23 3840π סמ״ר

25.24 676π סמ״ר

25.25 $400\,\pi$ סמ״ר

25.26 3π סמ״ר

25.27 64π סמ״ר

25.28 $240\sqrt{2}\,\pi$ סמ״ר

25.29 12π סמ״ר

25.30 $8\left(5+\sqrt{13}\right)$ סמ״ר

25.31 $12\left(3+\sqrt{5}\right)$ סמ״ר

25.32 20 סמ״ק

25.33 120 סמ״ק

25.34 $\frac{16\pi\sqrt{2}}{3}$

25.35 $\frac{32\pi\sqrt{5}}{3}$

25.36 27π סמ״ר

25.37 $\frac{500\,\pi}{3}$ סמ״ק

25.38 $\frac{256\,\pi}{3}$ סמ״ק

25.39 $\frac{32\,\pi}{3}$ סמ״ק

25.40 81π סמ״ר

25.41 16π סמ״ר