## 24.1 נוסחאות חיבור

בשנה שעברה חישבנו ערכי פונקציות טריגונומטריות של כמה זוויות מיוחדות ברביע הראשון של מערכת הצירים: $0, 30°, 45°, 60°, 90°$ וכן זוויות ברביע השני, השלישי והרביעי, אשר נבדלות מהזוויות החדות ברבע או בחצי סיבוב.

גם למדנו איך לבטא את ערכי הפונקציות של זוויות גדולות באמצעות הערכים ברביע ראשון, לדוגמה:

$$\sin(180°+\alpha) = -\sin\alpha,\ \cos(180°+\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(270°+\alpha) = -\cos\alpha,\ \cos(270°+\alpha) = \sin\alpha$$

כיצד נזכור את הנוסחאות הנ"ל:

א. הסימן באגף ימין של הנוסחה הוא הסימן של אגף שמאל (עבור זווית $\alpha$ חדה).

ב. אם באגף שמאל הזווית $C$ $90°\pm$ או $270°\pm\alpha$, אזי הסינוס הופך לקוסינוס והקוסינוס – לסינוס.

אם הזווית $180°\pm\alpha$, ההחלפה אינה מתרחשת.

כאשר הזווית $A$ גדולה מ- $360°$, מציגים אותה כסכום של זווית שלמה (או כמה זוויות שלמות) וזווית חדה, כלומר: $A = \alpha + 360°k$, $\alpha < 90°$.

ברם, שיטה זו לא מאפשר לחשב את ערכי הפונקציות עבור זוויות חדות אחרות, לדוגמה: $15°, 75°$, זוויות כהות של $105°, 165°$ ועוד.

מסתבר כי יש דרך לבטא את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות של כל זווית באמצעות זוויות אחרות, ה"מרכיבות" את הזווית הנדרשת.

לשם כך יש נוסחאות חיבור, המאפשרות לחשב פונקציות מהסוג

$\sin(\alpha\pm\beta)$ ו- $\cos(\alpha\pm\beta)$,

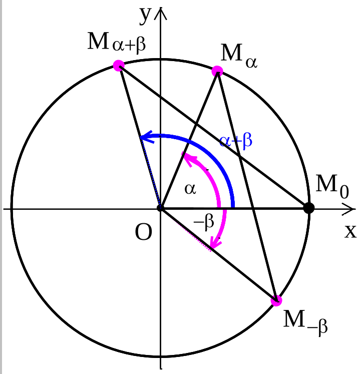
כלומר סינוס וקוסינוס של סכום או הפרש הזוויות באמצעות סינוס וקוסינוס של $\alpha$ ו- $\beta$.

**משפט**

לכל $\alpha$ ו- $\beta$ מתקיים השוויון:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

**הוכחה**




נסמן על מעגל היחידה את הנקודות $M_\alpha$, $M_{-\beta}$ ו- $M_{\alpha+\beta}$ שמתקבלות מהנקודה $M_0(1,0)$ באמצעות סיבוב לזוויות $\alpha$, $(-\beta)$ ו- $(\alpha+\beta)$ בהתאמה.

על פי ההגדרות של סינוס וקוסינוס, שיעורי הנקודות האלה הם:

$$M_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha),\ M_{-\beta}(\cos(-\beta), \sin(-\beta)),$$

$$M_{\alpha+\beta}(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)) \qquad (1)$$

כיוון ש- $\angle M_{-\beta}OM_\alpha = \angle M_0OM_{\alpha+\beta}$ מסיקים כי המשולשים שווי השוקיים $\triangle M_0OM_{\alpha+\beta}$ ו- $\triangle M_{-\beta}OM_\alpha$ חופפים, לכן שווים בסיסיהם: $M_{\alpha+\beta}M_0 = M_\alpha M_{-\beta}$.

ושווים גם ריבועי הבסיסים: $(M_\alpha M_{-\beta})^2 = (M_{\alpha+\beta}M_0)^2$.

כעת, נשתמש בנוסחת המרחק בין שתי נקודות: $AB^2 = (x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2$

ונציב במקום שיעורי הנקודות את הביטויים (1):

$$(M_\alpha M_{-\beta})^2 = (\cos\alpha - \cos(-\beta))^2 + (\sin\alpha - \sin(-\beta))^2 =$$

(נשתמש בתכונות הזוגיות של הקוסינוס והאי-זוגיות של הסינוס)

$$= (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 =$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\sin\beta + \sin^2\beta =$$

(נשתמש בזהות הטריגונומטרית הבסיסית)

$$= 2 + 2\sin\alpha\cdot\sin\beta - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta. \qquad (2)$$

באופן דומה נפתח את אורך הבסיס השני:

$$(M_{\alpha+\beta}M_0)^2 = (\cos(\alpha+\beta) - 1)^2 + (\sin(\alpha+\beta) - 0)^2 =$$

$$= \cos^2(\alpha+\beta) - 2\cos(\alpha+\beta) + 1 + \sin^2(\alpha+\beta) =$$

(נשתמש בזהות הטריגונומטרית הבסיסית)

$$= 2 - 2\cos(\alpha+\beta). \qquad (3)$$

נשווה את (2) ו- (3) ונקבל את המבוקש:

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad (I)$$

**דוגמה 1** חשבו את $\cos 75°$.

◀ נשתמש בנוסחה של קוסינוס של סכום:

$$\cos 75° = \cos(45°+30°) = \cos 45°\cos 30° - \sin 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

נציב בנוסחה (I) את $(-\beta)$ במקום $\beta$ ונקבל את הנוסחה ל**קוסינוס של הפרש**:

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos(-\beta) - \sin\alpha\cdot\sin(-\beta)$$

ניעזר בתכונה של **זוגיות** של קוסינוס **ואי-זוגיות** של סינוס ונקבל סופית:

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta} \qquad \text{(II)}$$

**דוגמה 2** חשבו את $\cos 15°$.

◀ נשתמש בנוסחה של קוסינוס של הפרש:

$$\cos 15° = \cos(45°-30°) = \cos 45°\cos 30° + \sin 45°\sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

**דוגמה 3**

הוכיחו את הנוסחאות:

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha,\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha} \qquad \text{(III)}$$

**הוכחה**

נציב בנוסחה (II) את $\alpha = \frac{\pi}{2}$ במקום $\alpha$ ונקבל:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\beta = \sin\beta$$

נחליף את $\beta$ ל- $\alpha$ ונקבל: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\alpha$.

נחליף את סדר האגפים: $\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ ונציב במקום $\alpha$ את $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = \cos\alpha$$

ניעזר בנוסחאות (I) – (III) ונפתח את נוסחת החיבור לסינוס:

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\beta=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\text{(IV)}\qquad \boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

נציב בנוסחה זאת את (-β)במקום β ונקבל את הנוסחה לסינוס ההפרש:

$$\text{(V)}\qquad \boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}$$

**דוגמה 4**

חשבו את $\sin 210°$.

◀ נשתמש בנוסחה לסינוס של סכום:

$$\sin 210°=\sin(180°+30°)=\sin 180°\cdot\cos 30°+\cos 180°\cdot\sin 30°=$$

$$=0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+(-1)\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

**דוגמה 5**

חשבו את ערך הביטוי: $\sin\frac{8\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{8\pi}{7}$

◀ בביטוי הנתון אפשר לזהות את האגף הימין של הנוסחה לסינוס ההפרש:

$$\sin\frac{8\pi}{7}\cdot\cos\frac{\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{8\pi}{7}=\sin\left(\frac{8\pi}{7}-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\pi=0$$

**הערה** באופן דומה אפשר לבטא את הנוסחה לטנגנס של סכום או הפרש זוויות:

**דוגמה 6***

הוכיחו את השוויון:

$$\text{(VI)}\qquad \boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

◀ $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

נחלק את המונה ואת המכנה של השבר במכפלה $\cos\alpha\cdot\cos\beta$ ונקבל את המבוקש:

$$\frac{\sin\alpha\bullet\cos\beta+\cos\alpha\bullet\sin\beta}{\cos\alpha\bullet\cos\beta-\sin\alpha\bullet\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\bullet\cos\beta}{\frac{\cos\alpha\bullet\cos\beta-\sin\alpha\bullet\sin\beta}{\cos\alpha\bullet\cos\beta}}=$$

$$\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha\bullet\sin\beta}{\cos\alpha\bullet\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\bullet\tan\beta}$$

נוסחה (VI) יכולה לעזור בחישובי טנגנס של זוויות גדולות, לדוגמה:

$$\tan 225^\circ=\tan(180^\circ+45^\circ)=\frac{\tan 180^\circ+\tan 45^\circ}{1-\tan 180^\circ\bullet\tan 45^\circ}=1$$

## תרגילים

.24.1 חשבן בעזרת נוסחאות חיבור:

א. $\cos 135^\circ$ ב. $\cos 120^\circ$ ג. $\cos 150^\circ$ ד. $\cos 240^\circ$

.24.2 חשבו:

א. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$, אם נתון: $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ ו- $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

ב. $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, אם $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ ו- $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

.24.3 פשטו את הביטוי:

א. $\cos 3\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\sin 3\alpha$ ב. $\cos 5\beta\cdot\cos 2\beta+\sin 5\beta\cdot\sin 2\beta$

ג. $\cos\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\bullet\cos\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{7}+\alpha\right)\bullet\sin\left(\frac{5\pi}{14}-\alpha\right)$

ד. $\cos\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\bullet\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)\bullet\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\alpha\right)$

.24.4 חשבו ללא מחשבון:

א. $\sin 73^\circ\cdot\cos 17^\circ+\cos 73^\circ\cdot\sin 17^\circ$

ב. $\sin 73^\circ\cdot\cos 17^\circ-\cos 73^\circ\cdot\sin 17^\circ$

ג. $\sin\frac{5\pi}{12}\bullet\cos\frac{\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}\bullet\cos\frac{5\pi}{12}$ ד. $\sin\frac{7\pi}{12}\bullet\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\bullet\cos\frac{7\pi}{12}$

24.5. חשבון:

א. $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, אם נתון: $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ ו- $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

ב. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, אם נתון: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$ ו- $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

24.6. פשטו את הביטוי:

א. $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cdot\cos(-\beta)$

ב. $\cos(-\alpha)\cdot\sin(-\beta)-\sin(\alpha-\beta)$

ג. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\sin(\alpha-\beta)$

ד. $\sin(\alpha+\beta)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(-\beta)$

24.7. חשבו את $\cos(\alpha+\beta)$ ו- $\cos(\alpha-\beta)$ אם נתון: $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$ ו- $\sin\beta=\frac{8}{17}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

24.8. חשבו את $\sin(\alpha-\beta)$, אם נתון: $\cos\alpha=-0.8$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ ו- $\sin\beta=-\frac{12}{13}$, $\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$.

*24.9 חשבו את $\tan(\alpha+\beta)$ אם נתון: $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ ו- $\cos\beta=\frac{8}{17}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$

24.10. פשטו את הביטוי:

א. $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

ב. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

ג. $\cos3\alpha+\sin\alpha\cdot\sin2\alpha$

ד. $\cos2\alpha-\cos\alpha\cdot\cos3\alpha$

24.11. הוכיחו זהות:

א. $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

ב. $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$

ג. $\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$

.24.12 פשטו את הביטוי:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}$$

.24.13 פשטו את הביטוי:

א. $\sin\alpha\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cdot\cos\alpha$ ב. $\sin 5\beta\cdot\cos 3\beta - \sin 3\beta\cdot\cos 5\beta$

.24.14 פתרו את המשוואה:

א. $\cos 6x\cdot\cos 5x + \sin 6x\cdot\sin 5x = -1$

ב. $\sin 3x\cdot\cos 5x - \sin 5x\cdot\cos 3x = -1$

ג. $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) - \cos x = 1$

ד. $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) + \sin\frac{x}{2} = 1$

## תשובות

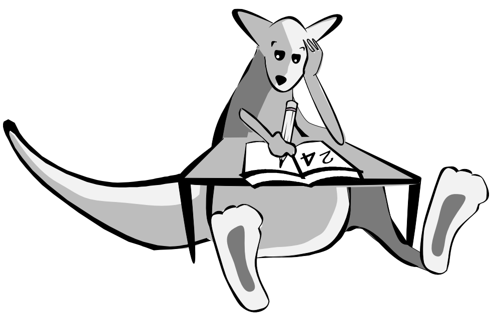
.24.1 ב) $-\frac{1}{2}$ ד) $-\frac{1}{2}$ .24.2 ב) $\frac{4-\sqrt{2}}{6}$ .24.3 ב) $\cos 3\beta$ ד) $-1$

.24.4 ב $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד) $1$ .24.5 ב) $\frac{-\sqrt{14}-2}{6}$

.24.6 ב) $-\cos\beta\sin\alpha$ ד) $\sin\alpha\cos\beta$ .24.7 $\frac{84}{85}, \frac{36}{85}$ .24.8 $-\frac{63}{65}$

.24.9 $2\frac{5}{36}$ .24.10 ב) $\frac{1}{2}\cos^2\alpha$ ד) $\sin\alpha\sin 3\alpha$ .24.12 $\sqrt{3}\tan\alpha$

.24.13 ב) $\sin 2\beta$ .24.14 ב $x = \frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$ $x = 4\pi k, k\in Z$



אם נציב $\beta = \alpha$ בנוסחה לסינוס של סכום, נקבל נוסחה ל**סינוס של זווית כפולה**:

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

לכן:

$$\boxed{\mathbf{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}} \qquad (1)$$

**דוגמה 7** נתון: $\sin\alpha = -0.6$ ו- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. חישבו את $\sin 2\alpha$.

◄ נשתמש בנוסחה (1):

$$\sin 2\alpha = 2\cdot(-0.6)\cdot\cos\alpha = -1.2\cos\alpha$$

כיוון ש- $\alpha$ נמצאת ברביע השלישי מסיקים כי $\cos\alpha < 0$.

לכן: $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - 0.36} = -0.8$

מציבים בביטוי הקודם ומקבלים סופית:

$$\sin 2\alpha = -1.2\cdot(-0.8) = 0.96 \qquad \triangleright$$

אם נציב $\beta = \alpha$ בנוסחה לקוסינוס של סכום, נקבל נוסחה ל**קוסינוס של זווית כפולה**:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

לכן:

$$\boxed{\mathbf{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha}} \qquad (2)$$

**דוגמה 8** נתון: $\cos\alpha = 0.3$. חשבו את $\cos 2\alpha$.

◄ נשתמש בנוסחה (2):

$$\underline{\cos 2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \underline{2\cos^2\alpha - 1} =$$

$$= 2\cdot 0.3^2 - 1 = -0.82 \qquad \triangleleft$$

במהלך הפתרון הוכחנו עוד נוסחה שימושית לקוסינוס של זווית כפולה:

$$\mathbf{\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

אפשר גם לבטא את קוסינוס של זווית כפולה באמצעות סינוס:

$$\mathbf{\cos 2\alpha} = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = \mathbf{1 - 2\sin^2\alpha}$$

באמצעות הנוסחאות לסינוס וקוסינוס של סכום זוויות וזווית כפולה אפשר לקבל נוסחאות לזווית של $3\alpha$ וכפולות אחרות של $\alpha$.

**דוגמה9** פשטו ביטוי: $\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha}$.

◀ נשתמש בנוסחאות (1) ו- (2):

$$\frac{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 - 2\sin^2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)} = \frac{1}{2}\tan 2\alpha$$

**דוגמה 10** נתון: $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ . חשבו את $\tan 2\alpha$.

◀ נציב בנוסחה לטנגנס של סכום $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$ את $\beta = \alpha$

ונקבל נוסחה **לטנגנס של זווית כפולה**:

$$\boldsymbol{\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}} \qquad (3)$$

נציב את $\tan\alpha = \frac{1}{2}$

ונקבל תשובה:

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \qquad \triangleright$$

**דוגמה 11*** נתון: $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ . חישבו את $\sin 3\alpha$ .

$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos 2\alpha + \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha =$

$= \sin\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha =$

$= 3\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha \cdot (1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha =$

$= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \sin\alpha \cdot (3 - 4\sin^2\alpha).$

נציב את הערך של סינוס ונקבל:

$$\triangleright \qquad \sin 3\alpha = \frac{1}{4} \cdot \left(3 - 4 \cdot \frac{1}{16}\right) = \frac{11}{16}$$

## תרגילים

חשבו ללא שימוש במחשבון:

.24.15 א) $2\sin 15°\cdot\cos 15°$ ב) $\cos^2 15° - \sin^2 15°$

ג) $(\cos 75° - \sin 75°)^2$

.24.16 א) $2\cdot\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}$ ב) $\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}$

ג) $\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\right)^2$

.24.17 א) $2\sin 75°\cdot\cos 75°$ ב) $\cos^2 75° - \sin^2 75°$

.24.18 חשבו את $\sin 2\alpha$, אם נתון:

א) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ו- $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ב) $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ ו- $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

.24.19 חשבו את $\cos 2\alpha$, אם נתון:

$\cos\alpha = \frac{4}{5}$ $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$

.24.20 חשבו את $\sin 2\alpha$, אם נתון:

א) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$ ב) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\frac{1}{3}$

## תשובות

24.15 ב) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד) $\frac{1}{2}$ 24.16 ב) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ד) $-1$

24.17 ב) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ד) $-2$ 24.18 א) $\frac{24}{25}$

24.19 ב) $\frac{7}{25}$ 24.20 ב) $\frac{8}{9}$

תרגיל 2.1 נתונים:

$$\sin\alpha = \frac{1}{9}\ ,\ \cos\beta = -\frac{6}{9}\ \ (\ 90^\circ<\alpha<180^\circ\ ,\ 90^\circ<\beta<180^\circ\ )$$

מצאו את $\cos(\alpha - \beta)$.

תרגיל 2.2 פשטו את הביטוי: $\cos\left(\alpha + \frac{1}{4}\cdot\pi\right) + \cos\left(\frac{1}{4}\cdot\pi - \alpha\right)$

תרגיל 2.5 נתונים:

$\sin\alpha = -0.8$ ותחום ההגדרה של הזווית הוא: $\alpha \ \ <\alpha<360^\circ$.

חישבו את $\sin(\alpha - 45^\circ)$.

תרגיל 2.6 נתונים: $\sin\alpha = 0.15\ ,\ \cos\beta = -0.71\ ,\ \frac{\pi}{2}<\beta<\pi\ ,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

מצאו את $\sin(\alpha + \beta)$.

תרגיל 2.7 חישבו את ערך הביטוי:

$y = \sin(14^\circ)\cos(46^\circ) + \sin(46^\circ)\cos(14^\circ)$.

תרגיל 2.14 נתון:

$\sin\alpha - \cos\alpha = 1.22$.

מצאו את ערך הביטוי: $\sin(2\alpha)$.

## 24.3 סכום והפרש של פונקציות סינוס

### סכום והפרש של פונקציות קוסינוס

לעיתים, במהלך פיתוח ביטויים מורכבים נוח יותר להשתמש במכפלות של איברים מאשר בסכומם או הפרשם. נפתח נוסחאות שהמאפשרות להציג סכום או הפרש של סינוסים וקוסינוסים כמכפלה.

כדי להציג את הסכום $\sin\alpha + \sin\beta$ כמכפלה, נציב: $\alpha = x + y,\ \beta = x - y$

ונשתמש בנוסחאות של סינוס של סכום וסינוס של הפרש:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x+y) + \sin(x-y) =$$
$$= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y + \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y =$$
$$= 2\sin x \cdot \cos y.$$

משתי השוויונות: $\alpha = x + y,\ \beta = x - y$ נחלץ את x ו- y:

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2},\ y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

לכן מקבלים סופית:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

באופן דומה מקבלים את נוסחאות להפרש סינוסים, וסכום והפרש של קוסינוסים:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

**דוגמה 12** פשטו סכום $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ$.

◄ נשתמש בנוסחה לסכום של סינוסים:

$$\sin 10^\circ + \sin 50^\circ = 2\sin\left(\frac{10^\circ + 50^\circ}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{10^\circ - 50^\circ}{2}\right) =$$

$$= 2\sin 30^\circ \cdot \cos(-20^\circ) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ = \cos 20^\circ$$

**דוגמה 13** הציגו כמכפלה את ההפרש: $\cos 0.3\pi - \sin 0.6\pi$.

◄ נשתמש בנוסחאות של פונקציות טריגונומטריות של זוויות גדולות, נציג את הביטוי כהפרש קוסינוסים, ונהפוך אותו למכפלה:

$$\cos 0.3\pi - \sin 0.6\pi = \cos 0.3\pi - \sin(0.5\pi + 0.1\pi) =$$

$$= \cos 0.3\pi - \cos 0.1\pi = -2\sin\left(\frac{0.3\pi + 0.1\pi}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{0.3\pi - 0.1\pi}{2}\right) =$$

$$= -2\sin 0.2\pi \cdot \sin 0.1\pi.$$

**דוגמה 14** הציגו כמכפלה את הביטוי: $1 - \sin\alpha$.

◄ נשתמש בשוויון: $1 = \sin\frac{\pi}{2}$ ונציג את הביטוי הנתון כהפרש סינוסים.

לכן אפשר לרשום:

$$1 - \sin\alpha = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 - \cos\left(2\cdot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

את אותה השאלה אפשר לפתור בדרך אחרת (באמצעות הנוסחה לקוסינוס זווית כפולה):

$$1 - \sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\alpha = 2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + \alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right).$$

**דוגמה 15** מצאו את הערכים הגדול ביותר והקטן ביותר של הביטוי $\sin\alpha + \cos\alpha$.

◄ נציג את הביטוי כמכפלה:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cdot\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$$

כיוון שהערך הקטן ביותר של קוסינוס שווה ל- 1-, אזי הערך הקטן ביותר של הביטוי שווה ל- $\sqrt{2}\cdot(-1) = -\sqrt{2}$, והערך הגדול ביותר שווה ל- $\sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}$.

## תרגילים

24.21. פשטו את הביטוי:

א) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

ב) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)$

ג) $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

ד) $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

24.22. חשבו:

א) $\cos 105° + \cos 75°$

ב) $\sin 105° - \sin 75°$

ג) $\cos\frac{11\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$

ד) $\cos\frac{11\pi}{12} - \cos\frac{5\pi}{12}$

ה) $\sin\frac{7\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}$

ו) $\sin 105° + \sin 165°$

24.23. הפכו למכפלה:

א) $1 + 2\sin\alpha$     ב) $1 - 2\sin\alpha$

ג) $1 + 2\cos\alpha$     ד) $1 + \sin\alpha$

24.24. פשטו את הביטוי: $\dfrac{1 + \sin\alpha - \cos 2\alpha - \sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1}$

24.25. רשמו כמכפלה: $\cos\dfrac{\pi}{12} + \cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{5\pi}{6}$

## תרגילים אינטראקטיביים

ChatGPT

שאילתות מפתח

תרגיל 4.1 נתון: $\cos\alpha = 0.52$ ,
מצאו את ערך הביטוי:
$y = 2\sin(2\alpha)\sin\alpha + \cos(3\alpha)$

תרגיל 4.2 נתון: $\sin(2\beta) = 0.84$ ,
מצאו את ערכו של הביטוי:
$y = 8\sin(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha) - 4\sin(2\alpha)$

תרגיל 4.3 נתון: $\cos(2\beta) = 0.53$ , $\cos(2\alpha) = 0.42$ .
מצאו את ערך הביטוי:
$y = 7\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

תרגיל 4.5 נתון: $\sin(4\alpha) = 0.6$ . מצאו את ערכו של $y = \dfrac{A}{B}$ , כאשר A ו- B הם ביטויים טריגונומטריים עם זווית $\alpha$ :
$A = 5\sin(8\alpha) + 9\sin(20\alpha) - 9\sin(12\alpha)$
$B = 5\cos(4\alpha) + 9 - 18(\sin(8\alpha))^2$

## תשובות

24.21 ב) $2\sin\dfrac{\pi}{8}\sin\beta$     ד) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2\alpha$

24.22 ב) $0$     ד) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$     ו) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

24.24 $2\sin\alpha$     24.25 $2\sqrt{3}\cos^2\dfrac{\pi}{24}$