11. סדרה הנדסית

משחק השח-מט הומצא על פי האגדה במאה החמישית לפנה״ס בהודו.
המלך שֶׁרָם התפעל מהמשחק והחליט להעניק פרס לממציאו, המתמטיקאי סֵטָא.
המלך שאל את המדען, איזה פרס היה רוצה לקבל.

סטא חשב מעט, ואז ביקש את מה שעל פניו נראה ״צנוע״ למדי: גרעין חיטה על משבצת ראשונה של לוח שח-מט...
המלך נדהם ונעלב: ״אני עשיר, וביכולתי להעניק לך פרס הולם! אבל סטא המשיך: ״על המשבצת השנייה 2 גרעינים, על השלישית– 4, הרביעית– 8,
החמישית– 16, השישית– 32...״
״ די! הבנתי!״ צעק המלך, ״תקבל, לפי בקשתך, עבור כל משבצת מספר כפול של גרעינים לעומת המשבצת הקודמת. לך, סטא, משרתיי יביאו לך שק חיטה.״
סטא חייך ויצא.
למחרת שאל המלך את משרתיו האם הביאו למדען המשוגע את הפרס שביקש.
אולם המתמטיקאים שלו טרם השלימו את ספירת הגרעינים, וכך גם ביום המחרת.
סבלנותו שלה מלך פקעה. הוא קרא להם ושאל מדוע הספירה טרם נשלמה. התשובה הדהימה את המלך: הכמות הנדרשת של הגרעינים הייתה כה גדולה, שבכל המחסנים בכל ארצות התבל לא הייתה בנמצא כמות כזו שלגרעינים.
כדי לחשב את מספר הגרעינים הנדרש, צריך לחשב את מספרי הגרעינים על כל 64 המשבצות:

$$1,\ 2,\ 2\cdot 2,\ 2\cdot 2\cdot 2,\ \ldots, \qquad (1)$$

ניעזר ברישום המכפלות באמצעות חזקות, ונסמן את סכום כל האיברים ב- S:

$$S_{64} = 1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$$

בהמשך נוכיח שמספר זה שווה ל- $S = 18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615$

והוא מספר עצום: כדי לאחסן כמות כזו של זרעים במחסן ששטח בסיסו 10×8 מ״ר,
היא תגיע לגובה של 150,000,000 ק״מ - המרחק מכדור הארץ לשמש!
בסדרה (1) כל איבר החל מהאיבר השני שווה לאיבר הקודם כפול 2.

סדרה כזאת נקראת **סדרה הנדסית**.

הגדרה: סדרת מספרים $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ שבה האיבר הראשון שונה מאפס, נקראת **סדרה הנדסית**, אם כל איבר, החל מהשני, שווה לאיבר הקודם כפול מספר קבוע שונה מאפס, הנקרא **מנת הסדרה**.

להגדרה זו מתאים **כלל הנסיגה** הזה:

$$\boxed{b_{n+1} = b_n \cdot q} \qquad (2)$$

כאשר n הוא מספר טבעי, $b_n \neq 0$, ו- q – מספר שאינו אפס.

מהגדרה זו נובע: **מנת כל שני איברים עוקבים בסדרה הנדסית היא מספר קבוע.**

למנה זו קוראים **מנת הסדרה q:**

$$\boxed{\frac{b_{n+1}}{b_n} = q} \qquad (3)$$

הגדרה זו מאפשרת לבדוק אם סדרת מספרים נתונה היא הנדסית: לשם כך יש לבדוק אם תנאי (3) מתקיים, כלומר אם מנת כל שני איברים עוקבים היא מספר קבוע.

דוגמה 1

א) הסדרה $2, 8, 32, 128$ היא סדרה הנדסית שבה $q = 4$.

בדיקה: $\frac{8}{2} = \frac{32}{8} = \frac{128}{32} = 4$

ב) הסדרה $3, 9, 27, 81$ היא סדרה הנדסית שבה $q = 3$.

בדיקה: $\frac{9}{3} = \frac{27}{9} = \frac{81}{27} = 3$

ג) הסדרה $-3, -6, -12, -24$ היא סדרה הנדסית שבה $q = 2$.

בדיקה: $\frac{-6}{-3} = \frac{-12}{-6} = \frac{-24}{-12} = 2$

כאשר האיבר הראשון של הסדרה חיובי $(b_1 > 0)$ ומנת הסדרה גדולה מאחת $(q > 1)$, כל איבר גדול מקודמו: $b_{n+1} = b_n \cdot q > b_n$. סדרה מעין זו נקראת **סדרה עולה**.

דוגמה 2

מפקידים כסף בבנק. הבנק מבטיח להחזיר את הסכום שהפקדנו בתוספת **ריבית**.

אם הפקדנו סך של - ₪ $b_1 = 1000$, **ושיעור הריבית השנתית** הוא $\alpha = 10\% = 0.1$,

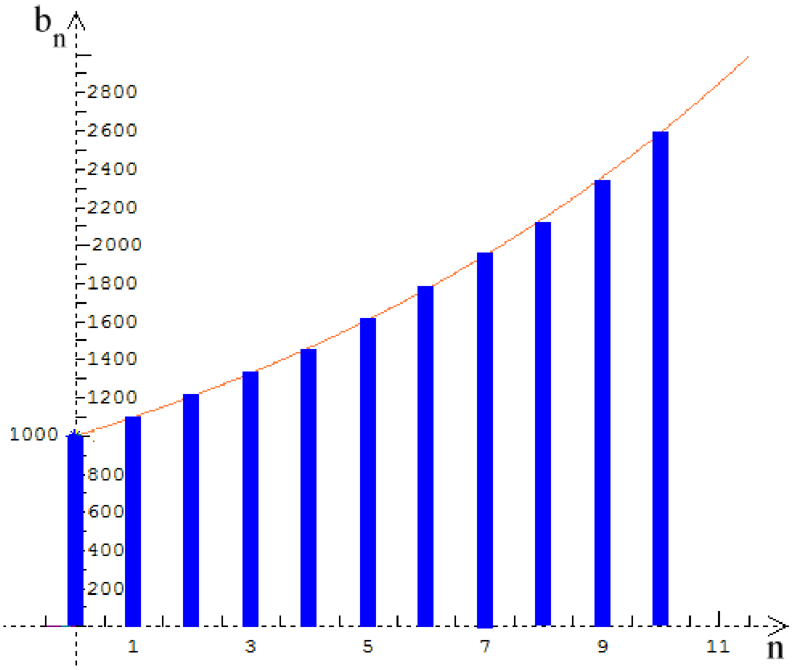
אז לאחר שנה נקבל סך של - ₪ $b_2 = 1000 + 0.1 \cdot 1000 = 1100$

לאחר שנתיים נקבל סך של - $b_3 = 1100 + 0.1\cdot1100 = 1210$ ₪

לאחר שלוש שנים: $b_4 = 1210 + 0.1\cdot1210 = 1331$ ₪

לאחר ארבע שנים: $b_5 = 1331 + 0.1\cdot1331 = 1464$ ₪

נתבונן בגרף של סכום הכסף b_n כפונקציה של מספר שנים n:



כל איבר גדול מקודמו, אולם האם זאת סדרה <u>חשבונית</u>? כדי לבדוק זאת, ענו על השאלות הבאות:

א. מה הקשר בין איברים סמוכים בסדרה חשבונית?

ב. האם איברי הסדרה מקיימים את הקשר הזה?

ג. האם איברי הסדרה מקיימים קשר מסוג אחר:
יחס בין כל איבר לקודמו הוא מספר קבוע?

מלאו את שתי הטבלות ובדקו את תשובתכם.

$b_2 - b_1$	
$b_3 - b_2$	
$b_4 - b_3$	
$b_5 - b_4$	

b_2 / b_1	
b_3 / b_2	
b_4 / b_3	
b_5 / b_4	

נוכיח כי ההשערה ג׳ היא הנכונה:

נסמן ב- b_1 את ה**כמות ההתחלתית** (הפיקדון), אזי ה**תוספת** בתום השנה הראשונה תהיה: $b_1 \cdot \alpha$. כלומר, כמות הכסף בתום שנה ראשונה תהיה:

$$b_2 = b_1 + b_1 \cdot \alpha = b_1 \cdot (1 + \alpha)$$

בתום שנה שנייה סכום הכסף בחשבון יהיה:

$$b_3 = b_2 + b_2 \cdot \alpha = b_2(1 + \alpha)$$

בתום שנה שלישית הסכום יהיה:

$$b_4 = b_3 + b_3 \cdot \alpha = b_3(1 + \alpha)$$

וכך הלא.

כלומר, סכומי הכסף בחשבון בתום כל שנה מהווים סדרה <u>הנדסית</u>, שהמנה שלה שווה ל- <u>$q = 1 + \alpha$</u>, כאשר α הוא שיעור הריבית השנתית.

בדוגמה הנ״ל נתון: $\alpha = 10\% = 0.1$, לכן מנת הסדרה היא: <u>$q = 1 + 0.1 = 1.1$</u>.

נוודא כי החישובים הקודמים מתאימים לנוסחאות שפיתחנו:

$n = 1$: $b_2 = b_1 \cdot q = 1000 \cdot 1.1 = 1100$ ₪

$n = 2$: $b_3 = b_2 \cdot q = 1100 \cdot 1.1 = 1210$ ₪

$n = 3$: $b_4 = b_3 \cdot q = 1210 \cdot 1.1 = 1331$ ₪

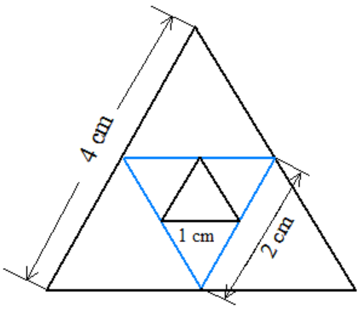
$n = 4$: $b_5 = b_4 \cdot q = 1331 \cdot 1.1 = 1464$ ₪

ערכו המוחלט של מנת הסדרה יכול להיות גם קטן מאחת $|q| < 1$.

במקרה זה, אם האיבר הראשון b_1 והמנה q חיוביים, כל איבר קטן מקודמו: $b_{n+1} = b_n \cdot q < b_n$. סדרה שמקיימת תנאי זה לכל איבריה היא סדרה **יורדת**.

דוגמה 3

נתבונן במשולש שווה צלעות, בעל צלע באורך 4 ס״מ. נשרטט משולש שקדקודיו הם אמצעי הצלעות של משולש נתון. צלעותיו של המשולש החדש הם קטעים אמצעיים של המשולש המקורי, ולכן אורך הצלע של המשולש הקטן הוא 2 ס״מ.

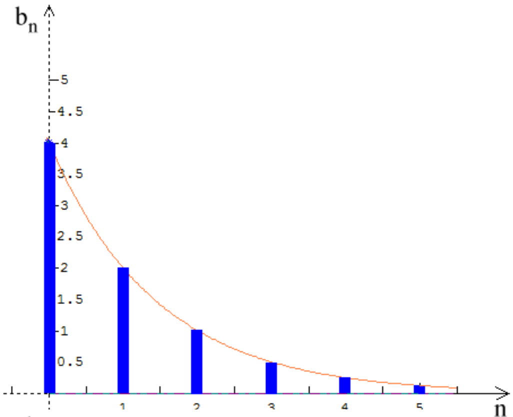


נמשיך בבנייה, ונקבל משולשים בעלי צלעות באורך $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ס"מ, וכך הלאה.

כלומר, אורכי הצלעות של המשולשים מהווים סדרה: $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$.

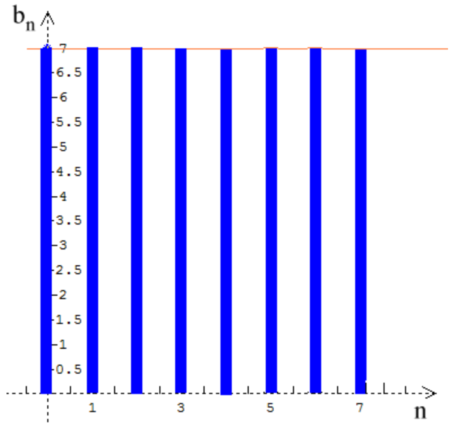
נבדוק את המנות של איברים סמוכים:

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = q$$



נתבונן בגרף הפונקציה $b(n)$ במקרה זה ($b_1 = 4$, $q = 0.5$): רואים שכל איבר קטן מקודמו ($b_{n+1} < b_n$) והסדרה היא סדרה הנדסית **יורדת**.

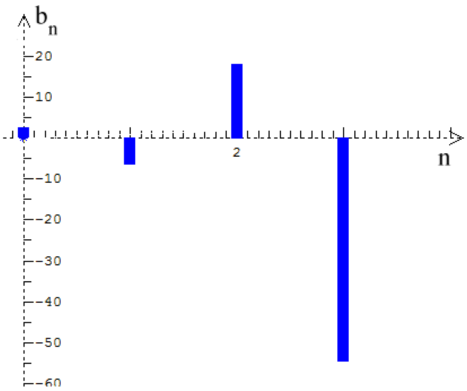
סדרה הנדסית יכולה להיות **שאינה עולה ואינה יורדת**.



דוגמה 4 הסדרה $7, 7, 7, 7, 7, \ldots$ היא הנדסית, המנה $q = 1$.

הסדרה אינה עולה ואינה יורדת - **קבועה**.

מנת הסדרה יכולה להיות גם מספר **שלילי**. במקרה זה סימני האיברים הסמוכים **מתחלפים**.



דוגמה 5

א) הסדרה $2, -6, 18, -54$ היא הנדסית והמנה $q = -3$.

בדיקה: $\frac{-6}{2} = \frac{18}{-6} = \frac{-54}{18} = -3$

בייצוג הגרפי שלה רואים שהסדרה **אינה עולה ואינה יורדת**.

ב) הסדרה $..., 144, -12, 1, -\frac{1}{12}$ היא סדרה הנדסית, המנה $q = -12$.
סימני האיברים הסמוכים מתחלפים, לכן הסדרה **אינה עולה ואינה יורדת**. ▷

אם כלל הנסיגה של סדרה והאיבר הראשון ידועים, אפשר לחשב את כל איבריה.

דוגמה 6 סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:
$$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_{n+1} = b_n \cdot 3 \end{cases}$$
א) רשמו את ארבעת האיברים הראשונים.

◀ האיבר הראשון נתון. מכלל הנסיגה מסיקים שמנת הסדרה היא $q = 3$.
נמצא את האיבר השני. נציב בכלל הנסיגה $n = 1$: $b_{1+1} = b_1 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12$,
כלומר, $b_2 = 12$. נציב $n = 2$: $b_{2+1} = b_2 \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36$
לכן, $b_3 = 36$. נציב $n = 3$: $b_{3+1} = b_3 \cdot 3 = 36 \cdot 3 = 108$, כלומר, $b_4 = 108$.
תשובה: 4, 12, 36, 108 ▷

ב) האם הסדרה הנדסית הזו עולה, קבועה או יורדת?
◀ כיוון שהאיבר הראשון של הסדרה חיובי ($b_1 = 4$) והמנה אף היא חיובית וגדולה מ- 1, הסדרה **עולה**. ▷

דוגמה 7 סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה:
$$\begin{cases} b_1 = 4 \\ b_{n+1} = -2 \cdot b_n \end{cases}$$
א) רשמו את ארבעת האיברים הראשונים.

◀ האיבר הראשון נתון. מכלל הנסיגה מסיקים שמנת הסדרה היא $q = -2$.
נמצא את האיבר השני. נציב בכלל הנסיגה $n = 1$:
$b_{1+1} = b_1 \cdot (-2) = 4 \cdot (-2) = -8$,
כלומר, $b_2 = -8$. נציב $n = 2$: $b_{2+1} = b_2 \cdot (-2) = -8 \cdot (-2) = 16$
לכן, $b_3 = 16$. נציב $n = 3$: $b_{3+1} = b_3 \cdot (-2) = 16 \cdot (-2) = -32$, כלומר, $b_4 = -32$.
תשובה: 4, -8, 16, -32 ▷

ג) האם הסדרה ההנדסית הזו עולה, קבועה או יורדת?
◀ כיוון שסימני האיברים הסמוכים של הסדרה מתחלפים, הסדרה **אינה עולה, אינה יורדת ואינה קבועה**. ▷

דוגמה 8 סדרה מוגדרת לכל n טבעי על ידי כלל הנסיגה: $\begin{cases} b_1 = 108 \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n}{3} \end{cases}$

א) רשמו את ארבעת האיברים הראשונים.

◀ האיבר הראשון נתון.

מכלל הנסיגה מסיקים שמנת הסדרה היא $q = \frac{1}{3}$.

נציב בכלל הנסיגה $n = 1$: $b_2 = b_1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{108}{3} = 36$

בדומה לכך מציבים $n = 2$ ו- $n = 3$ ומקבלים את האיברים האלה:

$$b_3 = b_2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{36}{3} = 12, \;\; b_4 = b_3 \cdot \frac{1}{3} = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$$

איברי הסדרה הראשונים הם: 108, 36, 12, 4.

כיוון שמנת הסדרה חיובית וקטנה מאחת, הסדרה **יורדת**. ▷

12. חזקות בעלות מעריך שלילי

הגדרת החזקה בעלת מעריך שלם שלילי

נתבונן בסדרת חזקות של 10:

$$10^1, 10^2, 10^3, \ldots, 10^n, 10^{n+1}, \ldots \qquad (1)$$

בסדרה זו כל מספר גדול פי- 10 מהמספר שמשמאלו:

$$10^2 = 10^1 \cdot 10, \; 10^3 = 10^2 \cdot 10, \; \ldots, \; 10^{n+1} = 10^n \cdot 10$$

וכל מספר קטן פי 10 מהמספר שמימינו:

$$10^1 = 10^2 : 10, \; 10^2 = 10^3 : 10, \; 10^n = 10^{n+1} : 10$$

אם נמשיך את הסדרה (1) שמאלה ל- 10^1 נקבל $10^1 : 10 = 10^0 = 1$,

ומשמאל ל- 1: $\frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 1:10$, משמאלו $\frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = \frac{1}{10} : 10$,

$\frac{1}{10^3} = \frac{1}{10^2} : 10$ וכך הלאה.

לבסוף נקבל את הסדרה הזו:

$$\ldots, \frac{1}{10^3}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, \ldots \qquad (2)$$

בסדרה זו משמאל ל- 10^0 כל מעריך של חזקה קטן ב- 1 מהמעריך שלפניו.

כדי לשמור על אחידות, מקובל לרשום את המספרים משמאלו מ- 10^0 בצורה של חזקה בעלת מעריך **שלילי**:

$$\frac{1}{10} = 10^{-1},\ \frac{1}{100} = 10^{-2},\ \frac{1}{1000} = 10^{-3} \ldots$$

כל הסדרה (2) תיראה כך:

$$10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}, 10^{0}, 10^{1}, 10^{2}, 10^{3}, \ldots$$

במקרה הכללי, אם $a \neq 0$ ו- n הוא מספר שלם שלילי, אזי:

$$\boxed{a^n = \frac{1}{a^{-n}}}$$

דוגמאות

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25},\quad (-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^4} = \frac{1}{81}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{8}} = -8$$

הערה: כאשר בסיס החזקה a הוא אפס $(a = 0)$, יש שלוש אפשרויות:

א) כאשר המעריך n חיובי $(n > 0)$, אזי $0^n = 0$;

ב) כאשר n שלילי $(n < 0)$, לביטוי 0^n אין משמעות.

הוכחה: נסמן $n = -m$, כאשר $m > 0$. אז $0^n = 0^{-m} = \frac{1}{0^m} = \frac{1}{0}$

ג) אין משמעות גם למספר 0^0.

תרגילים

8.1 רשמו את החזקות בעלות המעריך השלילי בצורת שבר:

א) 10^{-6} ב) 9^{-2} ג) a^{-1} ד) x^{-20} ה) $(ab)^{-3}$ ו) $(a+b)^{-4}$.

8.2 רשמו את השבר בצורה של חזקה בעלת מעריך שלילי:

א) $\frac{1}{10^2}$ ב) $\frac{1}{6^7}$ ג) $\frac{1}{x^7}$ ד) $\frac{1}{y^{10}}$ ה) $\frac{1}{7}$

8.3 רשמו את המספר כחזקה של 2:

א) 8 ב) 4 ג) 2 ד) 1 ה) $\frac{1}{2}$ ו) $\frac{1}{4}$ ז) $\frac{1}{8}$

8.4 רשמו את המספר כחזקה של 5:

א) $\frac{1}{125}$ ב) $\frac{1}{25}$ ג) $\frac{1}{5}$ ד) 1 ה) 5 ו) 25 ז) 125

8.5 רשמו את המספר כחזקה של 3:

א) $\frac{1}{81}$ ב) $\frac{1}{27}$ ג) $\frac{1}{9}$ ד) $\frac{1}{3}$ ה) 1 ו) 3 ז) 9 ח) 27 ט) 81

8.6 רשמו את המספר כחזקה של 10:

א) 100 ב) 10 ג) 1 ד) 0.1 ה) 0.01 ו) 0.001 ז) 0.0001

12.1 כללי חזקות בעלות מעריך שלם

כללי החזקות בעלות מעריך טבעי (שלם וחיובי) תקפים גם עבור חזקות בעלות מעריך שלם (יש רק לוודא שבסיס החזקה אינו אפס).

עבור כל $a \neq 0$ ומספרים שלמים m ו- n מתקיים:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{mn}$$

עבור כל $a \neq 0$, $b \neq 0$ ומספר שלם n מתקיים: $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

אפשר להוכיח את התכונות האלה ואת התכונות של חזקות בעלות מעריך טבעי באמצעות הגדרת החזקה בעלת המעריך השלילי.

לדוגמה:

$$a^{-7} \cdot a^{-8} = \frac{1}{a^7} \cdot \frac{1}{a^8} = \frac{1}{a^7 \cdot a^8} = \frac{1}{a^{7+8}} = \frac{1}{a^{15}} = a^{-15} = a^{-7+(-8)}$$

לכן פעולות בחזקות בעלות מעריך שלילי מתבצעות על פי אותם הכללים לפיהם פועלים בחזקות בעלות מעריך טבעי.

דוגמה 1 פשטו את הביטוי: $a^{-17} \cdot a^{21}$.

◄ כאשר כופלים חזקות בעלות בסיסים זהים, משאירים את הבסיס ומחברים את המעריכים: $a^{-17} \cdot a^{21} = a^{-17+21} = a^4$ ◁

דוגמה 2 פשטו את המנה: $b^2 : b^5$.

◄ כאשר מחלקים חזקות בעלות בסיסים זהים, משאירים את הבסיס ומחסרים את המעריכים: $b^2 : b^5 = b^{2-5} = b^{-3}$ ◁

תזכורת עבור חזקות בעלות מעריכים טבעיים השתמשנו בכלל לחילוק חזקות בעלות בסיסים זהים כאשר המעריך המחולק אינו קטן מהמעריך המחלק.

עבור חזקות בעלות מעריך שלם מגבלה זו אינה קיימת, ושני המעריכים יכולים להיות מספרים שלמים כלשהם.

דוגמה 3 פשטו את הביטוי $(2a^3b^{-5})^{-2}$.

כאשר מעלים מכפלה בחזקה, מעלים בחזקה כל כופל ולבסוף כופלים את התוצאות:

$$(2a^3b^{-5})^{-2} = 2^{-2}\cdot(a^3)^{-2}(b^{-5})^{-2} = \frac{1}{4}a^{-6}b^{10}$$

דוגמה 4 פשטו את הביטוי $a^6(a^{-2} - a^{-4})(a^2 + a^3)^{-1}$.

$$a^6(a^{-2} - a^{-4})\cdot(a^2 + a^3)^{-1} = a^6\cdot\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^4}\right)\cdot\frac{1}{a^2 + a^3} =$$

$$= a^6\cdot\frac{a^2 - 1}{a^4}\cdot\frac{1}{a^2(1 + a)} = \frac{a^6\cdot(a + 1)(a - 1)}{a^4\cdot a^2\cdot(1 + a)} = a - 1$$

תרגילים

8.7 חִשבו:

א) 4^{-2} ב) $(-3)^{-3}$ ג) $(-1)^{-9}$ ד) $(-1)^{-20}$ ה) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}$

ו) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$ ז) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-5}$ ח) $\left(-2\frac{2}{5}\right)^{-2}$ ט) 0.01^{-2} י) 1.125^{-1}

8.8 מִצאו את ערך הביטוי:

א) -10^{-4} ב) -0.2^{-3} ג) $(-0.8)^{-2}$ ד) $(-0.5)^{-5}$ ה) $-(-2)^{-3}$ ו) $-(-3)^{-2}$

8.9 מצאו את ערך הביטויים x^n ו- x^{-n}, אם נתון:

א) $x = \frac{2}{3},\ n = -2$ ב) $x = -1.5,\ n = 3$

8.10 הציגו את הביטוי בצורת שבר שאינו מכיל חזקה עם מעריך שלילי:

א) $3x^{-5}$ ב) $x^{-4}y$ ג) $5ab^{-7}$ ד) $5(ab)^{-7}$

ה) $x^{-1}c^{-3}$ ו) $-9yz^{-8}$ ז) $2(x + y)^{-4}$ ח) $10x^{-1}(x - y)^{-3}$

8.11 הציגו שבר בצורת המכפלה :

א) $\frac{3}{b^2}$ ב) $\frac{x}{y}$ ג) $\frac{2a^8}{c^5}$ ד) $\frac{a^5}{7b^3}$

ה) $\frac{1}{x^2y^3}$ ו) $\frac{(a+b)^2}{b^4c^4}$ ז) $\frac{2a}{(a-2)^2}$ ח) $\frac{(c+b)^5}{2(a-b)^4}$

8.12 רשמו בצורה של שבר :

א) $a^{-2}+b^{-2}$ ב) $xy^{-1}+xy^{-2}$ ג) $(a+b^{-1})(a^{-1}-b)$ ד) $(x-2y^{-1})(x^{-1}+2y)$

תשובות

8.1 א) $\frac{1}{10^6}$ ב) $\frac{1}{9^2}$ ג) $\frac{1}{a}$ ד) $\frac{1}{x^{20}}$ ה) $\frac{1}{(ab)^3}$ ו) $\frac{1}{(a+b)^4}$

8.2 א) 10^{-2} ב) 6^{-7} ג) x^{-7} ד) y^{-10} ה) 7^{-1}

8.3 א) 2^3 ב) 2^2 ג) 2^1 ד) 2^0 ה) 2^{-1} ו) 2^{-2} ז) 2^{-3}

8.4 א) 5^{-3} ב) 5^{-2} ג) 5^{-1} ד) 5^0 ה) 5^1 ו) 5^2 ז) 5^3

8.5 א) 3^{-4} ב) 3^{-3} ג) 3^{-2} ד) 3^{-1} ה) 3^0 ו) 3^1 ז) 3^2 ח) 3^3 ט) 3^4

8.6 א) 10^2 ב) 10^1 ג) 10^0 ד) 10^{-1} ה) 10^{-2} ו) 10^{-3} ז) 10^{-4}

8.7 א) $\frac{1}{16}$ ב) $-\frac{1}{27}$ ג) -1 ד) 1 ה) 49 ו) $-\frac{27}{8}$ ז) $\frac{32}{243}$ ח) $\frac{25}{144}$ ט) $10{,}000$ י) $\frac{8}{9}$

8.8 א) -0.0001 ב) -125 ג) 1.5625 ד) -32 ה) 0.125 ו) $-\frac{1}{9}$

8.9 א) $x^n=2.25$, $x^{-n}=\frac{4}{9}$ ב) $x^n=-3.375$, $x^{-n}=-\frac{8}{27}$

8.10 א) $\frac{3}{x^5}$ ב) $\frac{y}{x^4}$ ג) $\frac{5a}{b^7}$ ד) $\frac{5}{(ab)^7}$ ה) $\frac{1}{xc^3}$ ו) $-\frac{9y}{z^8}$ ז) $\frac{2}{(x+y)^4}$ ח) $\frac{10}{x(x-y)^3}$

8.11 א) $3b^{-2}$ ב) xy^{-1} ג) $2a^8c^{-5}$ ד) $7^{-1}a^5b^{-3}$

ה) $x^{-2}y^{-3}$ ו) $(a+b)^2(bc)^{-4}$ ז) $2a(a-2)^{-2}$ ח) $2^{-1}(c+b)^5(a-b)^{-4}$

8.12 א) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ ב) $\frac{x}{y}+\frac{x}{y^2}$ ג) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-b\right)$ ד) $\left(x-\frac{2}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+2y\right)$

13. נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה הנדסית

בעזרת כלל הנסיגה אפשר לחשב בקלות את האיברים הראשונים של סדרה הנדסית, אולם חישוב האיבר בעל מספר סידורי n גדול מחייב לחשב את כל האיברים שלפניו. יש דרך לחשב כל איבר, אם **האיבר הראשון ומנת הסדרה** ידועים.

נניח שהסדרה $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ הנדסית והמנה שלה q.

בעזרת **כלל הנסיגה** (2) נקבל:

$$n = 1: \quad b_2 = b_1 \cdot q$$
$$n = 2: \quad b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2$$
$$n = 3: \quad b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3$$
$$n = 4: \quad b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4$$

מהביטויים הנ"ל אפשר להסיק:

$$\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}} \qquad (4)$$

נוסחה זאת מאפשרת לחשב את איבר n- י של סדרה הנדסית, אם האיבר הראשון ומנת הסדרה ידועים.

דוגמה 9 נתונה סדרה הנדסית: $1, 3, 9, 27, \dots$.

א) רשמו את נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה.

◄ כדי לרשום את הנוסחה (4), צריך לדעת את האיבר הראשון b_1 ואת מנת הסדרה q.

בסדרה $b_1 = 1$ ומנת הסדרה q שווה ליחס שני איברים סמוכים כלשהם, למשל הראשון והשני:

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{1} = 3$$

לכן נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה היא:

$$\triangleright\ b_n = 1 \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1}$$

ב) מִצאו את האיבר השישי בסדרה.

◄ נציב בנוסחת האיבר לפי מקומו את $n = 6$: $b_6 = 3^{6-1} = 3^5 = \underline{243}$. ▷

דוגמה 10 נתונה סדרה הנדסית: $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \dots$

א) רשמו את נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה;

ב) מצאו את האיבר העשירי בסדרה.

א) בסדרה $b_1 = 3$. מנת הסדרה: $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{2} : 3 = \frac{1}{2}$

נוסחת האיבר לפי מקומו: $b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2^{n-1}}$ ▷

ב) נציב בביטוי שקיבלנו $n = 10$: $b_{10} = \frac{3}{2^{10-1}} = \frac{3}{2^9} = \frac{3}{512}$ ▷

מציאת n לפי b_1, b_n ו- q

נוסחת האיבר לפי מקומו מאפשרת למצוא את המספר הסידורי לפי גודל האיבר, לפי האיבר הראשון ולפי מנת הסדרה.

דוגמה 11 נתונים: $b_1 = 3$, $q = 2$, $b_n = 1536$. מצאו את n.

נציב בנוסחה (4) את הנתונים:

$$1536 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow 512 = 2^{n-1}$$

כיוון ש- $512 = 2^9$ רושמים: $2^{n-1} = 2^9$, $n - 1 = 9$, $n = 10$. ▷

מציאת q על פי b_1 ו- b_n

הנוסחה (4) מאפשרת למצוא את מנת הסדרה גם לפי האיבר הראשון ולפי האיבר ה- n -י.

דוגמה 12 נתונים: $b_1 = 14$, $b_7 = \frac{7}{32}$. מצאו את q.

נציב בנוסחת האיבר לפי מקומו את הנתונים:

$$b_7 = b_1 \cdot q^6 \Rightarrow \frac{7}{32} = 14 \cdot q^6 \Rightarrow q^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \text{ או } q = -\frac{1}{2}$$ ◁

מציאת b_n לפי b_k ו- b_m

אם ידועים שני איברים כלשהם של סדרה הנדסית, אפשר למצוא כל איבר אחר בסדרה: מציבים בנוסחת האיבר לפי מקומו את נתוני שני האיברים הידועים, ומקבלים מערכת של שתי משוואות לנעלמים b_1 ו- q.

דוגמה 13 מצאו את האיבר **השמיני** של סדרה הנדסית, אם ידועים האיברים **הראשון והשלישי**: $b_1 = 162$, $b_3 = 18$.

◀ נציב בנוסחת האיבר לפי מקומו את הנתונים:

$$b_3 = b_1 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{18}{162} = \frac{1}{9}, \ q_1 = \frac{1}{3}, \ q_2 = -\frac{1}{3}$$

כלומר, יש שתי סדרות המקיימות את תנאי הבעיה:

כאשר $q = \frac{1}{3}$, מקבלים: $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 162 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}$

כאשר $q = -\frac{1}{3}$: $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 162 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^7 = -\frac{2 \cdot 3^4}{3^7} = -\frac{2}{3^3} = -\frac{2}{27}$ ▷

דוגמה 14 בסדרה הנדסית עולה האיבר **הרביעי** הוא 24, והאיבר **השישי** הוא 96.

מְצאו את האיבר הראשון בסדרה.

◀ נרשום את נתוני הבעיה: $b_4 = 24, b_6 = 96$.

נציב נתונים בנוסחאות האיבר לפי מקומו עבור שני האיברים:

$$\begin{cases} b_4 = b_1 \cdot q^3 = 24 & (1) \\ b_6 = b_1 \cdot q^5 = 96 & (2) \end{cases}$$

נחלק (2) ב- (1): $\frac{96}{24} = \frac{b_1 q^5}{b_1 q^3} = q^2, \ q^2 = 4, \ q_1 = 2, q_2 = -2$

קיימות שתי סדרות שבהן האיברים הרביעי והשישי מתאימים לנתונים, ואולם רק אחת מהן **עולה:** $q = 2$. נציב ב- (1) ונמצא את b_1:

$$b_1 = \frac{24}{q^3} = \frac{24}{2^3} = \frac{24}{8} = 3$$

תשובה: $b_1 = 3$. ▷

הערה: בסדרה השנייה $q = -2$, $b_1 = \frac{24}{(-2)^3} = -3$,

הסדרה היא: $-3, 6, -12, 24, -48, 96, \ldots$. הסדרה **אינה עולה ואינה יורדת**.

✸ **דוגמה 15** נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה היא $b_n = 7^{2n}$.

הוכיחו שהסדרה הנדסית.

◀ יש להוכיח שהמנה $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ היא מספר קבוע שאינו תלוי ב- n.

ניעזר בתכונות החזקה ונחשב אותה:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{7^{2(n+1)}}{7^{2n}} = \frac{7^{2n+2}}{7^{2n}} = 7^2 = 49$$

המנה אינה תלויה ב- n, לכן הסדרה הנדסית. ▷

מציאת הסדרה על פי הקשרים בין איבריה

דוגמה 16 נתונים: ההפרש בין האיברים השביעי והחמישי של סדרה הנדסית הוא 48, סכום האיברים החמישי והשישי גם הוא 48.

מְצאו את האיבר ה- 12 בסדרה.

◀ **שלב א**. רישום הנתונים ושימוש בנוסחת האיבר לפי מקומו:

$$\begin{cases} b_7 - b_5 = 48, \quad b_7 = b_1 \cdot q^6, \; b_5 = b_1 \cdot q^4 \\ b_5 + b_6 = 48, \quad b_5 = b_1 \cdot q^4, \; b_6 = b_1 \cdot q^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q^6 - b_1 \cdot q^4 = 48 \\ b_1 \cdot q^4 + b_1 \cdot q^5 = 48 \end{cases}$$

נוציא גורמים משותפים מהסוגריים, ונקבל מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים b_1 ו- q:

$$\begin{cases} b_1 \cdot q^4 (q^2 - 1) = 48 \\ b_1 \cdot q^4 (q + 1) = 48 \end{cases}$$

שלב ב. פתרון המערכת. נשווה את אגפי השמאל:

$$b_1 \cdot q^4 (q^2 - 1) = b_1 \cdot q^4 (q + 1)$$

נחלק את שני האגפים ב- $b_1 \cdot q^4$ (שאינו אפס), ונקבל משוואה ריבועית:

$$q^2 - 1 = q + 1 \quad \Rightarrow \quad q^2 - q - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 2, \; q_2 = -1.$$

נציב $q = 2$ במשוואה השנייה ונקבל:

$$b_1 \cdot 2^4 (2 + 1) = 48 \quad \Rightarrow \quad b_1 \cdot 16 \cdot 3 = 48 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 1$$

נציב $q = -1$ במשוואה השנייה ונקבל:

$$b_1 \cdot 1^4 (-1 + 1) = 48, \quad b_1 \cdot 0 = 48 \; (?)$$

למשוואה זו אין פִּתרון.

לכן: $b_1 = 1$, $q = 2$.

שלב ג. כדי למצוא את b_{12} נשתמש בנוסחת האיבר לפי מקומו:

$$b_{12} = b_1 \cdot q^{11} = 1 \cdot 2^{11} = 2048$$ ▷

משפט א ריבוע כל איבר בסדרה הנדסית, החל מהשני, שווה למכפלת שני האיברים הסמוכים לאותו איבר:

$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \qquad (5)$$

הוכחה על פי הגדרת הסדרה ההנדסית מתקיים:

$$b_n = b_{n-1} \cdot q, \quad b_{n+1} = b_n \cdot q$$

נחלץ את q מכל ביטוי ונשווה תוצאות:

$$q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

על פי תכונת הפרופורציה, נקבל:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$ **מ.ש.ל.**

נוציא שורש ריבועי משני האגפים:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}} \qquad (6)$$

שורש ריבועי ממכפלת שני מספרים לא שליליים $a \geq 0$ ו- $b \geq 0$ נקרא **ממוצע הנדסי** או **ממוצע גיאומטרי** של שני המספרים: $c = \sqrt{a \cdot b}$

הערה: בפרק הגיאומטריה (סעיף 2.3) למדנו שבמשולש ישר זווית, גובה ליתר שווה לשורש ריבועי ממכפלת הקטעים שאותם מקצה גובה זה על היתר.

לכן אפשר לומר, שכל איבר בסדרה הנדסית, החל מהשני, שווה לממוצע הנדסי של שני האיברים הסמוכים לו.

גם **המשפט ההפוך** מתקיים: אם לכל איברי הסדרה מתקיים השוויון (5) או (6), אזי הסדרה הנדסית.

תכונה זו מסבירה את מקור שמה של הסדרה ההנדסית.

דוגמה 17 נתון: המספרים $(y - 2)^2, y^2, (y + 2)^2$ מהווים סדרה הנדסית.

מצאו את y.

◄ כיוון ששלושת המספרים הנ"ל מהווים סדרה הנדסית, על פי משפט א' מתקיים:

$$(y^2)^2 = (y - 2)^2 \cdot (y + 2)^2$$

פותרים את המשוואה:

$$(y^2)^2 = (y^2 - 4)^2 \;\Rightarrow\; y^2 = \pm (y^2 - 4)$$

$y^2 = y^2 - 4$ - אין פתרון

$y^2 = -(y^2 - 4) \Rightarrow 2y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 2,$

$y_1 = \sqrt{2},\ y_2 = -\sqrt{2}$

משפט ב אם סדרה $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ היא סדרה הנדסית, אז גם סדרת הריבועים $b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2, \ldots$ הנדסית.

הוכחה על פי הגדרת הסדרה ההנדסית מתקיים: $b_n = b_{n-1} \cdot q$.

נעלה את השני האגפים בריבוע: $b_n^2 = b_{n-1}^2 \cdot q^2$

ונסמן: $b_n^2 = c_n,\ b_{n-1}^2 = c_{n-1},\ q^2 = Q$.

נקבל: $c_n = c_{n-1} \cdot Q$, כלל נסיגה לסדרה הנדסית, שבה האיבר הראשון הוא $c_1 = b_1^2$ והמנה היא $Q = q^2$.

סדרה הנדסית – תרגילים אינטראקטיביים עם פתרונות

8.13 מצאו ארבעה מספרים שיוצרם סדרה הנדסית, שבה האיבר השני קטן מהראשון ב- 35, והאיבר השלישי גדול מהרביעי ב- 350.

8.14 מצאו ארבעה מספרים היוצרם סדרה הנדסית, שבה האיבר השלישי גדול מהראשון ב- 9, והאיבר השני גדול מהרביעי ב- 18.

8.15 שלושה מספרים מהווים סדרה הנדסית. אם להחסיר 4 מהאיבר השלישי, אזי המספרים יוצרו סדרה חשבונית, ואם להחסיר 1 מהאיברים השני והשלישי של הסדרה החדשה, אזי הם שוב יווצרו סדרה הנדסית. מצאו את המספרים.

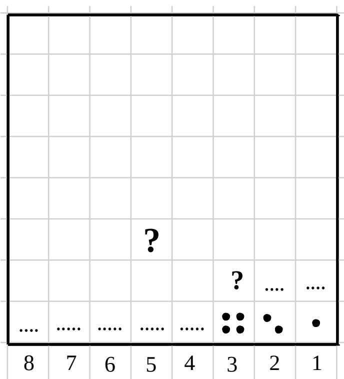
8.16 אורכי צלעות המשולש מהווים שלושה איברים עוקבים של סדרה הנדסית. האם מנת הסדרה הזו גדולה או קטנה מ- 2?

דוגמה 18 משאבת אוויר מוציאה בכל שאיבה 20% מהאוויר הנמצא במֵיכל.
הלחץ ההתחלתי של האוויר הוא 760 מ״מ כספית.
מה יהיה לחץ האוויר במיכל לאחר שש שאיבות?

◄ כיוון שבכל שאיבה 20% מהאוויר שבמיכל נשאב, 80% מהאוויר נותר במיכל.
אם נסמן את הלחץ ההתחלתי ב- p_1, לאחר שאיבה ראשונה הלחץ יהיה $p_2 = 0.8 \cdot p_1$,
לאחר השאיבה השנייה הלחץ יהיה $p_3 = 0.8 \cdot p_2$, וכך הלאה.
כלומר, לפנינו סדרה הנדסית יורדת, אשר בה האיבר הראשון הוא $p_1 = 760$ והמנה $q = 0.8$. הלחץ הנדרש (לאחר 6 שאיבות) הוא, למעשה, האיבר השביעי בסדרה:

$$p_7 = p_1 \cdot (0.8)^6 \approx 200 \text{ (mm Hg)}$$

דוגמה 19 משקל גרעין החיטה המונח על המשבצת הראשונה של לוח שח-מט הוא 1 גרם. בכל משבצת ביקש המתמטיקאי להניח חיטה במשקל כפול מזה שבמשבצת הסמוכה. מה משקל החיטה במשבצת ה- 11? ובמשבצת ה- 21?



◄ כמויות החיטה בכל ערוגה מהוות סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא $b_1 = 1$ והמנה $q = 2$.
האיבר ה- 11:

$$b_{11} = b_1 \cdot q^{10} = 1 \cdot 2^{10} = 1024 \text{ g},$$

כלומר מעל לקילוגרם אחד!
במשבצת 21 משקל החיטה יהיה:

$$b_{21} = b_1 \cdot q^{20} = 1 \cdot 2^{20} = 1{,}048{,}576 \text{ g} \approx 1000 \text{ kg} = 1 \text{ ton}$$

אם על המשבצת הראשונה נניח גרעין אחד, עלינו להניח על משבצת 11 שקית במשקל קילוגרם אחד, ובמשבצת 21 שק במשקל טון (משקל של מכונית ממוצעת)!

דוגמה 19 פירמידה שיווקית

ברחבי הרשת פורסמה לאחרונה מודעה מפתה:

מחשב לוח יוקרתי ב- 200 ₪!
כל אחד יכול לרכוש מחברה ידועה
טבלט
ב- 200 ₪ בלבד
במקום ב- 1000 ₪!

הפונים קיבלו את ההנחיות הבאות:

בתמורה ל- 200 ₪ תקבלו 4 "כרטיסי זכות", שאותם יש למכור ב- 200 ₪ כל אחד לארבעה חברים. כל אחד מהחברים יקבל בתמורה "כרטיס זכות" לקבלת הטבלט ועוד ארבעה כרטיסים.

לאחר שתצליחו לגבות עבור החברה $4 \times 200 = 800$ ₪ שאספתם מהחברים תקבלו את הטבלט המיוחל. העסקה נראית שווה והוגנת: אכן בתמורה ל- 200 ₪ תקבלו טבלט, אולם רק דבר אחד "קטן" עומד בינכם לבינו: צריך למצוא 4 חברים שכל אחד יסכים לקנות את ה"כרטיס הזכות"...

זאת ועוד, החברה אינה מפסידה, משום שהיא גם מספקת את הטבלט במחירו המלא של 1000 ₪ וגם זוכה במפיצים חדשים!

אף שהעסקה נראית הוגנת, מדובר בהונאה! השיטה מוכרת שנים רבות בשמות שונים: "כדור שלג", "תגובת שרשרת", "פירמידה פיננסית".

בבסיס השיטה – מעורבות כמות גדולה של אנשים, ש- $\frac{1}{5}$ מהם מקבלים את המוצר על חשבונם של $\frac{4}{5}$ מהאנשים האחרים שמחפשים באופן נואש למי למכור את ארבעת "כרטיסי זכות" שבהם השקיעו 200 ₪...

הבה נראה כיצד גדלה כמות האנשים המעורבים בהונאה:

סיבוב $n = 1$ (הרוכש הראשון + 4 כרטיסים שאותם יש למכור): $b_1 = 4$

סיבוב $n = 2$ (לכל אחד מארבעת החברים יש 5 כרטיסים למכירה): $b_2 = 20$

סיבוב $n = 3$ (לכל אחד מ-20 החברים יש 5 כרטיסים למכירה): $b_3 = 100$

סיבוב $n = 4$ (לכל אחד מ-100 החברים יש 5 כרטיסים למכירה): $b_4 = 500$

סיבוב $n = 5$: $b_5 = 2500$

סיבוב $n = 6$: $b_6 = 12500$

סיבוב $n = 7$: $b_7 = 62500$

סיבוב $n = 8$: $b_8 = 125000$

בשלב זה יהיו כרטיסים לכל תושבי עיר כמו ראשון לציון!

חישבו, כמה אנשים יהיו מעורבים בסיבוב ה- 12?

◄ נוודא שהסדרה הנדסית ונחשב את מנת הסדרה: $q = 5$.

$$b_{12} = 4\cdot5^{12-1} = 4\cdot5^{11} = 195{,}312{,}500$$

בסיבוב ה- 12 כל תושבי מדינה בסדר גודל של ארצות הברית יהיו בעלי "זכות רכישה", כאשר $\frac{4}{5}$ מהם מימנו את הרכישה ל- $\frac{1}{5}$ האחרים, ולא יוותרו עוד קונים פוטנציאליים...

תרגילים

.91 רִשמו את חמשת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית (b_n), אם נתונים:

א) $b_1 = 6, q = 2$ ב) $b_1 = -16, q = \frac{1}{2}$

ג) $b_1 = -24, q = -1.5$ ד) $b_1 = 0.4, \ q = \sqrt{2}$

.92 הסדרה (c_n) היא סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון הוא c_1 והמנה q.

בטאו באמצעות c_1 ו- q את:

א) c_6 ב) c_{20} ג) c_{125} ד) c_k ה) c_{k+3} ו) c_{2k}

.93 סדרה (x_n) היא סדרה הנדסית. מצאו:

א) x_7, אם $x_1 = 16, \ q = \frac{1}{2}$ ב) x_8, אם $x_1 = -810, \ q = \frac{1}{3}$

ג) x_8, אם $x_1 = \sqrt{2}, \ q = -\sqrt{2}$ ד) x_6, אם $x_1 = 125, q = 0.2$

.94 סדרה (b_n) היא סדרה הנדסית. מצאו את:

א) b_5, אם $b_1 = \frac{3}{4}, \ q = \frac{2}{3}$ ב) b_4, אם $b_1 = 1.8, \ q = \frac{\sqrt{2}}{3}$

.95 מצאו את האיבר ה-7 ואת נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה ההנדסית:

א) $2, \ -6, \dots$ ב) $-40, \ -20, \dots$

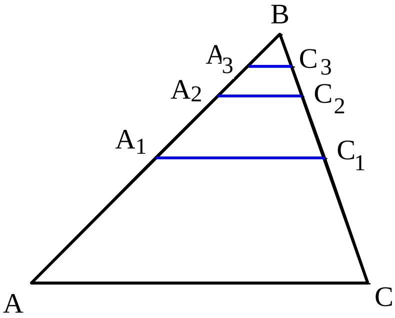
ג) $-0.125, \ 0.25, \dots$ ד) $-10, \ 10, \dots$

96. מצאו את האיבר ה-6 ואת נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה ההנדסית:

א) $48,\ 12,\ \dots$ ב) $-\frac{32}{3},\ \frac{64}{9}$

ג) $-0.001,\ -0.01,\ \dots$ ד) $-100,\ 10,\ \dots$

97. במשולש ABC שירטטו קטע אמצעים A_1C_1.



במשולש A_1BC_1 שירטטו קטע אמצעים A_2C_2,

במשולש החדש שנוצר A_2BC_2 שירטטו קטע אמצעים A_3C_3 וכך הלאה.

מְצאו את שטח המשולש A_9BC_9, אם ידוע ששטח המשולש ABC הוא 768 סמ"ר.

98. מצאו את האיבר הראשון בסדרה ההנדסית (b_n) אם ידוע:

א) $b_6 = 3,\ q = 3$ ב) $b_5 = 17\frac{1}{2},\ q = -2\frac{1}{2}$

99. מצאו את מנת הסדרה ההנדסית (c_n) אם ידוע:

א) $c_5 = -6,\ c_7 = -54$ ב) $c_6 = 25,\ c_8 = 9$

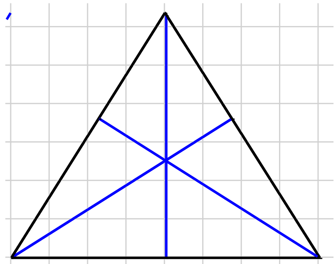
100. סדרה (x_n) היא סדרה הנדסית. מצאו:

א) x_1, אם $x_6 = 0.32,\ q = 0.2$ ב) q, אם $x_5 = -18$, $x_3 = -162$.

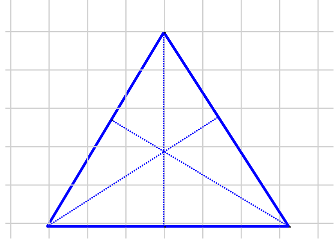
101. בין המספרים 2 ו- 162 רשמו שלושה מספרים כאלה, שיחד עם המספרים הנתונים ייצרו סדרה הנדסית.

102. בסדרה הנדסית (x_n) ארבעה איברים: $2,\ a,\ b,\ \frac{1}{4}$.

מצאו את a ו- b.

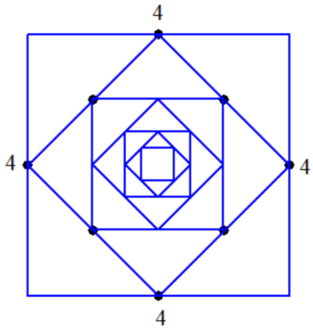


103. מצאו את האיבר ה-6 של סדרה הנדסית (b_n), אם ידוע כי $b_2 = 6$, $b_4 = 24$.



104. נתון משולש שווה צלעות, בעל צלע באורך 8 ס"מ. מקטעי גובה של המשולש הזה בנו משולש שני. מהגבהים של השני בנו משולש נוסף, וכך הלאה. הוכיחו שהיקפי המשולשים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את ההיקף של המשולש ה-6.

105. ✸ נתון ריבוע שאורך צלעו 4 ס"מ.
נקודות האמצע של צלעותיו הן קדקודים של ריבוע שני.
נקודות האמצע של הריבוע השני הֵנָן קדקודים של ריבוע שלישי, וכך הלאה. הוכיחו ששטחי הריבועים מהווים סדרה הנדסית, ומצאו את השטח של הריבוע ה-7.



106. האם המספרים 10, 11 ו- 12 יכולים להיות איברים (לא סדרה הנדסית?

107. המספרים b_m מהווים סדרה הנדסית.
הוכיחו שעבור כל m ו- n $(m < n)$ מתקיים: $b_n^2 = b_{n-m} \cdot b_{m+n}$.

108. בסדרה הנדסית שכל איבריה חיוביים נתון: $b_{m+n} = 8$ ו- $b_{m-n} = 16$.
מצאו את b_m ו- b_n.

109. סדרה מוגדרת באמצעות נוסחת האיבר לפי מקומו.
הוכיחו שהסדרה הנדסית:
א) $b_n = 3 \cdot 2^n$ ב) $b_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}$ ג) $b_n = 5^{n-3}$

110. נתון: $a_n = 3n + 2$.
הוכיחו שמספרים מהסוג $b_n = 2^{a_n}$ מהווים סדרה הנדסית ומצאו את מנת הסדרה.

111. בין המספרים 243 ו- 1 הציבו ארבעה מספרים, אשר יחד עם המספרים הנתונים מהווים סדרה הנדסית. מהם המספרים?

112. בין המספרים 8 ו- 128 הציבו שלושה מספרים אשר כל אחד מהם הוא ממוצע הנדסי של שכניו.

113. נתון כי x_1 ו- x_2 הם פתרונות המשוואה $x^2 + ax + 4 = 0$, ו- x_3 ו- x_4 הם פתרונות המשוואה $x^2 + bx + 16 = 0$. ידוע כי המספרים x_1, x_2, x_3 ו- x_4 (בסדר זה) מהווים סדרה הנדסית. מצאו את a ו- b.

114. האיבר ה-4 של סדרה הנדסית גדול מהאיבר ה-2 ב- 24, וסכום האיברים ה-2 וה-3 הוא 6. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

115. האיבר הראשון בסדרה הנדסית (b_n) הוא 1.
עבור איזו מנת הסדרה ערך הביטוי $4b_2 + 5b_3$ יהיה מינימלי?

116. סכום שלושת המספרים המהווים סדרה הנדסית הוא 13, וסכום הריבועים שלהם הוא 91. מצאו את המספרים.

תרגילים אינטראקטיביים | שאילתות מפתח | ChatGPT

תרגיל 2.1 נתונה סדרה הנדסית: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ ...\ ,\ a_n$ שבה $a_1=4, q=4$.
מצאו את האיבר a_8 של הסדרה.

תרגיל 2.2 נתונה סדרה הנדסית $a_1\ ,\ a_2\ ,\ ...\ ,\ a_n$ שבה $a_1=6, a_2=-24$.
מצאו את האיבר a_8 של הסדרה.

תרגיל 2.3 נתונה סדרה הנדסית: $a_1\ ,\ a_2\ ,\ ...\ ,\ a_n$ שבה מתקיים:
$$a_1=5, a_2=10, a_n=160$$
מצאו את המספר n .

תרגיל 2.4 נתונה סדרה הנדסית $a_1\ ,\ a_2\ ,...\ ,\ a_n$ שבה $a_1=18, a_6=\frac{64}{27}$.
מצאו את האיבר a_4 של הסדרה.

תרגיל 2.5 נתונה סדרה הנדסית $a_1\ ,\ a_2\ ,\ ...\ ,\ a_n$ שבה מתקיים:
$$a_5=\frac{5}{81}, a_8=\frac{5}{2187}$$
מצאו את האיבר a_1 ואת המנה q של הסדרה.

תרגיל 2.6 נתונים שלושה איברים עוקבים של סדרה הנדסית:
$$\sqrt{x}\ ,\quad \sqrt{16}\ ,\quad \sqrt{x}+15 .$$
מצאו את x.

תרגיל 2.8 לשלושה איברים עוקבים של סדרה הנדסית a_n, a_{n+1}, a_{n+2} מתקיים:
$$a_{n+2}=6a_n+a_{n+1}$$
מצאו את המנה q של הסדרה.

שיעורי בית אינטראקטיביים (עם הערכה)

תרגיל 2.1 נתונה סדרה הנדסית: $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה $a_1 = 4, q = 4$.
מצאו את האיבר a_8 של הסדרה.

תרגיל 2.2 נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה $a_1 = 6, a_2 = -24$.
מצאו את האיבר a_8 של הסדרה.

תרגיל 2.3 נתונה סדרה הנדסית: $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה מתקיים:

$$a_1 = 5, a_2 = 10, a_n = 160$$

מצאו את המספר n .

תרגיל 2.4 נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה $a_1 = 18, a_6 = \frac{64}{27}$.
מצאו את האיבר a_4 של הסדרה.

תרגיל 2.5 נתונה סדרה הנדסית $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה מתקיים:

$$a_5 = \frac{5}{81}, a_8 = \frac{5}{2187}$$

מצאו את האיבר a_1 ואת המנה q של הסדרה.

תרגיל 2.7 נתונים שלושה איברים עוקבים של סדרה הנדסית:

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt{324}, \quad \sqrt{x}+27 .$$

מצאו את x.

תרגיל 2.8 לשלושה איברים עוקבים של סדרה הנדסית a_n, a_{n+1}, a_{n+2} מתקיים:

$$a_{n+2} = 6a_n + a_{n+1}$$

מצאו את המנה q של הסדרה.

תשובות

.91 א) $6\,,12\,,24\,,48\,,96$; ב) $-16\,,-8\,,-4\,,-2\,,-1$;

ג) $-24\,,36\,,-54\,,81\,,-121.5$; ד) $\frac{2}{5}\,,\frac{2\sqrt{2}}{5}\,,\frac{4}{5}\,,\frac{4\sqrt{2}}{5}\,,\frac{8}{5}$

.92 א) $c_6=c_1\cdot q^5$ ב) $c_{20}=c_1\cdot q^{19}$; ג) $c_{125}=c_1\cdot q^{124}$;

ד) $c_k=c_1\cdot q^{k-1}$ ה) $c_{k+3}=c_1\cdot q^{k+2}$; ו) $c_{2k}=c_1\cdot q^{2k-1}$.

.93 א) $x_7=\frac{1}{4}$; ב) $x_8=-\frac{10}{27}$; ג) $x_8=-16$; ד) $x_6=0.04$.

.94 א) $b_5=\frac{4}{27}$; ב) $b_4=\frac{4}{45}$

.95 א) $a_n=2\cdot(-3)^{n-1}$; $a_7=1458$; ב) $a_n=-40\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{-80}{2^n}$; $a_7=-\frac{5}{8}$;

ג) $a_n=-0.125\cdot(-2)^{n-1}=(-2)^{n-4}$; $a_7=-8$; ד) $a_n=10\cdot(-1)^n$; $a_7=-10$.

.96 א) $a_n=48\cdot(0.25)^{n-1}=\frac{192}{4^n}$; $a_6=\frac{3}{64}$; ב) $a_n=\frac{64}{9}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$; $a_6=-54$;

ג) $a_n=-0.001\cdot10^{n-1}=-10^{n-4}$; $a_6=-100$;

ד) $a_n=-100\cdot(-0.1)^{n-1}=-(-0.1)^{n-3}$; $a_6=0.001$.

.97 $S_{A_9BC_9}=\frac{3}{1024}$

.98 א) $b_1=\frac{1}{81}$; ב) $b_1=-\frac{112}{625}$

.99 א) $q=\pm3$; ב) $q=\pm\frac{3}{5}$

.100 א) $x_1=1000$; ב) $q=\pm\frac{1}{3}$

.101 $2, 6, 18, 54, 162$ או $2, -6, 18, -54, 162$.

.102 $a=1\ ,\ b=\frac{1}{2}$

.103 $b_6=96$.

.104 $P_6=\frac{27\sqrt{3}}{4}$.

.105 $S_7=\frac{1}{4}$.

.106 לא.

.108 $b_m=8\sqrt{2},\ b_n=2^{\frac{m}{2n}+3}$

.109

.110 $q=8$

.111 $1, 3, 9, 27, 81, 243$

.112 $8, 16, 32, 64, 128$.

.113 $a=-\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{2}+2\right), b=-2\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{2}+2\right)$ או $a=\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{2}+2\right), b=2\sqrt[4]{2}\left(\sqrt{2}+2\right)$

.114 $b_1=\frac{1}{5}$; $q=5$

.115 $q_{\min}=-\frac{2}{5}$

.116 $1\ ,\ 3\ ,\ 9$

3

15. סכום של n איברים ראשונים של סדרה הנדסית

כיצד נחשב את מספר הגרעינים שביקש המתמטיקאי סטא על לוח השח-מט?

כיוון שמספרי הגרעינים מהווים סדרה הנדסית שבה האיבר הראשון $b_1 = 1$ והמנה $q = 2$, יודעים אנו לחשב את מספר הגרעינים בכל משבצת: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} = 2^{n-1}$.

נחשב את סכום מספרי הגרעינים על כל 64 המשבצות:

$$S_{64} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}$$

נכפיל את שני האגפים של השוויון הזה במנת הסדרה ($q = 2$):

$$2S_{64} = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + \ldots + 2\cdot 2^{63} =$$

$$= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{64}$$

נחסיר ביטוי ראשון מהשני:

$$2\cdot S_{64} - S_{64} = (\underline{2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots} + 2^{64}) - (1 + \underline{2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63}})$$

$$= \ldots$$

מהביטוי בסוגריים השמאליים תישאר רק החזקה 2^{64}, ומהשני רק (1-).

לכן התוצאה היא: $S_{64} = 2^{64} - 1$

זה מספר עצום. הוא גדול בהרבה אף מכמות החיטה שגדלה על פני כדור הארץ...

נפתֵח נוסחה לסכום של n איברים ראשונים של סדרה הנדסית כלשהי.

ניעזר בדרך שבה מצאנו את הסכום S_{64}:

נסמן ב- S_n את הסכום של n איברים ראשונים של סדרה הנדסית (b_n):

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n$$

נכפיל את שני האגפים ב- q:

$$S_n q = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_n q$$

כיוון ש- $b_1 q = b_2,\ b_2 q = b_3,\ b_3 q = b_4,\ \ldots, b_{n-1} q = b_n$

נקבל: $S_n q = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q$

נחסיר ממנו את הביטוי עבור S_n:

$$S_n q - S_n =$$

$$(\underline{b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n} + b_n q) - (b_1 + \underline{b_2 + b_3 + \ldots + b_n}) = b_n q - b_1$$

נחלץ S_n: $S_n(q-1) = b_nq - b_1$

$$\boxed{S_n = \frac{b_nq - 1}{q - 1}} \qquad (1)$$

פיתחנו <u>נוסחה לסכום של n איברים ראשונים של סדרה הנדסית</u> שבה המנה אינה 1.

אם $q = 1$ כל האיברים שווים לאיבר הראשון, ו- $S_n = n \cdot b_1$.

אם נתונים b_1 ו- q (b_n לא ידוע), נוח יותר להשתמש בנוסחת סכום אחרת:

נציב ב- (1) את הביטוי לאיבר הכללי ($b_n = b_1q^{n-1}$):

$$S_n = \frac{b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - b_1}{q-1} = \frac{b_1 \cdot q^n - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}$$

לכן:

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, \quad q \neq 1} \qquad (2)$$

דוגמה 1 מְצאו סכום של עשרת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית (b_n),
שבה $b_1 = 3$ ו- $q = \frac{1}{2}$.

◄ כיוון שנתונים b_1 ו- q, אפשר להשתמש בנוסחה (2).

נציב נתונים בנוסחה ונקבל:

$$S_{10} = \frac{b_1(q^{10} - 1)}{q-1} = \frac{3 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{3 \cdot \left(\frac{1}{1024} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} = 6 - \frac{3}{512} = 5\frac{509}{512}$$

דוגמה 2 בסדרה הנדסית נתונים מנה $q = \frac{1}{2}$ וסכום של שישה איברים ראשונים:
$S_6 = 252$. מצאו את האיבר הראשון.

◄ ניעזר בנוסחה (2), ונציב בה את הנתונים:

$$252 = \frac{b_1\left(\frac{1}{2^6} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1}$$

מכאן נחלץ את b_1:

$$252 = 2b_1\left(1 - \frac{1}{64}\right), \quad 252 = \frac{b_1 \cdot 63}{32}, \quad b_1 = 128$$ ◁

דוגמה 3 סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית הוא: $S_n = -93$.

האיבר הראשון של הסדרה הוא: $b_1 = -3$, והמנה $q = 2$. מצאו את n.

◀ נציב נתונים בנוסחה (2):

$$-93 = \frac{-3\cdot(1 - 2^n)}{1 - 2}$$

מכאן מקבלים: $-31 = 1 - 2^n,\ \underline{2^n = 32}$

במשוואה זו הנעלם n נמצא *במעריך* של חזקה, לכן קוראים לה **משוואה מעריכית**.

אחת משיטות הפתרון של משוואה מעריכית היא להציג את שני אגפיה כחזקות בעלות בסיס זהה: $2^n = 2^5,\ n = 5$. ▷

דוגמה 4 הסדרה $5, 15, 45, \dots, 1215, \dots$ היא סדרה הנדסית.

מצאו את הסכום $5 + 15 + 45 + \dots + 1215$.

◀ כיוון ש- $b_1 = 5$ ו- $b_2 = 15$ מסיקים ש- $q = 3$. נתון גם $b_n = 1215$, אולם המספר הסידורי n של האיבר האחרון אינו נתון, לכן נוח יותר להיעזר בנוסחה (1):

$$S_n = \frac{b_n\cdot q - b_1}{q - 1} = \frac{1215\cdot 3 - 5}{3 - 1} = \frac{3645 - 5}{2} = 1820 \qquad \triangleleft$$

דוגמה 5 נתונה נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה הנדסית (b_n): $b_n = 3\cdot 2^n$.

מצאו את הסכום של שמונת האיברים הראשונים בסדרה.

◀ תחילה נחשב את האיבר הראשון: $b_1 = 3\cdot 2^1 = 6$ ואת מנת הסדרה:

$$q = \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{3\cdot 2^n}{3\cdot 2^{n-1}} = 2$$

כעת נשתמש בנוסחה (2) לסכום הסדרה:

$$S_8 = \frac{b_1(q^8 - 1)}{q - 1} = \frac{6(2^8 - 1)}{2 - 1} = 1530 \qquad \triangleleft$$

דוגמה 6 מצאו את הסכום:

$$S_n = 1 + 2\sqrt{2} + 3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + \dots + n\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$$

◀ נכפיל את שני אגפי השוויון ב- $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2}\cdot S_n = \sqrt{2} + 2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 + 3\cdot\left(\sqrt{2}\right)^3 + \dots + n\cdot\left(\sqrt{2}\right)^n$$

נחסיר מהשוויון הזה את השוויון המקורי, נכנס איברים דומים ונקבל:

$$\sqrt{2}S_n - S_n = n\cdot(\sqrt{2})^n - \left(1+\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2 + \ldots + (\sqrt{2})^{n-1}\right)$$

הביטוי בסוגריים הוא סכום של סדרה הנדסית:

$$1 + \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 + \ldots + (\sqrt{2})^{n-1} = \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

לכן:

$$\sqrt{2}S_n - S_n = n\cdot(\sqrt{2})^n - \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}$$

מכאן נחלץ את S_n:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(n\cdot(\sqrt{2})^n - \frac{(\sqrt{2})^n - 1}{\sqrt{2} - 1}\right) \quad \triangleleft$$

תרגילים

.117 מצאו את הסכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית אם נתון:

א) $b_1 = \frac{1}{2},\ q = 2,\ n = 6$ ב) $b_1 = 1,\ q = -\frac{1}{3},\ n = 4$

ג) $b_1 = -2,\ q = \frac{1}{2},\ n = 5$ ד) $b_1 = -5,\ q = -\frac{2}{3},\ n = 5$

ה) $b_1 = 6,\ q = 1,\ n = 200$ ו) $b_1 = -4,\ q = 1,\ n = 100$

.118 מצאו את הסכום של שבעת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית:

א) $5,\ 10,\ 20,\ \ldots$ ב) $2,\ 6,\ 18,\ \ldots$

.119 מְצאו בסדרה הנדסית את:

א) b_1 ו- b_7, אם נתונים: $q = 2$, $S_7 = 635$

ב) b_1 ו- b_8, אם נתונים: $q = -2$, $S_8 = 85$

.120 מצאו את מספר האיברים בסדרה הנדסית, אם נתון:

א) $S_n = 189,\ b_1 = 3,\ q = 2$ ב) $S_n = 635,\ b_1 = 5,\ q = 2$

ג) $S_n = 170,\ b_1 = 256,\ q = -\frac{1}{2}$ ד) $S_n = -99,\ b_1 = -9,\ q = -2$

.121 מצאו בסדרה הנדסית את:

א) n ו- b_n, אם נתון: $b_1 = 7,\ q = 3,\ S_n = 847$

ב) n ו- b_n, אם נתון: $b_1 = 8,\ q = 2,\ S_n = 4088$

ג) n ו- q, אם נתון: $b_1 = 2,\ b_n = 1458,\ S_n = 2186$

ד) n ו- q, אם נתון: $b_1 = 1,\ b_n = 2401,\ S_n = 2801$

.122 מצאו את סכום המספרים, אם ידוע שכולם הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית:

א) $1 + 2 + 4 + \dots + 128$ ב) $1 + 3 + 9 + \dots + 243$

ג) $-1 + 2 - 4 + \dots + 128$ ד) $5 - 15 + 45 - \dots + 405$

.123 מצאו בסדרה הנדסית את b_5 ו- S_4, אם ידוע כי:

א) $b_2 = 15,\ b_3 = 25$ ב) $b_2 = 14,\ b_4 = 686,\ q > 0$

.124 בסדרה הנדסית נתונה נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה:

א) $b_n = 3\cdot 2^{n-1}$; מצאו את S_5 ב) $b_n = -2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$; מצאו את S_6.

.125 מצאו בסדרה הנדסית על פי הנתונים:

א) $S_3 = 195$, $b_3 = 135$; מצאו: b_1 ו- q

ב) $S_3 = 372$, $b_1 = 12$; מצאו: b_3 ו- q

.126 מצאו בסדרה הנדסית את:

א) q, אם נתון: $b_1 = 1$ ו- $b_3 + b_5 = 90$;

ב) q, אם נתון: $b_2 = 3$ ו- $b_4 + b_6 = 60$;

ג) S_{10}, אם נתון: $b_1 - b_3 = 15$ ו- $b_2 - b_4 = 30$;

ד) S_5, אם נתון: $b_3 - b_1 = 24$ ו- $b_5 - b_1 = 624$.

.127 הוכיחו שהסדרה (b_n) הנדסית, ומצאו את הסכום של n איבריה הראשונים, אם נתונה נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה:

א) $b_n = 0.2\cdot 5^n$ ב) $b_n = 3\cdot 2^{n-1}$ ג) $b_n = 3^{1+n}$

.128 מצאו את הסכום של n איבריה הראשונים של הסדרה ההנדסית:

א) $1, 3, 3^2, \dots$ ב) $2, 2^2, 2^3, \dots$

ג) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ ד) $1, -x, x^2, \dots,\ x \neq -1$

ה) $1, x^2, x^4, \dots,\ x \neq \pm 1$ ו) $1, -x^3, x^6, \dots,\ x \neq -1$

129. מצאו את הסכום של ששת איבריה הראשונים בסדרה הנדסית, שבה האיבר הראשון הוא 2 והחמישי 162, אם ידוע שהאיברים בעלי המספר הסידורי n אי זוגי הם חיוביים, ובעלי המספר הסידורי n זוגי שליליים.

130. מצאו את הסכום של שבעת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית (b_n), שבה $b_2 = 6$ ו- $b_4 = 54$, אם ידוע שכל איבריה חיוביים.

131. **חידה מ"אלף לילה ולילה"**

לסיכום

אישה צעירה נכנסה לגן בארמון המלך וקטפה סל תפוחים. כדי לצאת מהגן עליה לצאת דרך ארבעה שערים, שליד כל אחד מהם ניצב שומר. תמורת המעבר נתנה האישה לשומר הראשון חצי מהתפוחים שקטפה, לשני – חצי מהתפוחים שנותרו, וכך הלאה עם השומר השלישי והרביעי.
לבסוף נותרו לה עשרה תפוחים. כמה תפוחים היא קטפה?

132. סכום שמונת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית: $S_8 = \frac{85}{64}$, מנת הסדרה: $q = -\frac{1}{2}$. מצאו את האיבר הראשון b_1.

133. סכום של n האיברים הראשונים בסדרה הנדסית הוא $S_n = 25\frac{34}{81}$, האיבר הראשון $b_1 = 9$, והאיבר ה- n-י הוא $b_n = \frac{64}{81}$. מצאו את n.

134. סכום n איברים ראשונים בסדרה הנדסית מוגדר באמצעות הנוסחה: $S_n = 4(3^n - 1)$. מצאו את b_1 ו- q.

135. ידוע כי בסדרה הנדסית $S_2 = 4$ ו- $S_3 = 13$. מצאו את S_5.

136. הוכיחו כי עבור סדרה הנדסית, הביטוי $\frac{S_{n+2} - S_n}{S_n - S_{n-2}}$ תלוי ב- q בלבד.

137. ידוע כי סכום האיברים בסדרה הנדסית ללא האיבר הראשון הוא $63\frac{1}{2}$, סכום האיברים ללא האיבר האחרון 127, וסכום האיברים ללא השניים הראשונים והשניים האחרונים 30. מצאו את b_1 ו- q.

138. פתרו את המשוואה: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{109} = 0$

139. חִשבו את ערך הביטוי: $\frac{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{11}}{1 + 2 + \ldots + 2^5}$

140. מצאו את הסכום: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2$

141. הוכיחו שבסדרה הנדסית סכום המספרים במקומות זוגיים מקיים את השוויון:

$$b_2+b_4+\ldots+b_{2n}=\frac{q}{1+q}S_{2n}$$

הדרכה

א. בדקו אם סדרת האיברים במקומות זוגיים מהווים סדרה הנדסית: רשמו שלושה איברים עוקבים $b_{2n}, b_{2n+2}, b_{2n+4}$ באמצעות הנוסחה לאיבר לפי מקומו, לדוגמה:

$$b_{2n+2}=b_1q^{2n+2}$$

וודאו כי האיבר האמצעי b_{2n+2} שווה לממוצע הנדסי של שני האיברים האחרים. קיום שוויון זה מהווה תנאי הכרחי לכל איברי סדרה הנדסית.

ב. מצאו את מנת הסדרה באמצעות הגדרת המנה כיחס שני איברים סמוכים, לדוגמה:

$$q_1=\frac{b_{2n+4}}{b_{2n+2}}$$

ג. חשבו, כמה איברים בסדרה, והשתמשו בנוסחה לסכום סדרה הנדסית כדי להוכיח את השוויון.

142. בסדרה הנדסית האיבר הראשון חיובי. מה תהיה מנת הסדרה כדי שסכום שלושת האיברים הראשונים יהיה מינימלי?
בטאו את הסכום המינימלי באמצעות האיבר הראשון.

143. סכום שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה הוא 13, ומכפלתם 27.
מצאו את סכום חמשת האיברים הראשונים.

144. ההפרש בין האיבר הרביעי לאיבר הראשון בסדרה הנדסית הוא 52, וסכום שלושת האיברים הראשונים 26. מצאו את סכום ששת האיברים הראשונים.

ChatGPT **תרגילים אינטראקטיביים** שאילתות מפתח

תרגיל 2.9 נתונה סדרה הנדסית $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n$ שבה $a_1=4, q=4$.
מצאו את הסכום של 7 האיברים הראשונים של הסדרה.

תרגיל 2.10 נתונה סדרה הנדסית $a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_n$ שבה מתקיים:

$$a_1=3, q=4, a_n=49152$$

מצאו את המספר n וסכום של n האיברים הראשונים בסדרה.

סדרה הנדסית – תרגילים אינטראקטיביים עם פתרונות

9.1 מנת הסדרה ההנדסית שווה ל- $\frac{1}{3}$, האיבר הרביעי של הסדרה שווה ל- $\frac{1}{54}$, וסכום כל איבריה שווה ל- $\frac{121}{162}$. מצאו את מספר האיברים.

9.2 סכום שלושת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית שווה ל- 91. אם להוסיף לאיברים האלה בהתאמה 25, 27 ו- 1 , אזי תיווצר סדרה חשבונית. מצאו את האיבר השביעי של הסדרה ההנדסית.

9.3 סכום שלושת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית שווה ל- $\frac{148}{9}$.
ידוע כי האיברים האלה מהווים בהתאמה, האיבר הראשון, הרביעי והשמיני של סדרה חשבונית. מצאו את הסכום של אברעת האיברים הראשונים של הסדרה ההנדסית.

9.4 סכום של שלושה מספרים שיוצרים סדרה הנדסית שווה ל- 26. אם להוסיף למספרים אלה בהתאמה, 1, 6 ו- 3, נקבל שלושה מספרים שיוצרים סדרה חשבונית. מצאו את המספרים.

תשובות

117. א) $S_6=31\frac{1}{2}$; ב) $S_4=\frac{20}{27}$; ג) $S_5=-3\frac{7}{8}$; ד) $S_5=-3\frac{32}{81}$;
ה) $S_{200}=1200$; ו) $S_{100}=-400$ .118 א) ד $S_7=635$; ב) $S_7=2186$

119. א). $b_1=5$, $b_7=320$; ב). $b_1=-1$, $b_8=128$

120. א) $n=6$; ב) $n=7$; ג) $n=8$; ד) $n=5$. .121 א) $b_5=567$, $n=5$
ב) $b_9=2048$, $n=9$ ג) $q=3$, $n=7$ ד) $q=7$, $n=5$.

122. א) 255 ; ב) 364 ; ג) 85 ; ד) 305 .

123. א) $S_4=90\frac{2}{3}$, $b_5=\frac{625}{9}$; ב) $S_4=800$, $b_5=4802$.

124. א) $S_5=93$; ב) $S_6=-1\frac{31}{32}$ .125 א) $b_1=15$, $q=3$ או $b_1=240$, $q=-\frac{3}{4}$
ב) $b_3=300$, $q=5$ או $b_3=432$, $q=-6$.

126. א) $q=\pm3$; ב) $q=\pm2$; ג) $S_{10}=-5115$; ד) $S_5=781$ או $S_5=521$.

127. א) $S_n=\frac{5^n-1}{4}$; ב) $S_n=3\cdot\left(2^n-1\right)$; ג) $S_n=\frac{9\cdot\left(3^n-1\right)}{2}$.

128. א) $S_n=\frac{3^n-1}{2}$; ב) $S_n=2\cdot\left(2^n-1\right)$; ג) $S_n=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{3}{2}}$;
ד) $S_n=\frac{1-(-x)^n}{x+1}$; ה) $S_n=\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}$; ו) $S_n=\frac{1-(-x)^{3n}}{x^3+1}$.

129. $S_6=-364$ .130 $S_7=2186$ .131 160 תפוחים

132. $b_1=2$ .133 $n=7$ .134 $b_1=8$, $q=3$.

135. $S_5=121$ או $S_5=11\frac{5}{16}$ .136 הביטוי שווה ל- q^2+1

137. $b_1=64$, $q=2$ .138 $x=-1$ .139 65

140. $\frac{\left(x^{2n+2}+1\right)\left(x^{2n}-1\right)}{x^{2n}\left(x^2-1\right)}+2n$ .142 $S_3=\frac{3}{4}a_1$, $q_{\min}=-\frac{1}{2}$

143. $S_5=121$ .144 $S_6=728$

16. **גבול של סדרה** (סדרה אינסופית השואפת לאפס) **- העשרה**

קיימות דוגמאות רבות של ערכים הקשורים ביניהם כך שכשערך אחד גדֵל עד אינסוף, האחר קטֵן עד אפס.

לדוגמה, נניח שיש ברשותנו 1 ק״ג של חומר רדיואקטיבי רדיום - יסוד הפולט קרינה רדיואקטיבית ומתפרק עם הזמן ליסודות אחרים.

ידוע שזמן מחצית החיים של רדיום הוא $T = 1590$ שנה, כלומר בחלוף הזמן הזה מסת הרדיום תפחת בחצי: $\frac{1}{2} \cdot 1 = 0.5\ (kg)$.

בחלוף פרק הזמן $t = 2T$ מסת החומר שיישאר תהיה חצי מ- 0.5 ק״ג כלומר $\frac{1}{2^2} \cdot 1 = 0.25\ (kg)$, בחלוף פרק הזמן $t = 3T$ מסת החומר הנשאר תהיה $\frac{1}{2^3} \cdot 1 = 0.125\ (kg)$ וכך הלאה.

ככלל, בחלוף פרק זמן של $t = nT$ מסת החומר תהיה $\frac{1}{2^n}$ ק״ג.

קיבלנו, למעשה, סדרה אינסופית $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n}, ...$ שבה האיבר ה- n-י שווה למסת החומר שיישאר בחלוף n מחזורים של זמן מחצית החיים.

במהלך הזמן מסת החומר שיישאר תהיה קטנה מכל מספר חיובי קטן ככל שיהיה.

סדרות מסוג זה יכולות לתאר תופעות שונות בטבע: ירידת לחץ אטמוספרי עם העלייה מעל פני הקרקע; ירידת כוח המשיכה של כדור הארץ כאשר גוף מתרחק ממנו ועוד.

במתמטיקה סדרה מסוג זה נקראת **סדרה אינסופית השואפת לאפס.**

האם כל סדרה אינסופית יורדת שואפת לאפס?

לדוגמה, נתבונן בסדרה שבה $a_n = \frac{n+1}{n}$.

ענו על השאלות הבאות:

א. האם הסדרה עולה או יורדת?

◄ כאשר n גדֵל, גם מונה השבר וגם מכנהו הולכים וגדֵלים, לכן במבט ראשון אי אפשר לדעת. ניעזר בפיתוח אלגברי:

$$\frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

רואים כי האיבר השני הולך וקטֵן, לכן הסדרה יורדת.

ב. האם קיים n כזה שעבורו יתקיים $a_n < 1$?

◀ אם n כזה קיים, עבורו יתקיים: $\frac{n+1}{n} < 1$.

נפתור את האי שוויון ונמצא את n:

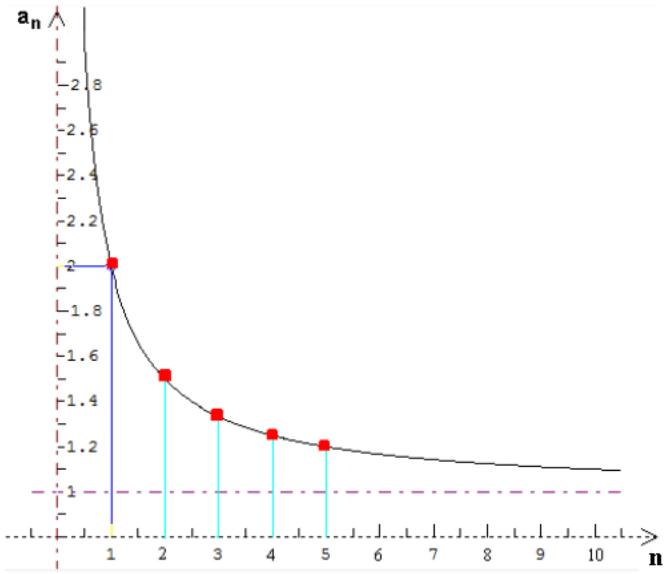
כיוון ש- n חיובי, מותר להכפיל את שני האגפים ב- n:

$$n + 1 < n, \;\; 1 < 0 \; ???$$

קיבלנו סתירה, לכן לאי שוויון זה אין פתרון, כלומר כל איברי הסדרה גדולים מ- 1, כלומר הסדרה אינה שואפת לאפס.

ג. מלאו את טבלת הערכים ושרטטו את גרף הסדרה עבור חמשת האיברים הראשונים של הסדרה (רשמו את המספרים בדיוק של אלפית):

n	1	2	3	4	5
a_n	2				



מהגרף אפשר לראות שאיברי הסדרה **שואפים** ל- 1, אולם נשארים גדולים מ- 1.

עד כמה קרוב הם מתקרבים לערך זה?

נסו למצוא, החל מאיזה n ה"מרחק" בין a_n ל- 1 יהיה קטן מאלפית?

כדי לעשות זאת, רשמו את הבעיה בשפת המתמטיקה: $a_n - 1 < 0.001$, $n = ?$.

נרשום במקום a_n את ביטויו (הנוסחה לאיבר לפי מקום):

$$\frac{n+1}{n} - 1 < 0.001$$

פתרו את האי שוויון ומצאו את n.

הדרכה

$$1 + \frac{1}{n} - 1 < 0.001, \ \ \frac{1}{n} < 0.001, \ \ n > 1{,}000$$

כלומר החל מהאיבר הנמצא במקום 1000 בסדרה, כל האיברים קרובים ל- 1 בפחות מ- 0.001.

האם יש איברים בסדרה הנ"ל הקרובים ל- 1 בפחות ממיליונית (0.000,001)?

או ממיליארדרית (0.000,000,001)?

נסו למצוא את ערכי n המתאימים למקרים אלה.

התבוננו שוב בסדרה שבה $a_n = \frac{n+1}{n}$.

האם זאת סדרה חשבונית? או הנדסית?

רמז כדי לבדוק את סוג הסדרה נוח יותר להציג את הנוסחה לאיבר ה- n- י בדרך הבאה:

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$$

מכאן רואים שהסדרה מורכבת משתי סדרות: אחת **קבועה** (כל איבריה שווים ל- 1) ושנייה יורדת.

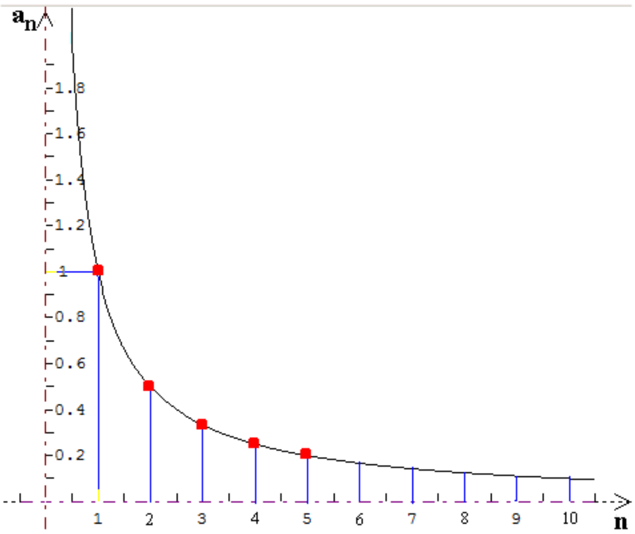
הוכיחו את הטענה הזאת.

הדרכה השוו עם דוגמה 7 (עמ' 22) ותרגיל 41.

האם קיים ערך שאיברי הסדרה **שואפים** אליו, כלומר מגיעים אליו קרוב מכל מספר שנמציא, קטן ככל שיהיה?

מלאו את טבלת הערכים של איברי הסדרה השנייה $\left(\frac{1}{n}\right)$, ושרטטו גרף הסדרה עבור הערכים האלה:

n	1	2	3	4	5
a_n	1				



איזו השערה אפשר להעלות לגבי הערך שאליו שואפים איברי הסדרה?

ננסה לנסח ולהוכיח את ההשערה בדרך אלגברית:

טענה 1 סדרה $\left(\frac{1}{n}\right)$ היא אינסופית שואפת לאפס.

הוכחה

נבחר מספר קטן כלשהו ε.

עלינו להוכיח שקיים n כזה, שאיבר ה-n-י של הסדרה קטן מהמספר הקטן שבחרנו:

$$a_n = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

כיוון שהסדרה יורדת, כל האיברים הנמצאים במקומות "רחוקים יותר" יהיו קטנים

מ- a_n, כלומר גם הם קטנים מ- ε.

כדי למצוא את n, נפתור את האי שוויון $\frac{1}{n} < \varepsilon$:

נכפיל את שני האגפים ב- n, ונקבל:

$$1 < \varepsilon \cdot n \implies n > \frac{1}{\varepsilon}$$

נסמן ב- N מספר שלם הגדול מ- $\frac{1}{\varepsilon}$, והקרוב ביותר אליו.

אזי כל איברי הסדרה a_m הנמצאים במקומות $m > N$ יהיו קטנים מ- ε.

כיוון שאפשר לבחור מספר ε קטן ככל שיהיה, מסיקים כי איברי הסדרה הנמצאים במקומות מספיק רחוקים מתחילתה, "שואפים" ל- 0.

לדוגמה, נמצא, החל מאיזה n איברי הסדרה יהיו קטנים מ- $\varepsilon = 0.006$.

נפתור את האי שוויון $\frac{1}{n} < 0.006$: $n > \frac{1}{0.006} = 166.67$

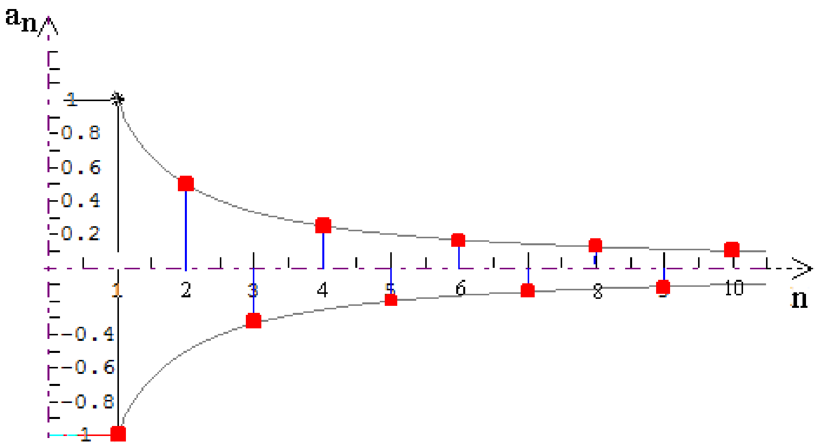
המספר השלם הקרוב ביותר הוא: $N = 167$.

לכן, כל איברי הסדרה שמספרם $n = 167, 168, \ldots$ קטנים מ- 0.006.

סדרה אינסופית יכולה לשאוף לאפס גם במקרה כאשר היא אינה יורדת.

לדוגמה, סדרה בעלת סימני איברים מתחלפים: $\left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)$ (דוגמה 10, עמ' 5).

נשרטט את גרף הסדרה:



מהגרף רואים, כי איברי הסדרה מתקרבים לציר n (שבו $a = 0$), כלומר **שואפים ל- 0**, כאשר n שואף לאינסוף. אולם, להבדיל מהסדרה $\left(\frac{1}{n}\right)$, ההפרש בין ערך האיבר לבין הערך "הגבולי" (0) מחליף סימן מאיבר לאיבר הסמוך לו, והתנאי ל"התקרבות" האיבר ל- 0 יהיה: $|a_n| < \varepsilon$.

תרגילים

145. נתונה סדרה (α_n), כאשר $\alpha_n = \frac{15}{n^2}$. מצאו את α_1, α_3, α_{10}, α_{30}, α_{100}, α_{300}.
מאיזה n מתחלי להתקיים אי שוויון $\alpha_n < 0.0015$?

146. מצאו מספר טבעי N שעבור $n > N$ יתקיים אי שוויון $\frac{1}{3n+5} < \varepsilon$
ומצאו N עבור $\varepsilon = 1; 0.1; 0.05; 0.001$.

147. מצאו מספר טבעי N שעבור $n > N$ יתקיים אי שוויון $|\alpha_n| < \varepsilon$, ומצאו N עבור $\varepsilon = 1; 0.1; 0.05; 0.001$ עבור הסדרות הבאות:

א) $\alpha_n = \frac{1000}{\sqrt{n+1}}$

ב) $\alpha_n = \frac{n^2 - 1}{3n^2 + 5}$

ג) $\alpha_n = \frac{2n + 5}{3n^2 - 2}$

ד) $\alpha_n = \frac{\sqrt{n} - 1}{n}$

148. ברשותנו 1 ק"ג של חומר רדיואקטיבי וזמן מחצית החיים T.
כעבור כמה זמן $t = nT$ תישאר מכמות זו מסה לא גדולה מ- 10 גרם,
אם החומר הוא:

א) יוד רדיואקטיבי ($T = 8$ יממות)

ב) פלוטוניום רדיואקטיבי ($T \approx 24$ שנים)?

17. גבול של סדרה (מקרה כללי) (העשרה)

נחזור למקרה ההתפרקות של רדיום:
כיוון שהוא פולט קרינה רדיואקטיבית מסוכנת, מאחסנים אותו במכלים מיוחדים.
נניח שמסת המכל שבו מאוחסן 1 ק"ג של רדיום היא m ק"ג.
נשקול את המכל ברגעי זמן השווים למכפלות של זמן מחצית החיים T:

$t = T$, $t = 2T$, ..., $t = nT$, ... נקבל את הסדרה: $m_n = m + \frac{1}{2^n}$,
כאשר m היא מסת המכל ו- $\frac{1}{2^n}$ מסת החומר שנשאר בזמן $t = nT$.

ההפרש בין המסות m_n ו- m: $m_n - m = \frac{1}{2^n}$

הפרש זה הוא מסת החומר שנשאר, והיא הולכת וקטֵנה עד אפס כעבור זמן ארוך מאוד.

ערכי המסה של המכל עם רדיוס m_n **שואפים** למסת המכל עצמו m.

סדרת המספרים (m_n) מתאפיינת בכך שקיים מספר m שעבורו סדרת ההפרשים $(m_n - m)$ היא סדרה אינסופית קטנה. במקרה זה אומרים שהסדרה (m_n) **שואפת** למספר m, או שהמספר m הוא **גבול הסדרה** (m_n).

ככלל, <u>מספר b נקרא גבול הסדרה (a_n) אם הסדרה שהאיבר ה-n-י שלה הוא $a_n - b = \alpha_n$ היא אינסופית קטנה</u>.

את השאיפה של הסדרה (a_n) לגבול b מסמנים כך: $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n) = b$.

lim הן האותיות הראשונות במילה בלועזית limes שמשמעותה – "גבול".

מהגדרת הגבול נובעת משמעותו הגיאומטרית של גבול הסדרה:

b הוא גבול הסדרה (a_n) אם לכל מספר $\varepsilon > 0$ קטן ככל שיהיה, אפשר להתאים מספר N כזה, שלכל איברי הסדרה הנמצאים במקומות $n > N$, מתקיים האי שוויון:

$|a_n - b| < \varepsilon$ או השקול לו $b - \varepsilon < a_n < b + \varepsilon$,

כלומר, כל איברי הסדרה, החל ממקום מסוים N, נמצאים סביב המספר b (גבול הסדרה) בתוך קטע שאורכו שואף לאפס.

דוגמה 1 הוכיחו כי $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{3n - 1}{n + 1} = 3$.

◄ כדי לבדוק אם מספר b הוא גבול הסדרה (a_n) יש לבדוק אם סדרת ההפרשים $(a_n - b)$ היא אינסופית קטנה.

בדוגמה נתון: $b = 3$, $a_n = \frac{3n - 1}{n + 1}$.

נפתֵח את ההפרש: $\frac{3n - 1}{n + 1} - 3 = \frac{3n - 1 - 3n - 3}{n + 1} = (-4) \cdot \frac{1}{n + 1}$

כיוון שהסדרה $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ אינסופית קטנה (איבריה שואפים ל- 0 עבור n גדולים),

מסיקים כי כך גם הסדרה $\left(-4\cdot\frac{1}{n+1}\right)$.

לכן, $3 = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+1}$. **מ.ש.ל.**

תרגילים

.149 נתונה נוסחה לאיבר לפי מקומו בסדרה (a_n) : $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$.

חישבו את הערכים של a_{20}, a_{300}, $a_{10,000}$. עד כמה קרובים הערכים שמצאתם ל- 2?

.150 הוכיחו בעזרת הגדרת גבול של סדרה, את השוויונות :

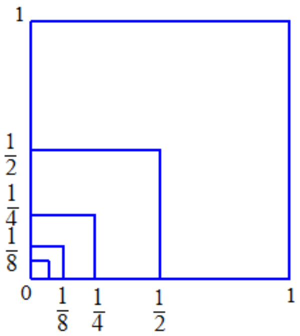
א) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-3}{4n+5}\right)=\frac{1}{2}$ ב) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{n^2}\right)=2$ ג) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+6}{n+1}\right)=5$

החל מאיזה n מתקיים האי-שוויון $\left|\frac{5n+6}{n+1}-5\right|<\varepsilon$ עבור

$\varepsilon = 0.01;\ 0.005;\ 0.0001$?

.151 האם לכל סדרה יש גבול? הביאו דוגמאות של סדרות שאין להם גבול.

18. סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת



נתבונן בריבועים שבשרטוט.

צלע הריבוע הראשון הוא 1 ס״מ, של השני - $\frac{1}{2}$,

של השלישי - $\frac{1}{2^2}$ וכך הלאה.

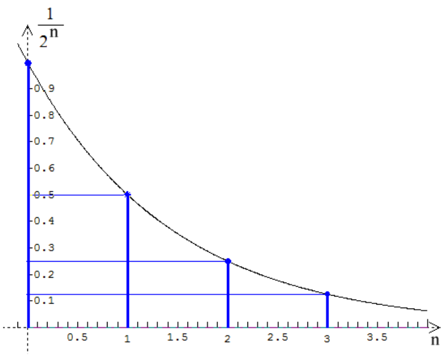
כלומר, צלעות הריבועים מהוות סדרה הנדסית בעלת המנה $\frac{1}{2}$:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \ldots$$

שטחי הריבועים יוצרים סדרה הנדסית בעלת המנה $\frac{1}{4}$:

$$1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4^2},\ \frac{1}{4^3},\ \ldots,\ \frac{1}{4^{n-1}},\ \ldots$$

בשרטוט רואים שצלעות הריבועים ושטחם הולכים וקטנים עד אפס עם הגדלת המספר הסידורי n, כלומר סדרות אלה הינן סדרות אינסופיות מתכנסות לאפס.
שימו לב לכך שהמנות שלהן קטנות מאחת.

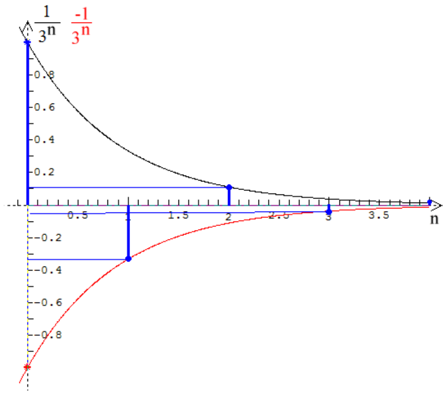


נתבונן כעת בסדרה הנדסית הבאה:

$$1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, -\frac{1}{3^3}, ..., \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, ...$$

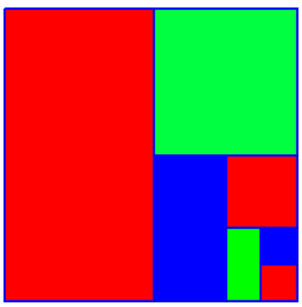
מנת הסדרה הזו היא $q = -\frac{1}{3}$, ואיבריה:

$$b_1 = 1, b_2 = -\frac{1}{3}, b_3 = \frac{1}{9}, b_4 = -\frac{1}{27}, ...$$



כאשר n גדֵל, איברי הסדרה שואפים לאפס.
גם סדרה זו נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת לאפס.
נציין שהערך המוחלט של מנת הסדרה קטן מאחת: $|q| < 1$.
<u>סדרה הנדסית נקראת אינסופית מתכנסת לאפס אם הערך המוחלט של מנת הסדרה קטן מאחת.</u>

דוגמה 1 הוכיחו כי סדרה הנדסית המוגדרת באמצעות נוסחת האיבר ה-n-י: $b_n = \frac{3}{5^n}$
היא סדרה אינסופית מתכנסת לאפס.
◄ על פי הנתון: $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = \frac{3}{5^2} = \frac{3}{25}$, לכן מנת הסדרה היא: $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{5}$.
כיוון ש- $|q| < 1$ מסיקים, כי הסדרה היא הנדסית אינסופית מתכנסת לאפס.



נתבונן בשרטוט שבו מתואר ריבוע בעל צלע 1.
נצבע את מחציתו באדום, את מחצית השארית – בירוק, וכך הלאה.
רשמו את שטחי חמשת המלבנים הצבועים בסדר יורד החל מהמלבן האדום.

האם קיבלתם סדרה הבאה :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots \ ?$$

מה סוג הסדרה?

תשובה : שטחי המלבנים הצבועים מהווים סדרה הנדסית אינסופית בעלת מנה $q = \frac{1}{2}$ והאיבר הראשון $a_1 = \frac{1}{2}$. בדקו זאת!

אם נצבע את כל המלבנים הנוצרים, כל הריבוע יהיה צבוע.

שאלה : כמה מלבנים צבועים יהיו בתוך הריבוע המקורי?

תשובה : מספר המלבנים שווה למספר האיברים בסדרה, כלומר אינסוף.

שאלה : האם שטח כל מלבן צבוע הוא מספר חיובי הגדול מאפס?

אם כן, האם יכול להיות שסכום של אינסוף איברים חיוביים יהיה מספר סופי (השווה לשטח הריבוע)?

תשובה : סכום שטחי כל המלבנים הצבועים יהיה שווה לשטח הריבוע המקורי, כלומר :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = 1$$

באגף שמאל של שוויון זה סכום אינסוף האיברים.

שאלה : הכיצד?

תשובה : נסמן את הסכום של n האיברים הראשונים ב- S_n :

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

על פי נוסחת הסכום של n איברים בסדרה הנדסית אפשר לרשום :

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

אם n יגדל עד אינסוף, אז $\frac{1}{2^n}$ ילך ויקטן עד אפס (ישאף לאפס).

במקרה זה כותבים :

$$\frac{1}{2^n} \to 0 \quad \text{או} \quad \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2^n}\right) = 0 \ .$$

כלומר, סכום n איברי הסדרה (הנקרא סכום חלקי) ישאף ל- 1 : $S_n \to 1$

או

$$\lim_{n \to \infty} (S_n) = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

לכן אומרים שסכום של סדרה אינסופית $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots$ שווה ל- 1.

ככלל, בסדרה הנדסית אינסופית:

$b_1, b_1q, b_1q^2, \dots, b_1q^{n-1}, \dots$, כאשר $|q| < 1$,

נרשום את הביטוי לסכום של n האיברים הראשונים (סכום חלקי):

$$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$$

ונפתֵח אותו באופן הבא: $S_n = \frac{b_1}{1-q} - \frac{b_1}{1-q}\cdot q^n$

כיוון ש- $|q| < 1$, כאשר n שואף לאינסוף, האיבר השני שואף לאפס:

$$n \to \infty:\ q^n \to 0,\ \frac{b_1}{1-q}\cdot q^n \to 0$$

לכן הסכום החלקי S_n שואף למספר $\frac{b_1}{1-q}$.

<u>סכום S של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת הוא:</u>

$$b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 + \dots + b_1q^{n-1} + \dots = \frac{b_1}{1-q} \qquad (\star)$$

כאשר $b_1 = 1$ נקבל: $\frac{1}{1-q}$.

שוויון זה רושמים בדרך כלל בצורה מפורשת:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} + \dots = \frac{1}{1-q}$$

נדגיש, שנוסחאות האלה מתקיימות רק כאשר מנת הסדרה $|q| < 1$.

דוגמה 2 מצאו סכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת: $\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{18}, -\frac{1}{54}, \dots$.

◄ כיוון ש- $b_1 = \frac{1}{2}, b_2 = -\frac{1}{6}$, מקבלים עבור מנת הסדרה: $q = \frac{b_2}{b_1} = -\frac{1}{3}$

כעת נמצא את סכום הסדרה על פי הנוסחה $(\star)$:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{8}$$

דוגמה 3 מצאו סכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, אם נתון: $b_3 = -1,\ q = \frac{1}{7}$.

◄ נשתמש בנוסחה $b_n = b_1q^{n-1}$, נציב בה את הנתונים ונמצא את b_1:

$$-1 = b_1 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{3-1},\quad -1 = b_1 \cdot \frac{1}{49},\quad b_1 = -49$$

נציב בנוסחה (★) לסכום הסדרה:

$$S = \frac{-49}{1 - \left(\frac{1}{7}\right)} = -57\frac{1}{6}$$

רישום שבר עשרוני מחזורי בצורה של שבר פשוט

פתרון בעיה שמתקבל באמצעות מחשבון הוא בדרך כלל בצורה של מספר עשרוני, לדוגמה: 0.123456789.

מחשבון קוטע את המספר, כיוון שאין ביכולתו להציג מספר גדול של ספרות עשרוניות. מאידך, המספר המקוטע הוא מיסודו מקורב, והתשובה שמתקבלת באופן כזה היא אינה מדויקת.

לדוגמה, בפתרון בעיה מסוימת הגענו למשוואה: $3x = 1$.

פתרון המשוואה שיוצג במחשבון הוא: $x = 0.3333333$.

כאמור, פתרון זה אינו מדויק.

חשבו: מה השגיאה ברישום הזה?

רמז: השגיאה היא ההפרש בין התשובה המדויקת לבין המקורבת.

תשובה: השגיאה היא: 0.00000003333333…..

המסקנה: עדיף להשתמש בפתרון בצורה של שבר פשוט: $x = \frac{1}{3}$, שהוא פתרון מדויק.

יש מקרים, כאשר ייצוגו של שבר פשוט כמספר עשרוני הוא פשוט: $\frac{1}{4} = 0.25$, כלומר מספר ספרות לאחר נקודה עשרונית הוא סופי;

במקרים אחרים השבר הוא אינסופי, אולם קבוצה של ספרות מסוימות חוזרת על עצמה (שבר כזה נקרא מחזורי), כמו: $\frac{1}{9} = 0.111111....$ (כאן במחזור ספרה 1), ולפעמים אין סדר (או כלל) בספרות עשרוניות, כמו במספר $\sqrt{2}$ (מספרים כאלה מקראים אי רציונאליים).

שאלה כיצד להפוך מספר עשרוני מחזורי לשבר פשוט? לדוגמה: $\frac{\times}{\times} = 0.111111...$?

רמז יודעים אנחנו כי משמעות של שבר פשוט הוא חילוק. למשל: $\frac{5}{7} = 5 : 7$

חשבו: מה משמעות הרישום של שבר עשרוני, כמו 0.1111111 ?

תשובה אפס אחדות ועוד עשירית אחת, ועוד מאית אחת, ועוד אלפית אחת וכך הלאה.

רשמו את התשובה המילולית בשפת המתמטיקה:

$$0.111111... = \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + ...$$

קיבלתם סכום של אינסוף איברים של סדרה.

חשבו: איזה סוג של סדרה זאת?

האם זאת סדרה חשבונית? נמקו את תשובתכם.

האם זאת סדרה הנדסית? אם כן, מה מנת הסדרה ומה האיבר הראשון?

נמקו את תשובתכם.

תשובה: הסדרה היא הנדסית, כאשר $q = \frac{1}{10}$, $b_1 = \frac{1}{10}$.

כיצד לחשב את סכום הסדרה האינסופית זו?

השתמשו בנוסחה (★) וודאו את התוצאה:

$$S = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}$$

תשובה $0.111111 ... = \frac{1}{9}$

דוגמה 4

הפכו את השבר העשרוני אינסופי מחזורי $a = 0.15151515...$ לשבר פשוט.

◄ נרשום כמה קירובים של המספר הנתון:

$$a_1 = 0.15 = \frac{15}{100} ,$$

$$a_2 = 0.1515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{10000} = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} ,$$

$$a_3 = 0.151515 = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} .$$

אפשר להסיק איפו, כי הערך המדויק של a שווה לסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

$$a = \frac{15}{100} + \frac{15}{100^2} + \frac{15}{100^3} + ...$$

נשתמש בנוסחה (★) ונקבל תשובה:

$$a = \frac{\frac{15}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{15}{99} = \frac{5}{33}$$

תרגילים

.152 הוכיחו כי הסדרה ההנדסית היא אינסופית מתכנסת:
א) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ ב) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$
ג) $-81, -27, -9, \ldots$ ד) $-16, -8, -4, \ldots$

.153 בדקו, אם הסדרה ההנדסית היא אינסופית מתכנסת, אם ידוע כי:
א) $b_1 = 40, b_2 = -20$ ב) $b_7 = -30, b_6 = 15$
ג) $b_7 = 12,\ b_{11} = \frac{3}{4}$ ד) $b_5 = -9,\ b_9 = -\frac{1}{27}$

.154 מצאו את הסכום של הסדרה ההנדסית האינסופית מתכנסת:
א) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$ ב) $6, 1, \frac{1}{6}, \ldots$
ג) $-25, -5, -1, \ldots$ ד) $-7, -1, -\frac{1}{7}, \ldots$

.155 מצאו את הסכום של הסדרה ההנדסית האינסופית מתכנסת, אם ידוע כי:
א) $q = \frac{1}{2},\ b_1 = \frac{1}{8}$ ב) $q = -\frac{1}{3},\ b_1 = 9$
ג) $q = \frac{1}{3},\ b_5 = \frac{1}{81}$ ד) $q = -\frac{1}{2},\ b_4 = -\frac{1}{8}$

.156 האם הסדרה היא סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, אם היא מוגדרת באמצעות הנוסחה לאיבר הכללי:
א) $b_n = 3\cdot(-2)^n$ ב) $b_n = -3\cdot 4^n$ ג) $b_n = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ד) $b_n = 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$?

.157 מצאו את הסכום של הסדרה ההנדסית האינסופית מתכנסת:
א) $12, 4, \frac{4}{3}, \ldots$ ב) $100, -10, 1, \ldots$

.158 מצאו את הסכום של הסדרה ההנדסית האינסופית מתכנסת, אם ידוע כי:
א) $q = \frac{1}{2},\ b_5 = \frac{\sqrt{2}}{16}$ ב) $q = \frac{\sqrt{3}}{2},\ b_4 = \frac{9}{8}$

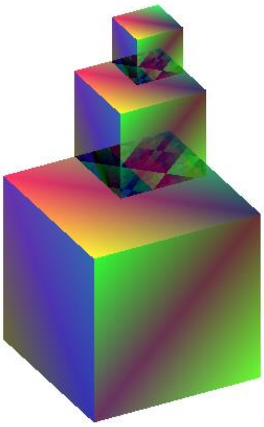
.159 נתון, כי סכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת הוא 150.
מצאו: א) b_1, אם $q = \frac{1}{3}$ ב) q, אם $b_1 = 75$.

160. עבור איזה ערך של $x > 1$ מתקיים השוויון:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots=\frac{1}{3} \quad ?$$

161. פתרו את המשוואה: $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = 1.5$, אם $0 < x < 1$.

162. מצאו את המנה של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, אם ידוע כי סכום חמשת איבריה הראשונים הוא $-2\frac{29}{32}$ וסכום הסדרה -3.



163. מצאו את האיבר הראשון של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, אם ידוע כי סכום ארבעת איבריה הראשונים הוא $\frac{65}{81}$ וסכום הסדרה הוא 1.

164. על קובייה שמקצועה a העמידו קובייה בעלת מקצוע $\frac{a}{2}$, עליה – קובייה שמקצועה $\frac{a}{4}$, קובייה שמקצועה $\frac{a}{8}$ וכך הלאה.

מצאו את גובה הגוף שייווצר.

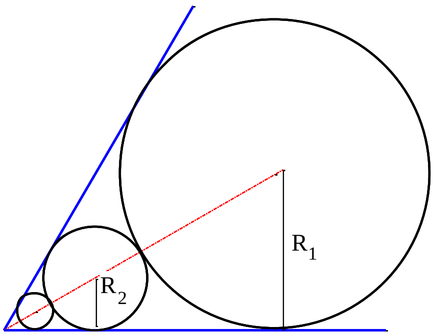
165. רשמו את המספרים בצורה של שבר פשוט:

א) $0.(5)$ ב) $0.(9)$ ג) $0.(12)$ ד) $0.2(3)$

166. בזווית שגודלה 60° חסומים מעגלים המשיקים זה לזה. רדיוס המעגל הראשון הוא R_1.

מצאו את הרדיוסים של $R_2, R_3, \ldots, R_n$ המעגלים האחרים והוכיחו שהם יוצרים סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

הוכיחו כי הסכום $R_1 + 2(R_2+R_3+\ldots+R_n+\ldots)$ שווה למרחק ממרכז המעגל הראשון לקדקוד הזווית.



167. פתרו משוואה:

א) $x^{-2} + x^{-4} + \ldots + x^{2(1-n)} + \ldots = 0.125$

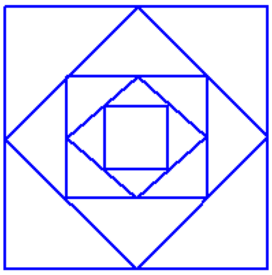
ב) $1+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{n-1}+\ldots=\frac{x^2}{2}$

168. סכום האיברים של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת הוא 9, וסכום ריבועי האיברים 40.5. מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

169. בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 36, וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 12.
מצאו את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה.

170. מצאו סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, שהאיבר הראשון שלה הוא 1, וכל איבר עוקב גדול פי 3 מסכום כל האיברים שבאים אחריו.

171. נתון ריבוע שצלעו a. אמצעי צלעותיו מחוברים בקטעים שיוצרים ריבוע. ממשיכים בפעולה כזאת בכל ריבוע שנוצר עד אינסוף. מצאו את סכום שטחי כל הריבועים שנוצרו.



172. מה צריך להיות ערכו של a כדי שסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת $2a + a\sqrt{2} + a + \ldots$ יהיה 8 ?

173. מצאו שבר פשוט השווה למספר עשרוני מחזורי:
א) $0.(37)$ ב) $0.23(345)$ ד) $7.2(3)$

תרגילים אינטראקטיביים

ChatGPT

שאילתות מפתח

תרגיל 3.1 נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

$$6\ ,\quad 3\ ,\quad 1\tfrac{1}{2}\ . . .$$

מצאו את סכום הסדרה.

תרגיל 3.2 נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, שבה: $a_1 = 2, s = 6$.
מצאו את מנת הסדרה q.

תרגיל 3.3 נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, שבה נתון:

$$a_2 = -4, s = 3\tfrac{3}{5}$$

מצאו את האיבר a_5 של הסדרה.

תרגיל 3.4 הפכו את השבר העשרוני המחזורי לשבר פשוט:
$0.7282828\ ...$

תרגיל 3.5 מצאו סכום של סדרה אינסופית מתכנסת הבאה:
$$\frac{3+4}{9}+\frac{9+16}{81}+\frac{27+64}{729}+\ ...$$

תרגיל 3.8 נתונות סדרה חשבונית: $a_1=2\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ...$
וסדרה הנדסית: $b_1=2\ ,\ b_2=a_2+4\ ,\ b_3=a_3+16\ ...$
מצאו את ההפרש d של סדרה חשבונית ואת המנה q של סדרה הנדסית.

תרגיל 3.9 נתונות סדרה הנדסית: $2\ ,\ x\ ,\ y$
וסדרה חשבונית: $-7\ ,\ x-4\ ,\ y-7$
מצאו את x ו- y.

תרגיל 3.10 נתונות סדרה חשבונית: $12\ ,\ x\ ,\ y$
וסדרה הנדסית: $x\ ,\ y\ ,\ 4$.
מצאו את x ו- y.

שיעורי בית אינטראקטיביים (עם הערכה)

תרגיל 3.1 נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:
$$6\ ,\ \ 3\ ,\ \ 1\frac{1}{2}\ ...$$
מצאו את סכום הסדרה.

תרגיל 3.2 נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, שבה: $a_1=2, s=6$.
מצאו את מנת הסדרה q.

תרגיל 3.3 נתונה סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, שבה נתון:
$$a_2=-4, s=3\frac{3}{5}$$
מצאו את האיבר a_5 של הסדרה.

תרגיל 3.4 הפכו את השבר העשרוני המחזורי לשבר פשוט:

$0.7282828\ \ldots$

תרגיל 3.5 מצאו סכום של סדרה אינסופית מתכנסת הבאה:

$$\frac{3+4}{9}+\frac{9+16}{81}+\frac{27+64}{729}\ \ldots +$$

תרגיל 3.8 נתונות סדרה חשבונית: $a_1=2\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ \ldots$

וסדרה הנדסית: $b_1=2\ ,\ b_2=a_2+4\ ,\ b_3=a_3+16\ \ldots$

מצאו את ההפרש d של סדרה חשבונית ואת המנה q של סדרה הנדסית.

תרגיל 3.9 נתונות סדרה הנדסית: $2\ ,\ x\ ,\ y$

וסדרה חשבונית: $-7\ ,\ x-4\ ,\ y-7$

מצאו את x ו- y.

תרגיל 3.10 נתונות סדרה חשבונית: $12\ ,\ x\ ,\ y$

וסדרה הנדסית: $4\ ,\ y\ ,\ x$.

מצאו את x ו- y.

סדרה הנדסית – תרגילים אינטראקטיביים עם פתרונות

10.1 מצאו שלושת האיברים הראשונים של סדרה הנדסית אינסופית בעלת המנה $|q|<1$, כאשר ידוע כי סכום הסדרה שווה ל- 6, וסכום חמשת האיבריה הראשונים שווה $\frac{93}{16}$

10.2 סכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת גדול פי- 2 מסכום של n איבריה הראשונים. מצאו את מנת הסדרה.

10.3 סכום של סדרה הנדסית אינסופית יורדת שווה ל- 56, וסכום ריבועים של אותם המספרים שווה ל- 448. מצאו את האיבר הראשון ומנת הסדרה.

תשובות

.145 $\alpha_1=15$, $\alpha_3=\frac{5}{3}$, $\alpha_{10}=0.15$, $\alpha_{30}=\frac{1}{60}$, $\alpha_{100}=0.0015$, $\alpha_{300}=\frac{1}{6000}$.

.146 $\varepsilon=1\Rightarrow N=1$; $\varepsilon=0.1\Rightarrow N=1$; $\varepsilon=0.05\Rightarrow N=5$; $\varepsilon=0.001\Rightarrow N=331$

.147 א) $\varepsilon=1\Rightarrow N=1000000$; $\varepsilon=0.1\Rightarrow N=10^8$; $\varepsilon=0.05\Rightarrow N=4\cdot10^8$;
$\varepsilon=0.001\Rightarrow N=10^{12}$

ג) $\varepsilon=1\Rightarrow N=1$; $\varepsilon=0.1\Rightarrow N=8$; $\varepsilon=0.05\Rightarrow N=15$; $\varepsilon=0.001\Rightarrow N=669$

ד) $\varepsilon=1\Rightarrow N=1$; $\varepsilon=0.1\Rightarrow N=78$; $\varepsilon=0.05\Rightarrow N=358$;
$\varepsilon=0.001\Rightarrow N=997998$

.148 $t=6.644T$ א) 53.15 יממות; ב) 159.45 שנים.

.149 $a_{20}=1\frac{6}{7}\approx1.857$, $a_{300}=1\frac{298}{301}\approx1.99003$, $a_{10000}\approx1.9970003$.

.150 $\varepsilon=0.01\Rightarrow n\ge100$; $\varepsilon=0.005\Rightarrow n\ge200$; $\varepsilon=0.0001\Rightarrow n\ge10000$

.154 א) $S=\frac{3}{2}$ ב) $S=\frac{36}{5}$ ג) $S=-\frac{125}{4}$ ד) $S=-\frac{49}{6}$

.155 א) $S=\frac{1}{4}$ ב) $S=\frac{27}{4}$ ג) $S=\frac{3}{2}$; ד) $S=\frac{2}{3}$

.156 א) לא ב) לא ג) כן ד) כן

.157 א) $S=18$ ב) $S=\frac{1000}{11}$

.158 א) $S=2\sqrt{2}$ ב) $S=6+4\sqrt{3}$

.159 א) $b_1=100$ ב). $q=\frac{1}{2}$

.160 $x=4$ .161 $x=\frac{1}{3}$ .162 $q=\frac{1}{2}$ .163 $a_1=\frac{5}{3}$ או $a_1=\frac{1}{3}$

.164 $2a$ .165 א) $\frac{5}{9}$ ב) 1 ג) $\frac{4}{33}$ ד) $\frac{7}{30}$ .166 $q=\frac{1}{3}$

.167 א) $x=\pm3$ ב) $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ .168 $a_1=6$ $q=\frac{1}{3}$

.169 $a_1=32$ $q=\frac{1}{3}$ .170 $a_1=1$, $q=\frac{1}{4}$

.171 $S=2a^2$ .172 $a=2\left(2-\sqrt{2}\right)$

.173 א) $\frac{37}{99}$ ב) $\frac{3887}{16650}$ ג) $\frac{217}{30}$

גבול של סדרה