7. סדרה חשבונית

בשנה יש קרוב ל- 365 ימים. הערך המדויק יותר הוא $365\frac{1}{4}$ ימים, לכן בכל 4 שנים מצטברת שגיאה של יממה אחת.

כדי לתקן את השגיאה, מוסיפים לכל שנה רביעית יום אחד, והשנה הזו נקראת **שנה מעוברת**.

לדוגמה, השנים 2020, 2024, 2028, 2032, 2036 ... יהיו שנים מעוברות.

בסדרת זו כל איבר, החל מהשני, גדול מקודמו ב- 4. סדרה מסוג זה נקראת **סדרה חשבונית**.

הגדרה: סדרת מספרים ... $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ נקראת **סדרה חשבונית**, אם ההפרש בין שני איברים עוקבים בסדרה הוא קבוע.

בשפת מתמטיקה: סדרה חשבונית היא הסדרה שעבורה מתקיים כלל הנסיגה:

$\mathbf{a_{n+1} - a_n = d}$, כאשר n הוא המספר הסידורי של האיבר בסדרה.

מהנוסחה נובע ש- $a_{n+1} = a_n + d$ (1)

כלומר, כל איבר בסדרה שווה לסכום האיבר הקודם ומספר קבוע.

מספר זה נקרא **הפרש הסדרה החשבונית**, ובדרך כלל מסמנים אותו באות d (מהמילה difference)

דוגמאות

א) סדרת מספרים **טבעיים**: $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ היא סדרה חשבונית.

בדיקה נמצא הפרש בין איברים עוקבים:

$$2 – 1 = 3 – 2 = 4 – 3 = \ldots = n+1 – n = 1$$

כלומר הפרש הסדרה $d = 1$.

ב) סדרת מספרים **שלמים שליליים**: $-1, -2, -3, -4, \ldots, -n, \ldots$ היא סדרה חשבונית.

בדיקה נמצא הפרש בין איברים עוקבים:

$$-2 – (-1) = -3 – (-2) = -4 – (-3) = \ldots = -(n + 1) – (-n) = -1$$

כלומר הפרש הסדרה שווה ל- $d = -1$.

ג) הסדרה: $3, 3, 3, \ldots, 3, \ldots$ גם היא חשבונית; הפרש הסדרה $d = 0$.

דוגמה 1 הוכיחו שסדרה המוגדרת באמצעות נוסחת האיבר לפי מקום $a_n = 2 + 3n$ היא סדרה חשבונית, ומצאו את:

א. חמשת האיברים הראשונים.

ב. הפרש הסדרה.

◄ נציב בנוסחת האיבר לפי מקום $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ונקבל את חמשת האיברים הראשונים של הסדרה:

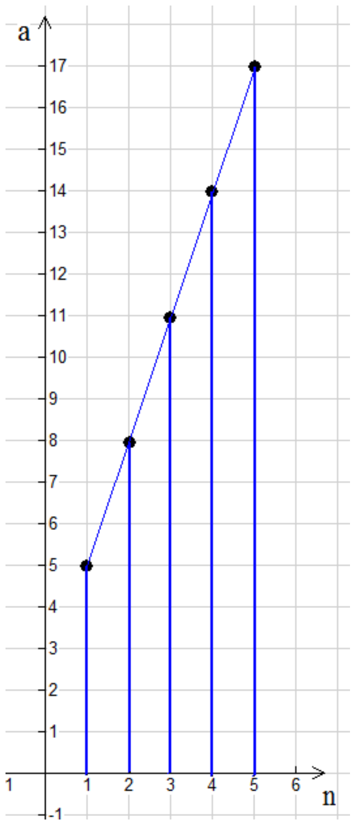
$$a_1 = 2 + 3\cdot1 = 5$$

$$a_2 = 2 + 3\cdot2 = 8$$

$$a_3 = 2 + 3\cdot3 = 11$$

$$a_4 = 2 + 3\cdot4 = 14$$

$$a_5 = 2 + 3\cdot5 = 17$$



הפרש הסדרה שווה ל-

$$a_2 – a_1 = a_3 – a_2 = a_4 – a_3 = a_5 – a_4 = 3$$

נוכיח שההפרש קבוע עבור כל האיברים (כלומר אינו תלוי ב- n).

נרשום איבר שמספרו $(n + 1)$:

$$a_{n+1} = 2 + 3(n + 1)$$

נחשב את ההפרש שבין שני איברים עוקבים:

$$a_{n+1} - a_n = 2 + 3(n + 1) – (2 + 3n) =$$

$$= 2 + 3n + 3 – 2 – 3n = 3$$

<u>ההפרש $d = 3$ אינו תלוי ב- n</u>. ▷

נשרטט את **גרף הסדרה**: אוסף נקודות במישור המייצגות את איברי הסדרה, כאשר שיעור x שווה למקום האיבר בסדרה (n – מספר טבעי), ושיעור y שווה לערך מספרי של האיבר (a_n). אם נחבר את הנקודות נקבל גרף המייצג את התנהגות הסדרה:

בדוגמה הנ"ל רואים, שהסדרה עולה, שהאיבר הראשון הוא 5, ושכל איבר, החל מהשני, גדול מקודמו ב- 3.

לאיברי סדרה חשבונית יש תכונה מיוחדת:
כדי לדעת את גודלו של איבר מסוים, לא חייבים לדעת את הנוסחה לאיבר לפי מקום, וגם לא את כלל הנסיגה.
התבוננו בגרף ורשמו בטבלה את ערך האיבר השלישי a_3.

a_2	a_3	a_4	$\frac{a_2+a_4}{2}$
	11		

רשמו גם את ערכי האיברים הסמוכים – a_2 ו- a_4, וחישבו את <u>הממוצע החשבוני</u>: $\frac{a_2+a_4}{2}=\frac{8+14}{2}=11$.
מה אפשר לומר על הקשר בין a_3 והממוצע שחישבתם?
האם התוצאה היא מקרית?
בדקו אותה על ידי בחירת איברים אחרים: a_3, a_4 ו- a_5.
רשמו את ערכי האיברים האלה בטבלה:
מה אפשר לומר על הקשר בין a_4 והממוצע $\frac{a_3+a_5}{2}$ שחישבתם?

a_3	a_4	a_5	$\frac{a_3+a_5}{2}$
	14		

נבדוק אם התוצאה שקיבלתם מקרית, או שהיא איננה תלויה בבחירת האיברים?
נבחר בסדרה חשבונית את האיבר כלשהו a_n.

על פי כלל הנסיגה בסדרה חשבונית (1), עבור האיברים הסמוכים לו אפשר לרשום:

$$a_{n+1}=a_n+d$$

$$a_{n-1}=a_n-d$$

נחבר את שני השוויונות: $a_{n+1}+a_{n-1}=2a_n$

נקבל: $$a_n=\frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{2},\ \ n>1$$

המסקנה <u>בסדרה חשבונית כל איבר, החל מהאיבר השני, שווה **לממוצע חשבוני** של שני האיברים הסמוכים לו</u>.

תכונה זו מאפיינת את הסדרה החשבונית, ולכן היא נקראת "חשבונית".

הערה מלבד ממוצע חשבוני (השווה לחצי הסכום של שני מספרים) יש עוד גודל המבטא את הממוצע בין שני מספרים: ממוצע הנדסי, שעליו נדבר בסעיף הבא, וממוצעים אחרים שעליהם לא נלמד בקורס זה.

כאשר האיבר הראשון a_1 וההפרש d ידועים, אפשר לחשב את כל האיברים של הסדרה על פי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + d$.

בדרך זו קל לחשב את מספר האיברים ראשונים של הסדרה, אולם חישוב האיבר a_{100}, לדוגמה, עלול לארוך זמן רב:

$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d, \dots$$

חישוב זה מראה כיצד לחשב כל איבר ללא חישובי ביניים:

האיבר שמספרו הסידורי n שווה לסכום האיבר הראשון ו- $(n-1)$ פעמים ההפרש d:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad (2)$$

נוסחה זאת היא **נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה חשבונית**.

דוגמה 2 מִצאו את איבר ה- 100 בסדרה חשבונית, שבה $a_1 = -6$, ו- $d = 4$.

◀ נשתמש בנוסחה (2) עבור $n = 100$, ונקבל:

$$a_{100} = a_1 + (100-1)\cdot d = -6 + 99\cdot 4 = \underline{390} \qquad \triangleright$$

דוגמה 3 מספר 99 נמצא בין איברי הסדרה החשבונית $3, 5, 7, 9, \dots$.

מִצאו את המספר הסידורי של איבר זה.

◀ א) נמצא את הפרש הסדרה d: $d = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$.

ב) נסמן את מספר האיבר הרצוי ב- n, ונרשום עבורו את נוסחת האיבר לפי מקום:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 99 = 3 + (n-1)\cdot 2 \Rightarrow 99 = 3 + 2n - 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 98 = 2n \Rightarrow \underline{n = 49}$$

דוגמה 4 בסדרה חשבונית נתון: $a_8 = 130$ ו- $a_{12} = 166$.

מִצאו את נוסחת האיבר הכללי.

◀ נשתמש בנוסחה (2), ונרשום עבור שני האיברים הנתונים:

$$a_8 = a_1 + 7d,$$
$$a_{12} = a_1 + 11d.$$

נציב את הנתונים ונקבל מערכת משוואות לגבי a_1 ו- d :

$$a_1 + 7d = 130,$$
$$a_1 + 11d = 166.$$

נחסיר משוואה ראשונה מהשנייה :

$$4d = 36 \Rightarrow d = 9.$$

לכן : $a_1 = 130 - 7d = 130 - 63 = 67$.

נוסחת האיבר ה- n-י :

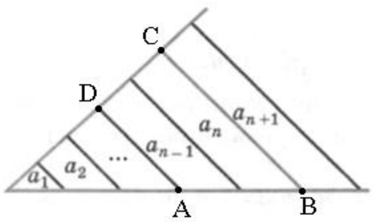
$$a_n = a_1 + (n-1)d = 67 + 9(n-1) = 67 + 9n - 9 = \underline{58 + 9n}$$

$$a_n = 9n + 58 \qquad \triangleright$$

דוגמה 5 שוק הזווית מחולקת מהקדקוד לקטעים שווים. דרך קצות הקטעים משרטטים קווים מקבילים. הוכיחו שערכי אורך הקטעים מהווים סדרה חשבונית.

◄ בטרפז ABCD שבסיסיו a_{n-1} ו- a_{n+1} קטע אמצעים a_n (כיוון שהוא חוצה את שוקי הטרפז).

על פי הגדרת קטע אמצעים :



$$a_n = \frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$$

כפי שהוכחנו בדוגמה 1, אם כל איבר, החל מהאיבר השני, שווה לממוצע חשבוני של שני האיברים הסמוכים לו, אזי הסדרה חשבונית. $\triangleright$

תרגילים

.45 מִצאו את האיבר הראשון ואת ההפרש בסדרה החשבונית :

א) $6, 8, 10, \ldots$ ב) $7, 9, 11, \ldots$

ג) $25, 21, 17, \ldots$ ד) $-12, -9, -6, \ldots$

.46 רִשמו את חמשת האיברים הראשונים של סדרה חשבונית, אם ידוע כי :

א) $a_1 = 2,\ d = 5$ ב) $a_1 = -3,\ d = 2$

47. הוכיחו שהסדרה, המוגדרת על פי נוסחת האיבר הכללי, היא סדרה חשבונית:

א) $a_n = 3 - 4n$ ב) $a_n = -5 + 2n$

ג) $a_n = 3(n + 1)$ ד) $a_n = 2(3 - n)$

48. מְצאו בסדרה החשבונית את:

א) a_{15} אם ידוע: $a_1 = 2, d = 3$ ב) a_{20} אם ידוע: $a_1 = 3, d = 4$

ג) a_{18} אם ידוע: $a_1 = -3, d = -2$ ד) a_{11} אם ידוע: $a_1 = -2, d = -4$

49. רִשמו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה החשבונית:

א) $1, 6, 11, 16, \ldots$ ב) $25, 21, 17, 13, \ldots$

ג) $-4, -6, -8, -10, \ldots$ ד) $1, -4, -9, -14, \ldots$

50. מספר (22-) הוא איבר בסדרה חשבונית $44, 38, 32, \ldots$.

מְצאו את מקומו.

51. האם המספר 12 נמצא בין איברי הסדרה החשבונית $-18, -15, -12, \ldots$?

52. המספר (59-) הוא איבר בסדרה החשבונית $1, -5, \ldots$.

מְצאו את מקומו. האם המספר (46-) אף הוא בין איברי הסדרה?

53. מְצאו את הפרש הסדרה החשבונית, אם ידוע כי:

א) $a_1 = 7,\ a_{16} = 67$ ב) $a_1 = -4,\ a_9 = 0$

54. הפרש הסדרה החשבונית הוא 1.5. מצאו את a_1 אם ידוע כי:

א) $a_9 = 12$ ב) $a_7 = -4$

55. מצאו את האיבר הראשון של סדרה חשבונית, כאשר ידוע כי:

א) $d = -3, a_{11} = 20$ ב) $a_{21} = -10,\ a_{22} = -5.5$

56. מצאו את נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית, כאשר ידוע כי:

א) $a_3 = 13,\ a_6 = 22$ ב) $a_2 = -7,\ a_7 = 18$

57. עבור אילו ערכים של n איברי הסדרה החשבונית $15, 13, 11, \ldots$ שליליים?

58. בסדרה חשבונית: $a_1 = -10, d = 0.5$.

עבור אילו ערכים של n מתקיים אי השוויון $a_n < 27$?

59. מצאו את האיבר התשיעי ואת ההפרש של הסדרה החשבונית, אם ידוע כי :

א) $a_8 = 126,\ a_{10} = 146$ ב) $a_8 = -64,\ a_{10} = -50$

ג) $a_8 = -7,\ a_{10} = 3$ ד) $a_8 = 0.5,\ a_{10} = -2.5$

60. גוף שנופל חופשי עובר בשנייה הראשונה 4.9 מ׳, ובכל שנייה הבאה הוא עובר מרחק ב- 9.8 מ׳ יותר מאשר בקודמת. איזה מרחק יעבור הגוף בשנייה החמישית?

61. אימוני שחייה לילדים אורכים ביום הראשון 15 דקות, ובכל יום אימונים מאריכים אותם ב- 10 דקות נוספות.

באיזה יום אימונים יימשך אימון שעה ו- 45 דקות?

62. א) הוכיחו שבכל סדרה חשבונית מתקיים השוויון :

$$a_n + a_k = a_{n-m} + a_{k+m} \quad (m < n)$$

ב) מצאו את $a_{10} + a_5$ אם נתון : $a_7 + a_8 = 30$.

63. הוכיחו שבכל סדרה חשבונית מתקיים השוויון : $a_n = \dfrac{a_{n+k} + a_{n-k}}{2}$ $(k < n)$

מצאו את a_{20}, אם נתון : $a_{10} + a_{30} = 120$.

64. נתון כי x_1 ו- x_2 הם פתרונות המשוואה $x^2 - 4x + a = 0$. כמו כן נתון כי x_3 ו- x_4 הם פתרונות המשוואה $x^2 - 12x + b = 0$. ידוע שמספרים x_1, x_2, x_3 ו- x_4 מהווים סדרה חשבונית. מְצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b.

65. האם המספרים $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{8}$ יכולים להיות איברי אותה סדרה חשבונית (לא בהכרח איברים סמוכים)?

רמז : הניחו שהמספרים הם איברי סדרה חשבונית כלשהי, רשמו את הקשרים ביניהם (באמצעות הפרש הסדרה והמספרים הסידוריים), ובדקו האם קיימים מספרים סידוריים <u>טבעיים</u> אשר מקיימים את מערכת המשוואות שרשמתם.

66. נתון כי המספרים a^2, b^2, c^2 מהווים סדרה חשבונית.

הוכיחו שגם המספרים $\dfrac{1}{a+b}, \dfrac{1}{c+a}, \dfrac{1}{b+c}$ מהווים סדרה חשבונית.

ChatGPT

תרגילים אינטראקטיביים

שאילתות מפתח

תרגיל 1.1 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$

שבה: $a_1=3, a_2=8$

מצאו את הנוסחה לחישוב האיבר הכללי a_n.

תרגיל 1.2 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$

שבה: $a_1=7, a_5=27$

מצאו את הפרש הסדרה d והאיבר a_8.

תרגיל 1.3 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$

שבה: $a_1=-5, a_6=-20$

מצאו את הפרש הסדרה d והאיבר a_8.

תרגיל 1.4 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$

שבה מתקיים: $a_1+a_2=20, a_3+a_4=36$

מצאו את האיבר a_9 של הסדרה.

תרגיל 1.5 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$

שבה מתקיים: $a_5=10, a_3=3a_1$

מצאו את האיבר a_{10} של הסדרה.

תרגיל 1.6 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה מתקיים:

$a_{14}=2a_7, \quad a_7+a_9-a_{11}=15$

מצאו את האיבר a_1 של הסדרה.

תרגיל 1.7 בסידרה חשבונית שהפרש שלה $d=6$ נתון סכום של שלושה איברים סמוכים: $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=96$
מצאו את שלושת האיברים האלה.

תרגיל 1.8 נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה מתקיים:
$a_1=3$, $a_2=11$, $5a_n+6a_{2n}=1713$
מצאו את המספר n.

שיעורי בית אינטראקטיביים (עם הערכה)

תרגיל 1.1 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$
שבה: $a_1=3, a_2=8$
מצאו את הנוסחה לחישוב האיבר הכללי a_n.

תרגיל 1.2 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$
שבה: $a_1=7, a_5=27$
מצאו את הפרש הסדרה d והאיבר a_8.

תרגיל 1.3 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$
שבה: $a_1=-5, a_6=-20$
מצאו את הפרש הסדרה d והאיבר a_8.

תרגיל 1.4 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$

שבה מתקיים: $a_1+a_2=20, a_3+a_4=36$

מצאו את האיבר a_9 של הסדרה.

תרגיל 1.5 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$

שבה מתקיים: $a_5=10, a_3=3a_1$

מצאו את האיבר a_{10} של הסדרה.

תרגיל 1.6 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה מתקיים:

$a_{14}=2a_7, \quad a_7+a_9-a_{11}=15$

מצאו את האיבר a_1 של הסדרה.

תרגיל 1.7 בסידרה חשבונית שהפרש שלה $d=6$ נתון סכום של

שלושה איברים סמוכים: $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=96$

מצאו את שלושת האיברים האלה.

תרגיל 1.8 נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה מתקיים:

$a_1=3 \ , \ a_2=11 \ , \ 5a_n+6a_{2n}=1713$

מצאו את המספר n.

תרגיל 1.10 נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, \dots, a_n$ שבה מתקיים:

$a_6=3\cdot a_1, s_6=60$

מצאו את האיבר a_1 ואת ההפרש d של הסדרה.

תשובות

45. א) $a_1 = 6$; $d = 2$; ב) $a_1 = 7$; $d = 2$;
ג) $a_1 = 25$; $d = -4$; ד) $a_1 = -12$; $d = 3$.
46. א) $2 , 7 ,12 , 17 , 22$; ב) $-3 , -1 , 1 , 3 , 5$
48. א) $a_{15} = 44$; ב) $a_{20} = 79$; ג) $a_{18} = -37$; ד) $a_{11} = -42$.
49. א) $a_n = 5n - 4$; ב) $a_n = 29 - 4n$; ג) $a_n = -2n - 2$ ד) $a_n = 6 - 5n$.
50. $n = 12$.
51. כן. $n = 11$.
52. $a_{11} = -59$; (-46) לא בין איברי הסדרה.
53. א) $d = 4$; ב) $d = \frac{1}{2}$
54. א) $a_1 = 0$; ב) $a_1 = -13$.
55. א) $a_1 = 50$; ב) $a_1 = -100$.
56. א) $a_n = 3n + 4$; ב) $a_n = 5n - 17$.
57. $n \geq 9$.
58. $n \leq 74$.
59. א) $a_9 = 136$; $d = 10$; ב) $a_9 = -57$; $d = 7$;
ג) $a_9 = -2$; $d = 5$; ד) $a_9 = -1$; $d = -1.5$.
60. 44.1 מ' .
61. החל מהאימון הרביעי.
62. $a_{10} + a_5 = 30$.
63. $a_{20} = 60$.
64. $a = 3$, $b = 35$.
65. לא.

8. סכום של n איברים ראשונים של סדרה חשבונית

בעיה מְצאו את סכום כל המספרים הטבעיים מ- 1 עד 100.

◄ נרשום את הסכום המבוקש בשתי צורות:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1$$

נחבר את שני השוויונות, ונשנה את הסדר באגף ימין כך, שהאיבר הראשון בשוויון העליון יתחבר לאיבר הראשון בשוויון התחתון, וכך הלאה:

$$2S = \begin{array}{c} 1 \\ + \\ 100 \end{array} + \begin{array}{c} 2 \\ + \\ 99 \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ + \\ 98 \end{array} + \ldots + \begin{array}{c} 99 \\ + \\ 2 \end{array} + \begin{array}{c} 100 \\ + \\ 1 \end{array} =$$

$$= \underbrace{\overbrace{(1 + 100)}^{101} + \overbrace{(2 + 99)}^{101} + \overbrace{(3 + 98)}^{101} + \ldots + \overbrace{(99 + 2)}^{101} + \overbrace{(100 + 1)}^{101}}_{\text{100 זוגות סוגריים}}$$

כיוון שהסכום בכל זוג סוגריים הוא 101, ומספר זוגות הסוגריים הוא 100, נקבל:

$$2S = 100 \cdot 101 = 10100$$

והסכום המבוקש: $\underline{S = 5050}$ ▷

קָרְל פרידריך גאוס

(1777 – 1855)

בשיטה זו השתמש תלמיד כיתה ג׳ בגרמניה לפני כ- 200 שנה. בשיעור חשבון המורה הטיל על תלמידים משימה: לחשב את סכום כל המספרים מ- 1 עד 100. המורה היה בטוח שעד שהתלמידים יסיימו, הוא יספיק לנוח ולקרוא עיתון. להפתעתו הרבה, הכריז אחד הילדים את התשובה תוך שניות ספורות. אותו תלמיד, **קארל פרידריך גאוס**, ילד פלא בן למשפחת איכרים ענייה, גדל והיה, בעידודו של אותו מורה, לאחד מגאוני המתמטיקה בכל הדורות.

נתבונן כעת בסדרה חשבונית כללית:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

נסמן את <u>סכום האיברים הראשונים</u> בסדרה ב- S_n :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

נרשום את הסכום בסדר הפוך:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$$

על פי הנוסחה לאיבר הכללי בסדרה חשבונית, אפשר לרשום את שני השוויונות בדרך זו:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_n - (n-1)d)$$

נחבר את שני השוויונות, כמו בדוגמה הקודמת:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n),$$

כאשר מספר זוגות הסוגריים הוא n.

לכן: $2S_n = (a_1 + a_n)\cdot n$,

וסכום n האיברים הראשונים שווה ל-

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n} \qquad (1)$$

הערה יש דרכים נוספות להוכיח את הנוסחה (1). לדוגמה, ראו אחת מהן בפרק של **אינדוקציה מתמטית**.

דוגמה 1 מִצאו את סכום 60 המספרים הזוגיים הראשונים.

◄ סדרת המספרים הטבעיים הזוגיים

$$2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$$

היא סדרה חשבונית בעלת ההפרש $d = 2$.

כיוון ש- $a_n = 2n$, אזי $a_1 = 2$, $a_{60} = 120$.

על פי נוסחה (1) הסכום המבוקש: $S_n = \frac{2 + 120}{2} \cdot 60 = 3660$

דוגמה 2 מְצאו את הסכום $38 + 35 + \ldots + (-7)$, אם ידוע שהמחוברים הם איבריה העוקבים של סדרה חשבונית.

◀ על פי הנתונים: $a_1 = 38$, $d = 35 - 38 = -3$, $a_n = -7$.

נשתמש בנוסחת האיבר לפי מקומו: $a_n = a_1 + (n - 1)d$, ונציב בה את הנתונים:

$$-7 = 38 + (n - 1)\cdot(-3)$$

נפתח סוגריים ונחלץ n:

$$-7 = 38 - 3n + 3 \;\Rightarrow\; 3n = 38 + 7 + 3 \;\Rightarrow\; 3n = 48 \;\Rightarrow\; n = 16$$

נציב בנוסחה (1), ונקבל:

$$S_{16} = \frac{38 - 7}{2} \cdot 16 = 248 \quad , \quad \underline{S_{16} = 248} \quad \triangleright$$

דוגמה 3 כמה מספרים טבעיים עוקבים החל מ- 1 צריך לחבר, כדי שסכומם יהיה 153?

◀ סדרת מספרים טבעיים היא סדרה חשבונית בעלת הפרש $d = 1$.

על פי הנתון: $a_1 = 1$, $S_n = 153$.

את נוסחת הסכום של n איברים ראשונים נרשום באופן אחר:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{3} \cdot n = \frac{a_1 + a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n$$

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n} \qquad (2)$$

נציב את הנתונים ונקבל משוואה לנעלם n:

$$153 = \frac{2 \cdot 1 + (n - 1)n}{2}$$

נכפיל את שני האגפים ב- 2, נפתח סוגריים ונקבל משוואה ריבועית:

$$306 = 2n + (n - 1)n \;\Rightarrow\; n^2 + n - 306 = 0$$

נפתור אותה: $$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 1224}}{2} = \frac{-1 \pm 35}{2}$$

$$n_1 = -18, \; n_2 = 17.$$

כיוון שמספר האיברים אינו שלילי, מקבלים את התשובה: $\underline{n = 17}$ ▷

בדיחה של גאוס

בשיעור חשבון בכיתה שבה למד גאוס, רצה המורה להעסיק את תלמידיו במשימה ארוכת טווח, כך שגם גאוס הגאון לא יוכל לסיימה במהרה. "קרל, אשאל אותך שתי שאלות. אם תענה נכון על הראשונה, לא תצטרך לענות על השנייה: כמה מחטים על עץ האשוח שבפינה?" שאל המורה.

קרל ענה מיד: "שישים ושבעה אלף חמש מאות שלושים וארבע!"

"איך ספרת כל כך מהר?"–תהה המורה.

"זאת כבר השאלה השנייה, המורה" - השיב התלמיד בחיוך...

המעסיק והפועל - חידה

בעל עסק הזמין פועל לעבודה יומית למשך שבוע, מיום ראשון עד שבת,

כאשר כל יום הוא העלה את השכר בסכום קבוע.

ביום רביעי הרוויח הפועל 300 ₪.

כמה הרוויח הפועל על כל העבודה?

רמז סכומים שהרוויח הפועל כל יום מהווים סדרה חשבונית.

נרשום את הנתונים: $a_4 = 300$, $n = 7$. צ.ל.: $S_7 = ?$

נראה שנתונים חסרים: הרי כדי למצוא סכום של סדרה חשבונית צריך לדעת את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה, ושניהם אינם ידועים.

פתרון החידה

על פי הנוסחה לסכום סדרה חשבונית:

$$S_7 = \frac{2a_1 + (7-1)\cdot d}{2}\cdot 7 = 7a_1 + 7\cdot 3d = 7\cdot(a_1 + 3d)$$

אולם $a_1 + 3d$ זה השכר שהפועל קיבל ביום רביעי: $a_4 = a_1 + 3d = 300$ ₪,

לכן: <u>$S_7 = 7\cdot 300 = 2{,}100$ ₪</u> **מ.ש.ל.**

תרגילים

67. מִצאו את הסכום של n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית, אם נתון:

א) $a_1 = 1, a_n = 20, n = 50$ ב) $a_1 = 1, a_n = 200, n = 100$

ג) $a_1 = -1, a_n = -40, n = 20$ ד) $a_1 = 2, a_n = 100, n = 50$

68. מִצאו את סכום כל המספרים הטבעיים מ- 2 עד 98.

69. מִצאו את סכום כל המספרים האי-זוגיים מ- 1 עד 133.

70. מִצאו את סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה חשבונית, אם נתון:

א) $a_1 = -5, d = 0.5$ ב) $a_1 = \frac{1}{2},\ d = -3$

71. מִצאו את הסכום של n איברים ראשונים בסדרה חשבונית:

א) $9; 13; 17; \ldots$ אם $n = 11$

ב) $-16; -10; -4; \ldots$ אם $n = 12$

72. מִצאו את סכום הסדרה, אם ידוע שכל המחוברים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית:

א) $3 + 6 + 9 + \ldots + 273$ ב) $90 + 80 + 70 + \ldots + (-60)$

73. מִצאו את הסכום של:

א) כל המספרים הדו-ספרתיים   ב) כל המספרים התלת-ספרתיים.

74. סדרה חשבונית מוגדרת על פי נוסחת האיבר לפי מקומו.

מצאו את S_{50}, אם נתון:

א) $a_n = 3n + 5$ ב) $a_n = 7 + 2n$

75. סדרה מוגדרת על ידי כלל נסיגה: $a_{n+1} = a_n - 3$ והאיבר הראשון: $a_1 = 7$.

מצאו את סכום תשעת האיברים הראשונים סדרה.

76. כמה מספרים טבעיים עוקבים החל מ- 3 יש לחבר, כדי שסכומם יהיה 75?

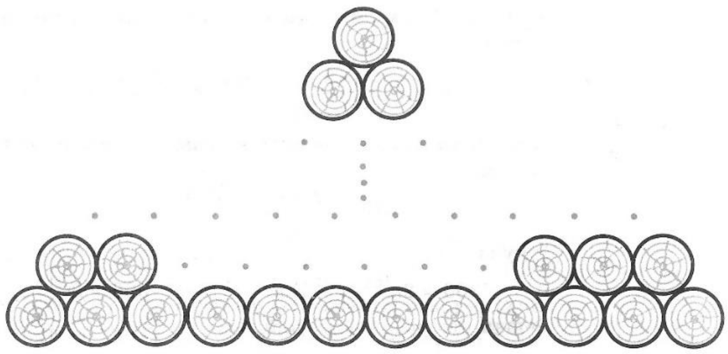
77. מצאו את a_n ו- d של הסדרה החשבונית, אם נתון:

א) $a_1 = 10, n = 14,\ S_{14} = 1050$ ב) $a_1 = 2\frac{1}{3},\ n = 10,\ S_{10} = 90\frac{5}{6}$

78. מצאו את a_1 ו- d של הסדרה החשבונית, אם נתון:

א) $a_7 = 21, S_7 = 205$ ב) $a_{11} = 92, S_{11} = 22$.

79. במחסן עצים סידרו את הקורות שכבה על גבי שכבה, כפי שנראה בציור.
כמה קורות סך הכל במחסן, אם בשכבה הראשונה 12 קורות?



80. בסדרה חשבונית נתון ש: $a_3 + a_9 = 8$. מצאו את S_{11}.

81. מִצאו את האיבר הראשון ואת ההפרש של הסדרה החשבונית, אם נתון:
$S_5 = 65$ ו- $S_{10} = 230$.

82. הוכיחו שבסדרה חשבונית מתקיים השוויון:

$$S_{12} = 3(S_8 - S_4)$$

83. מצאו את סכום 20 איבריה הראשונים של סדרה חשבונית אם נתון כי

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$$

84*. מצאו את הסדרה החשבונית שהממוצע החשבוני של האיבר הראשון והאיבר ה-n-י שווה ל- 2n.

85. מצאו את סכום הסדרה: $\frac{1}{n} + ... + \frac{n-3}{n} + \frac{n-2}{n} + \frac{n-1}{n}$.

הדרכה. חשבו: א. כמה איברים בסדרה? ב. מה סוג הסדרה?

86. נתונה המשוואה: $\frac{7}{15} = \frac{1}{x^2} + ... + \frac{x-3}{x^2} + \frac{x-2}{x^2} + \frac{x-1}{x^2}$, כאשר x הוא מספר טבעי $(x \in N)$. מצאו את פתרונותיה.

87. הוכיחו שאם S_n הוא סכום n איבריה הראשונים של סדרה חשבונית (a_n), אזי מתקיים:

א) $S_{n+3} - 3S_{n+2} + 3S_{n+1} - S_n = 0$ ב) $\frac{m-n}{m+n} = \frac{S_m - S_n}{S_{m+n}}$

88. נתון כי סכום n איבריה הראשונים של הסדרה (a_n) מוגדר לפי הנוסחה $S_n = 2n^2 + 3n$. הוכיחו כי הסדרה חשבונית.

89. נתון כי סכום n איבריה הראשונים של הסדרה (a_n) מוגדר לפי הנוסחה $S_n = 4n^2 + 6n + 2$. האם הסדרה חשבונית?

90. בשתי סדרות חשבוניות: ... ,17, 21 ו- ...,16, 21 יש איברים זהים. מצאו את סכום 100 איבריה הראשונים של כל סדרה.

שאילתות מפתח | תרגילים אינטראקטיביים | ChatGPT

תרגיל 1.9 חישבון סכום כל האיברים בסדרה חשבונית הבאה:

$$2 + 12 + \ldots + 112$$

תרגיל 1.11 נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \ldots, a_n$ שבה מתקיים:

$$a_{35} = 4 \cdot a_8, s_9 = 216$$

מצאו את האיבר a_1 ואת ההפרש d של הסדרה.

תרגיל 1.12 נתונה סדרה חשבונית $a_1, a_2, \ldots, a_n$ שבה מתקיים:

$$a_1 = 6, a_2 = 10, a_n = 82$$

מצאו את s_1 - סכום איברי הסדרה במקומות אי-זוגיים,

ואת s_2 - סכום איברי הסדרה במקומות זוגיים.

סדרה חשבונית – שאלות נוספות

+1 סכום של כמה איברי סדרה חשבונית: ...;17 ;13 ;9 ;5 שווה ל- 10877 ?

+2 במהלך הניסוי, החומר מקורר באופן אחיד למשך 10 דקות כך, שטמפרטורה של החומר ירדה ב- 6 מעלות מדי דקה.
מצאו את טמפרטורת החומר (במעלות צלזיוס) 4 דקות לאחר תחילת הניסוי, אם הטמפרטורה בתחילת הניסוי הייתה (7-) מעלות צלזיוס.

+3 חילזון זוחל מעץ אחד לאחר. כל יום הוא עובר מרחק גדול יותר באותו גודל מאשר ביום הקודם. ידוע כי במהלך הימים הראשון והאחרון זחל החילזון בסך הכל 10 מטרים. מצאו, כמה ימים זחל החילזון בכל המסע, אם המרחק בין העצים הוא 150 מטר?

+4 נאור צריך לפתור 434 בעיות במתמטיקה. בכל יום הוא פותר יותר בעיות מאשר ביום הקודם באותה הכמות. ידוע שביום הראשון נאור פתר 5 בעיות. מצאו כמה בעיות פתר נאור ביום האחרון, אם הוא השלים את כל הבעיות תוך 14 ימים.

+5 המשאית מובילה חצץ במשקל 210 טון, ומגדילה את קצב ההובלה באותו מספר טונות מדי יום. ידוע שביום הראשון המשאית הובילה 2 טון חצץ. מצאו כמה טונות של חצץ הועברו ביום התשיעי אם כל העבודה הסתיימה תוך 14 ימים.

+6 יוני החליט להתחיל לעשות כפיפות בטן כל בוקר. ביום הראשון הוא עשה 30 כפיפות, ובכל יום שלאחר מכן הוא עשה אותה כמות כפיפות יותר מאשר ביום הקודם.
תוך 15 ימים יוני עשה 975 כפיפות בטן. כמה כפיפות בטן עשה יוני ביום החמישי?

+7 האיברים הראשון והשלישי של סדרה חשבונית עולה הם הפתרונות של משוואה ריבועית $x^2 - 2x - 8 = 0$. מצאו את הסכום של עשרים ושישה האיברים הראשונים של הסדרה.

+8 רשומים כמה איברים עוקבים של סדרה חשבונית:

$$11, x, -13, -25\ldots$$

מצאו את האיבר המסומן ב- x.

+9 זוויות של מצולע קמור מהוות סדרה חשבונית המתחילה מ- $143°$ וההפרש $2°$.
כמה קודקודים לכל היותר יכולים להיות למצולע זה?

+10 כמה איברים זהים בשתי סדרות חשבוניות:

$$a_n = 5, 8, 11, \ldots \quad b_n = 3, 7, 11 \ \ldots$$

אם בכל אחת מהן 100 איברים?

+11 ידוע כי הפרש הסדרה החשבונית שווה ל- 4, סכום של חמשת האיברים הראשונים קטן פי- 3 מסכום של חמשת האיברים הבאים. מצאו את הסדרה.

+12 בסדרה חשבונית נתון, כי סכום של n איברים ראשונים שווה ל- $(n+1)$ פעמים של מחצית האיבר ה- n-י. מצאו את הסדרה.

תשובות

67. א) $S_n=525$ ב) $S_n=10050$ ג) $S_n=-410$ ד) $S_n=2550$

68. 4850 69. 4489 70. א) $S_{12}=-27$ ב) $S_{12}=-192$

71. א) $S_{11}=319$ ב) $S_{12}=204$ 72. א) 12558 ב) 240

73. א) 4905 ב) 494550 74. א) $S_{50}=4075$ ב) $S_{50}=2900$

75. $S_9=-45$ 76. עשרה (מ – 3 עד 12)

77. א) $d=10\ ,\ a_{14}=140$ ב) $d=\frac{3}{2}\ ,\ a_{10}=15\frac{5}{6}$

78. א) $d=-2\frac{16}{21}\ ,\ a_1=37\frac{4}{7}$ ב) $d=18\ ,\ a_1=-88$

79. 78 80. 44 81. $d=4\ ,\ a_1=5$ 83. $S_{20}=100$

84. $a_1=2,\ d=4,\ a_n=4n-2$ 85. $\frac{n-1}{2}$ 86. $x=15$

88. $d=4,\ a_1=5$ 89. לא 90. 101,100

+1. 73 +2. -31° +3. 30 מ' +4. $a_{14}=57$

+5. $a_9=18$ +6. 50 +7. 923 +8. $x=-1$

+9. 18 +10. 25 : 11; 23; 35; …;299

+11. 2; 6; 10; 14 +12. $a_1=d$

9. הייצוג הגרפי של סדרה חשבונית

נתבונן בנוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה חשבונית:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

נוסחה זו מגדירה תלות של משתנה a שנקרא משתנה **רציף** (משום שערכו הוא מספר ממשי המיוצג על ציר המספרים כנקודה מתוך רצף של נקודות) במשתנה n שהוא משתנה **בדיד** (משום שערכו הוא מספר טבעי המיוצג על ציר המספרים כנקודות בודדות). במילים אחרות: **a_n היא פונקציה של משתנה בדיד**: $a_n = a(n)$.

גרף של פונקציה זו הוא אוסף של נקודות בודדות על גרף הפונקציה

$$a(x) = a_1 + (x-1)\cdot d = (a_1 - d) + d\cdot x$$

כלומר פונקציה קווית: $a(x) = a + d\cdot x$.

דוגמה 1 מפקידים בבנק (ש"ח) $a = 1000$; הבנק מתחייב כל חודש להוסיף לסכום זה **ריבית** של $a\cdot\alpha$, כאשר a הוא הסכום הפיקדון ו- α הוא **שיעור הריבית**.

אם $\alpha = 1\% = 0.01$, לאחר חודש יהיה בחשבון סך של

$$a_1 = 1000 + 1000\cdot0.01\cdot1 = 1010 \ (₪)$$

לאחר חודשיים:
$$a_2 = 1000 + 1000\cdot0.01\cdot2 = 1020 \ (₪)$$

לאחר 3 חודשים:
$$a_3 = 1000 + 1000\cdot0.01\cdot3 = 1030 \ (₪)$$

לאחר n חודשים:

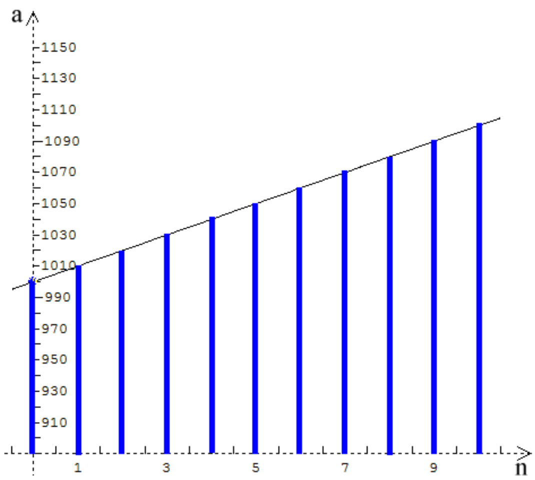
$$a_n = a + a\cdot\alpha\cdot n = a + d\cdot n \ (₪) \ , \ d = a\cdot\alpha$$

סדרת המספרים $a_1, a_2, a_3, \ldots$ היא סדרה חשבונית (כיוון שההפרש בין האיברים הסמוכים הוא מספר קבוע השווה ל- $a\cdot\alpha$).

אם נסמן את הערכים של a_n במערכת צירים (a, n) כל הנקודות יהיו על קו ישר המתאר פונקציה קווית:
$$a(n) = a + d\cdot n$$

שיפוע הגרף המבטא את **קצב הגידול** של הפונקציה, שווה להפרש הסדרה:

$$m = \frac{\Delta a}{\Delta n} = \frac{a_n - a_1}{n} = \frac{a + d\cdot n - a}{n} = d$$



על פי הנוסחה לשטח טרפז, השטח בין הגרף לציר n הוא:

$$A = \frac{a + a_n}{2}\cdot n = S_n$$

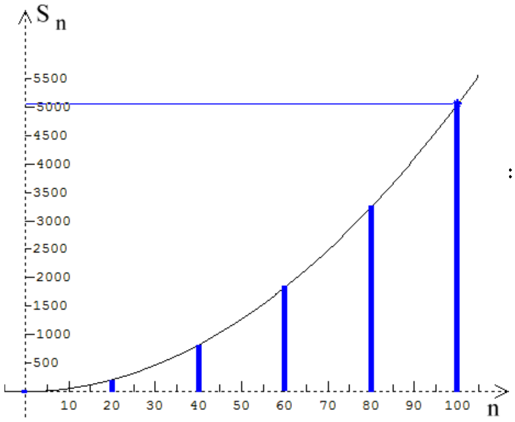
כלומר, שטח זה שווה לסכום של n איבריה הראשונים של הסדרה!

נרשום את נוסחת הסכום באופן אחר:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n = a_1 n + \frac{d}{2}n(n-1) = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$$

כלומר, S_n **היא פונקציה ריבועית של משתנה בדיד n.**

דוגמה 2 בנו את גרף הסכום של n האיברים הראשונים בסדרת מספרים טבעיים.



◀ נחשב את הסכום $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$:

$a_1 = 1,\ d = 1,\ n = n$, $S_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$

נשרטט את הגרף של $S(n)$.

צורתו של הגרף פרבולה. נוודא שערכי הנקודות בגרף מתאימים לערכים המחושבים :

$n = 20$: $S_{20} = \frac{1}{2} \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 20 = 210$

$n = 40$: $S_{40} = \frac{1}{2} \cdot 40^2 + \frac{1}{2} \cdot 40 = 820$

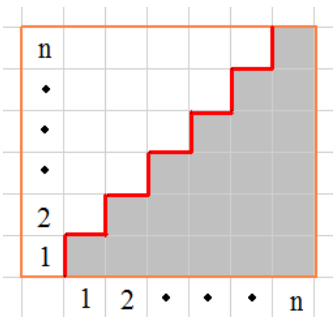
$n = 60$: $S_{60} = \frac{1}{2} \cdot 60^2 + \frac{1}{2} \cdot 60 = 1830$

$n = 100$: $S_{100} = \frac{1}{2} \cdot 100^2 + \frac{1}{2} \cdot 100 = 5050$

במקרים מסוימים אפשר לחשב את סכום איבריה של סדרה חשבונית באמצעות הייצוג הגרפי.

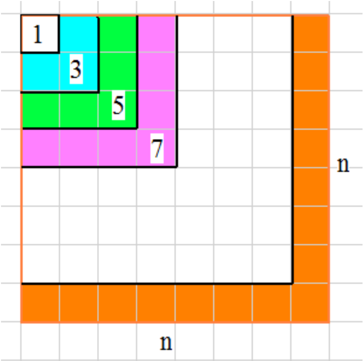
דוגמה 3 חַשבו סכום של n מספרים טבעיים ראשונים בדרך גרפית.

◀ התבוננו באיור : בכל עמודה מספר משבצות גדול ב- 1 מהעמודה הסמוכה (בכיוון האופקי). לכן הסכום המבוקש שווה למספר משבצות צבועות, כלומר למחצית המשבצות שבמלבן $n \times (n+1)$:



$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

דוגמה 4 חַשבו סכום של n מספרים אי-זוגיים ראשונים בדרך גרפית.



נבנה צורה המדמה את הבעיה: מספר המשבצות בכל זויתן, החל מהזוויתן השני, הוא מספר אי-זוגי הגדול ב- 2 מהזוויתן שמעליו.

סכום כל המשבצות שווה לשטח הריבוע $n\times n$:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

כמובן, אותה תשובה נקבל אם נשתמש בנוסח הסכום:

$$a_1 = 1,\ a_n = 2n - 1,\ S_n = \frac{1 + (2n - 1)}{2} \cdot n = n^2$$

10. תכונות נוספות של סדרה חשבונית

כאשר מטילים אבן מראש הצוק כלפי מטה ללא מהירות התחלתית, היא נופלת באופן חופשי כך, שהמרחקים אותם היא עוברת כל שנייה מהווים סדרה חשבונית:

$$a_1 = 5m,\ a_2 = 15m,\ a_3 = 25m,\ \ldots \qquad (3)$$

כלומר, במשך שנייה ראשונה של הנפילה האבן עוברת 5 מ', במשך שנייה שניה היא עוברת 15 מ', וכך הלאה.

המדען הראשון שחקר את התופעה של נפילה חופשית היה גלילאו גליליי, שבשנת 1583 מדד מרחקים אותם עוברים כדורים שנפלים ממגדל גבוה בעיר פיזה באיטליה. על-סמך המדידות הוא הסיק כי יחסי המרחקים אותם עוברים הכדורים הנופלים חופשי בפרקי זמן שווים הם כמו יחסים בין מספרים אי-זוגיים:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots\ a_n = 1 : 3 : 5 : \ldots : (2n-1) \qquad (4)$$

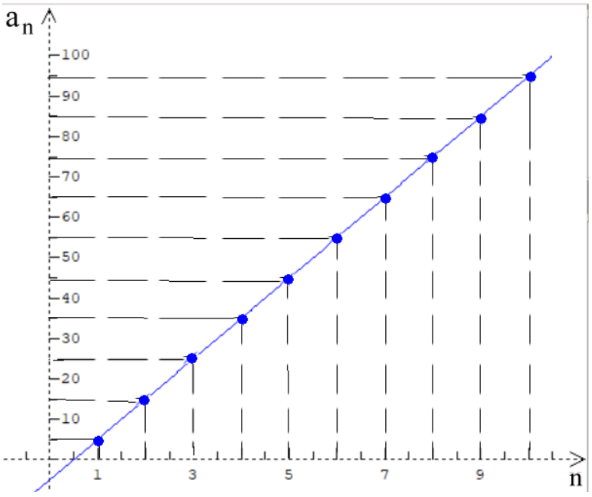
במקרה של נפילה חופשית המתוארת באמצעות הסדרה (1), הפרש הסדרה $d = 10$, ואיבר ה- n-י הוא:

$$a_n = 5(2n - 1) = 10n - 5 \qquad (5)$$

נוכיח כי הסדרה היא חשבונית. נחשב את ההפרש של איברים סמוכים:

$$a_{n+1} - a_n = 5(2(n+1) - 1) - 5(2n - 1) = 5\cdot 2 = 10$$

כיוון שלכל n מתקיים $a_{n+1} = a_n + 10$, מסיקים כי הסדרה היא חשבונית, והפרש הסדרה $d = 10$. גרף הסדרה (3) מהווה אסוף נקודות בעלות שיעור x שלם (n) על הישר של גרף הפונקציה $f(x) = 10x - 5$, כאשר שיפוע הישר שווה להפרש הסדרה:



$$\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta a}{\Delta n} = d$$

גלילאו חישב גם את המרחקים אותם עובר גוף הנופל חופשי בין תחילת הנפילה עד לרגע מסוים n, כלומר סכום המרחקים:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

נשתמש בנוסחה (5) לאיבר ה- n-י ובנוסחה לסכום סדרה חשבונית, ונחשב:

$$(6) \qquad S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{5 + (10n - 5)}{2} \cdot n = 5n^2$$

כלומר, יחסי המרחקים אותם עובר גוף הנופל חופשי מתחילת הנפילה עד לרגע מסוים n הם כמו יחסי הריבועים של מספרים עוקבים:

$$(7) \qquad S_1 : S_2 : S_3 : \ldots : S_n = 1 : 4 : 9 : \ldots : n^2$$

נבדוק את ההשערה העולה מניתוח המסקנה (7) (משפט **הפוך**):

משפט אם סכומי n איברים עוקבים של סדרה שווים ל- kn^2 עבור כל n (k – מספר קבוע), אזי הסדרה היא חשבונית, ויחסי האיברים הסמוכים שווים ליחס מספרים אי-זוגיים:

$$a_1 : a_2 : a_2 : \ldots : a_n = 1 : 3 : 5 : \ldots : (2n - 1)$$

הוכחה ניעזר בנוסחה לחישוב איברי סדרה כלשהי באמצעות סכומים חליקיים של איברי הסדרה:

$$(8) \qquad a_n = S_n - S_{n-1}$$

נציב את הביטויים של S_n ו- S_{n-1} ונחשב את האיבר ה-n-י:

$$a_n = kn^2 - k(n - 1)^2 = k(n^2 - (n^2 - 2n + 1)) = k(2n - 1)$$

$$a_n - a_{n-1} = k(2n - 1 - (2(n - 1) - 1) = k = d$$

כלומר, הפרש בין איברים סמוכים של הסדרה הוא קבוע, לכן הסדרה היא חשבונית. ▷

נחשב את היחסים בין האיברים הסמוכים של הסדרה:

$$a_1 : a_2 : a_3 : \ldots : a_n = k(2\cdot1 - 1):k(2\cdot2 - 1):k(2\cdot3 - 1):\ldots:k(2n - 1) =$$
$$= 1:3:5:\ldots: (2n - 1)$$

אילו היינו מעניקים לאבן מהירות התחלתית כלפי מטה, היא הייתה עוברת בכל פרק זמן מרחק גדול יותר מהאבן שנופלת ללא מהירות התחלתית. על פני כדור הארץ, המרחק אותו עובר גוף הנזרק כלפי מטה במהירות התחלתית v_0 בזמן t שווה ל-

$$x = v_0\cdot t + \frac{g\cdot t^2}{2}$$

עבור רגעי זמן שלמים $(t = n)$ על פני כדור הארץ $(g \approx 10)$ נקבל:

$$S_n = v_0\cdot n + 5n^2$$

מכאן נקבל ביטוי לאיבר ה- n-י של סדרת המרחקים:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = v_0\cdot n - v_0\cdot(n - 1) + 5n^2 - 5\cdot(n - 1)^2 =$$
$$= (10n - 5) + v_0 \qquad (9)$$

נחשב את ההפרש בין האיברים הסמוכים:

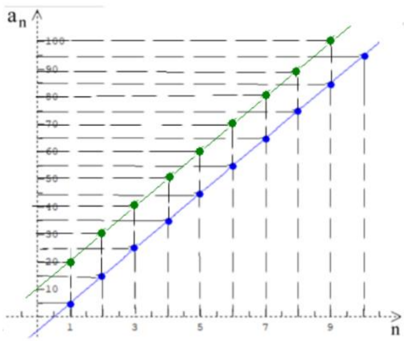
$$a_n - a_{n-1} = 10n - 5 + v_0 - (10\cdot(n - 1) - 5 + v_0) = 10 \qquad (10)$$

מהשוואת הביטויים לאיבר n-י (9) והפרש הסדרה (10) עם אלה בסדרת המרחקים עבור הזריקה ללא מהירות התחלתית (5) ו – (6) רואים, **כי לכל איברי הסדרה (3) התווסף גודל קבוע (v_0), ואילו הפרש הסדרה נשאר ללא שינוי.**

לדוגמה, נחשב כמה איברים רשונים של הסדרה (9) למקרה של $v_0 = 10$:

$$a_1 = 5 + v_0 = 15, a_2 = 15 + v_0 = 25,$$
$$a_3 = 25 + v_0 = 35$$

גרף הסדרה (9) הוא ישר המקביל לגרף הסדרה (3), שהועתק לאורך הציר האופקי לגודל קבוע (קו ירוק).



המסקנה : הוספת גודל קבוע לכל איברי סדרה חשבונית היא פעולה **שמשמרת** את תכונות הסדרה : היא נשארת סדרה חשבונית בעלת אותו הפרש d ; גרף הסדרה נשאר קו ישר בעל אותו שיפוע k (השווה להפרש הסדרה), שמועתק לאורך ציר אנכי לאותו הגודל שהתווסף לכל איבר בסדרה.

מה היו תוצאות הניסוי אילו גלילאו היה מודד מרחקים כל 2 שניות, ולא כל שנייה?

במקרה זה, סדרת המדידות b_m הייתה כוללת רק את **האיברים הזוגיים** של הסדרה המקורית a_n :

$$b_1 = a_2,\ b_2 = a_4,\ldots \qquad (11)$$

הפרש הסדרה b שווה להפרש האיברים הסמוכים :

$$d_m = b_{n+1} - b_n = a_{2n+2} - a_{2n} =$$

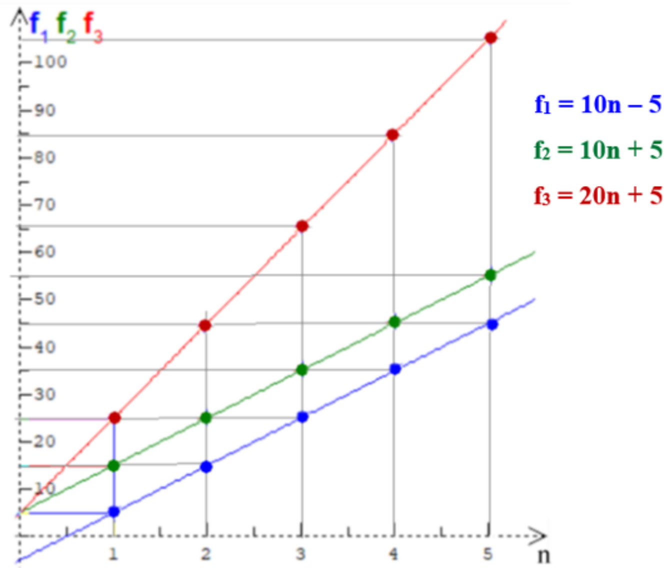
$$= 10\cdot(2n+2) - 5 - (10\cdot(2n) - 5) = 20 \qquad (12)$$

כיוון שהאיבר הראשון b_1 של סדרת האיברים הזוגיים שווה ל- 25, מסיקים כי הנוסחה לאיבר ה- n-י של הסדרה היא :

$$b_n = 20n + 5 \qquad (13)$$

לכן, הסדרה תישאר להיות סדרה חשבונית, אולם הפרש הסדרה יהיה כפול מזה שבסדרה המקורית.

גרף הסדרה (11) הוא אסוף נקודות בעלות שיעור x שלם (m) על הישר של גרף הפונקציה $f(x) = 20x + 5$.



נציין, כי משמעות הבחירה של איברים זוגיים היא **כיווץ קנה מידה בציר האופקי** לעומת הסדרה המקורית: המרחק בין איברים סמוכים בסדרה חדשה הוא כפול מזה שבסדרה המקורית: $b_2 – b_1 = a_4 – a_2 = 4 – 2 = 2$.

כיווץ בציר x גורם ויזואלית למתיחה בציר y, מה שמתבטא בהגדלת שיפוע של קו הגרף (קו אדום).

שימו לב: הגרפים לא עוברים דרך ראשית הצירים (חישבו, מדוע?).

נתבונן בסדרה אחרת, המייצגת את מקום הגוף הנע במהירות קבועה v ברגעי זמן שווים: $x = v•t$.

עבור רגעי זמן שלמים $(t = 1, 2, 3, …, n)$ נקבל את הסדרה הבאה:

$$x_1 = v,\ x_2 = 2v,\ x_3 = 3v,\ …,\ x_n = v•n$$

לדוגמה, אם מהירות הגוף שווה ל- 3 (מ'/ש'), נקבל:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 6,\ x_3 = 9,\ …,\ x_n = 3•n \qquad (13)$$

נבדוק האם הסדרה היא חשבונית:

$$x_{n+1} – x_n = 3•(n+1) – 3n = 3$$

ההפרש קבוע $(d = 3)$ ואינו תלוי במספר האיבר, לכן הסדרה היא חשבונית.

נתבונן בסדרת המקומות של גוף אחר, שנע במהירות גבוהה יותר, לדוגמה, $v_1 = 5v = 15$ (m/sec). סדרת המרחקים אותם עובר גוף זה ברגעי זמן שלמים:

$$x_1 = 15,\ x_2 = 30,\ x_3 = 45,\ …,\ x_n = 15•n \qquad (14)$$

נבדוק האם סדרה זו היא חשבונית:

$$x_{n+1} – x_n = 15•(n+1) – 15n = 15$$

ההפרש קבוע $(d = 15)$ ואינו תלוי במספר האיבר, לכן סדרה זו היא חשבונית.

המסקנה: מכפלת כל איברי סדרה במספר קבוע גם היא **משמרת את תכונת הסדרה** (אומנם משנה את הפרש הסדרה).

סיכום

א. סדרה חשבונית מיוצגת על-ידי אוסף נקודות על קו הגרף של פונקציה קווית ממשתנה בדיד n בתחום מספרים טבעיים : $a_n = d\cdot n + c$, כאשר d מכונה הפרש הסדרה ו- c – מספר קבוע. גרף הפונקציה המייצגת את הסדרה הוא קו ישר, בעל שיפוע d, המועתק לאורך ציר אופקי לגודל c.

ב. הוספת אותו המספר M לכל איברי סדרה חשבונית יוצרת סדרה חשבונית חדשה :

$$\underline{b_n} = a_n + M = d\cdot n + c + M = \underline{d\cdot n + c1},\ c1 = c + M$$

כאשר הפרש הסדרה (השווה לשיפוע הגרף) לא השתנה. גרף הפונקציה המייצגת את הסדרה מהווה ישר המקביל לישר המקורי, המועתק מעלה או מטה.

ג. מכפלת כל איברי סדרה חשבונית במספר קבוע K יוצרת סדרה חשבונית חדשה :

$$\underline{c_n} = a_n \cdot K = (d\cdot K)\cdot n + c\cdot K = \underline{d1\cdot n + c2},$$

$$d1 = d\cdot K,\ c2 = c\cdot K$$

כלומר, הסדרה היא חשבונית, אולם הפרש הסדרה שונה (שיפוע הגרף וגודל העתקה אנכית שונים).

פעולות אלה – הוספת גודל קבוע לאיברי סדרה חשבונית וכפל איבריה באותו המספר – משאירות את סוג הסדרה (חשבונית), ולכן הן מכונות **פעולות משמרות**.

פעולות מקלקלות

נדמיין את נפילת האבן שעליה מותקן מנוע, המופעל כל שנייה לפרק זמן קצר, ובולם את מהירות האבן כך שמהירות הפגיעה בקרקע לא תהיה גבוהה מדי.
במקרה זה, המרחקים שאותם תעבור האבן בכל שנייה יהיו פחותים מאלה שבניסוי המקורי, ואיברי הסדרה g_n המייצגת אותם יהיו שונים מאלה שבסדרה a_n.

לדוגמה : אם המרחקים אותם עוברת האבן בכל שנייה יופחתו לפי החוק :

$$g_n = 10n - 5 - 0.5n^2 \qquad (15)$$

אזי האיברים העוקבים של הסדרה החדשה יהיו בהשוואה לאיברי הסדרה (3) :

$$a_1 = 5,\ a_2 = 15,\ a_3 = 25,\ \ldots\ a_n = 10n - 5$$

$$g_1 = 4.5,\ g_2 = 13,\ g_3 = 20.5,\ \dots\ g_n = 10n - 5 - 0.5n^2$$

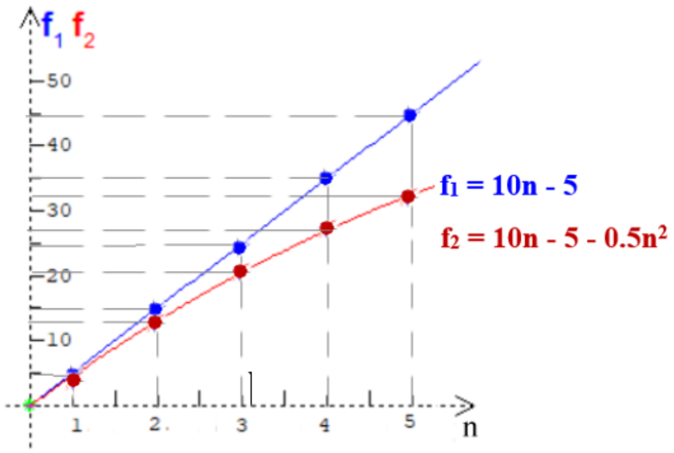
ההפרשים בין איברי הסדרה הסמוכים יהיו תלויים במקום בסדרה:

$$\underline{g_{n+1} - g_n} = (10 \cdot (n+1) - 5 - 0.5 \cdot (n+1)^2 - (10n - 5 - 0.5n^2)) = \underline{9.5 - n}$$

כלומר, **הסדרה אינה מהווה סדרה חשבונית**.

אפשר לומר איפו, כי הוספת המספר התלוי במקום האיבר לכל איברי סדרה חשבונית יוצרת סדרה שאינה חשבונית, כלומר, פעולה מסוג זה **מקלקלת** את תכונת הסדרה החשבונית.

הערה: התבוננות בגרף הסדרה (ראו את הגרף בעמוד הבא) מאפשרת לקבוע אם הפעולה היא משמרת או מקלקלת: אם הפונקציה המייצגת את הסדרה החדשה היא קווית, אזי הפעולה היא משמרת, ואם היא אינה קווית (לדוגמה, פונקציה ריבועית (15)), אזי הפעולה היא מקלקלת.



תרגיל

יוני החליט לשפר את הכושר באמצעות הוספת תרגילי שכיבות שמיחה אותן הוא עושה כל בוקר. הוא התחיל עם 20 שכיבות, והוסיף כל יום, החל מיום א', כמות השווה לריבוע של מספר היום, לדוגמה: ביום א' הוא הוסיף תרגיל אחד, ביום ב' – ארבעה תרגילים, ביום ג' – תשעה תרגילים, וכך הלאה.

א. רשמו נוסחה לכמות התרגילים אותם יוני עשה כל יום, החל מיום א'.
האם מספרי התרגילים מהווים סדרה חשבונית?

ב. כמה תרגילים עשה יוני ביום ו'?

ג. החל מיום א' בשבוע הבא החליט יוני להפחית בהדרגה את כמות התרגילים: ביום א' – 5 תרגילים פחות מיום ו', בימים הבאים – כל יום 5 תרגילים פחות מיום קודם. רשמו נוסחה לכמות התרגילים אותם יוני עשה כל יום, החל מיום א' בשבוע הבא.

ד. כמה תרגילים יעשה יוני ביום ו' הבא? האם כמויות התרגילים בשבוע השני מהוות סדרה חשבונית? אם כן, מה הפרש הסדרה?

ה. כעבור כמה ימים כמות התרגילים תרד עד לכמות התחלתית של 20 תרגילים ליום?

ו. סרטטו גרף של כמות התרגילים אותם יוני עשה במשך שבועיים כפונקציה של יום השבוע (בשבת יוני לא עשה התעמלות).

תשובות: א) $a_n = 20 + n^2$, לא. ב) $a_6 = 56$ ג) $b_n = 56 - 5n$ ד) $b_6 = 26$ ה) 8

סדרה חשבונית - תרגילים אינטראקטיביים עם פתרונות

7.1 בניסוי גלילאו שביצעו על כוכב לכת אחר גילו, כי המרחקים אותם עובר גוף הנופל חופשי ללא מהירות התחלתית בכל שנייה מהווים סדרה:

$$a_1 = 2m,\ a_2 = 6m,\ a_3 = 10m,\ \dots$$

א. מה המרחק אותו יעבור הגוף בשנייה עשירית של נפילתו?

ב. מה המרחק הכולל אותו יעבור הגוף ב- 10 שניות ראשונות של נפילתו?

ג. איזה מרחק יעבור הגוף בשנייה השמינית של נפילתו, אם תינתן לגוף מהירות התחלתית של 2 מ'/ש' כלפי מטה?

ד. איזה מרחק יעבור הגוף בשנייה השמינית של נפילתו, אם תינתן לגוף מהירות התחלתית של 2 מ'/ש' כלפי מעלה?

7.2 סכום של n איברים הראשונים של הסדרה a_n מוגדרת על-ידי הנוסחה:

$$S_n = 2n^2 + 3n.$$

הוכיחו כי הסדרה היא חשבונית.

7.3 ידוע כי עבור כל n סכום של n איברים של סדרה חשבונית מתוארת על-ידי הנוסחה:

$$S_n = 4n^2 - 3n.$$

מצאו את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה.

7.4 מצאו סכום של 20 איברים של סדרה חשבונית, אם ידוע כי האיבר הראשון שלה שווה ל- 2, והאיבר השביעי הוא 20.

7.5 מצאו את האיבר הראשון ואת ההפרש של סדרה חשבונית, אם ידוע כי סכום של חמשת איברי הראשונים הזוגיים שווה ל- 15, וסכום של שלושת האיברים הראשונים שווה ל- (-3).

7.6 סכום האיברים הראשון והחמישי של סדרה חשבונית שווה ל- 26, ומכפלת האיברים השני והרביעי הוא 160. מצאו את הסכום של ששת האיברים הראשונים של הסדרה.

7.7 סכום האיברים השלישי והתשיעי של סדרה חשבונית שווה ל- 8. מצאו את הסכום של 11 איברים ראשונים של הסדרה.

7.8 בין המספרים 1 ו- 1.3 רשמו חמישה מספרים כך, שהם יחד עם הנתונים יהוו סדרה חשבונית.

7.9 בין המספרים 4 ו- 40 רשמו ארבעה מספרים כך, שתיווצר סדרה חשבונית.

7.10 מצאו את הסכום של כל מספרים תלת-ספרתיים כאלה, ששארית החילוק שלהם ב- 3 היא 2.

7.11 מצאו סדרה חשבונית עולה שבה סכום שלושת האיברים הראשונים שווה ל- 27, וסכום הריבועים שלהם שווה ל- 275.

7.12 בשתי סדרות חשבוניות: 17, 21, ... ו- 16, 21, ... יש איברים משותפים. מצאו סכום של 100 איברים ראשונים משותפים לשתי הסדרות.

7.13 הוכיחו, כי בכל סדרה חשבונ ית עבור כל n מתקיים: $S_{2n} = S_n + \frac{1}{3} S_{3n}$
.