

סדרות

1. מהי סדרה?

בחיי היום יום נוהגים אנו לְמַסְפֵּר עצמים שונים כדי לציין את מקומם ואת סדר הופעתם, לדוגמה מספור בתים ברחוב, כסאות בתאטרון, תור לקופה, תעודות זיהוי וכד'.

משמעות המספור היא ההתאמה בין קבוצה של מספרים טבעיים $n \in \mathbb{N}$ לבין קבוצת העצמים שאותם יש למספר, כאשר לכל מספר n מתאים עצם אחד ויחיד.

באופן כזה מקבלים קבוצה מסודרת, הנקראת **סדרה**, כאשר כל עצם מתאפיין במספר שלו, מה שמאפשר לאתר את מקומו בסדרה באופן חד משמעי.



כך על פי המספר על חולצה אפשר לדעת את שמו של שחקן כדורגל (העצמים בסדרה הם שחקנים), על פי מספר מכונית אפשר לדעת את שם הבעלים (העצמים הם שמות הבעלים), על פי מספר בית אפשר לדעת את מקומו ברחוב (העצמים הם בתים) וכד'.

העצמים שבסדרה יכולים להיות גם **מספרים**. במקרה זה הסדרה נקראת **סדרה מספרית**. כך סדרת כמויות כסף בכספות בבנק היא סדרה מספרית, ועל פי מספר הכספת אפשר לבדוק כמה כסף יש בה (העצמים במקרה זה הם כמויות כסף בכספות המתבטאות במספר).

נניח שבתא מס' 1 סך של a_1 ₪, בתא מס. 2 סך של a_2 ₪, וכך הלאה. נרשום את כל הסכומים ונקבל **סדרת מספרים**:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_N$$

כאשר N הוא מספר כל החשבונות בבנק.

כל המספרים הרשומים בתור, מהווים **סדרה מספרית** שאורכה N .

לכל n מ-1 עד N מתאים המספר a_n , הנמצא במקום n -י מתחילת הסדרה.

מספר a_1 נקרא **האיבר הראשון** של הסדרה, מספר a_2 - **האיבר השני**, מספר a_3 - **האיבר השלישי** וכך הלאה.

סדרה כללית

שימו לב :

- א. בין המספרים יכולים להופיע מספרים זהים.
- ב. אפשר לסמן את איברי הסדרה גם באותיות אחרות, לדוגמה: u_n, c_n, b_n וכד'.
ג. סדרה יכולה להיות **סופית**, שבה מספר איבריה סופי, לדוגמה: סדרת מספרים טבעיים בתחום בין 3 ל-100 שמתחלקים ב-3; או סדרה **אינסופית**, שבה מספר איבריה אינסופי, לדוגמה, סדרת מספרים זוגיים $2, 4, 6, 8, 10, \dots$ או סדרת מספרים ראשוניים: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots$.

כיצד להגדיר סדרה מספרית, כלומר איך לדעת מה האיבר הנמצא במקום n מתחילת הסדרה?

A	
5,134 ₪	1
8,937 ₪	2
12,095 ₪	3
113,291 ₪	4
18,950 ₪	5
212,925 ₪	6
112,000 ₪	7
6,355 ₪	8
126,987 ₪	9
2,830 ₪	10
??????	11

אחת הדרכים היא לרשום את כל האיברים **בטבלה** שבה התאים ממוספרים, לדוגמה:
שימו לב : איברים שונים בסדרה זו אינם קשורים זה בזה, לכן אין שום דרך לדעת מה האיבר בתא מס. 11, גם אם ידועים כל האיברים הקודמים.
דרך אחרת להגדיר סדרה מספרית היא **באופן מילולי**, למשל: "כל איברי הסדרה שווים ל-1", כלומר הסדרה היא: $1, 1, 1, 1, 1, \dots$ או:

"הסדרה מכילה את כל המספרים הראשוניים החל מ-2", כלומר $2, 3, 5, 7, 11, \dots$.

האם תוכלו לומר מה המספר הבא בסדרה: $2, 3, 5, 7, 11, \dots$?

ומה המספר במקום העשירי: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots$
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

דוגמאות נוספות לסדרות המוגדרות באופן מילולי:

- סדרת הריבועים של מספרים טבעיים עוקבים
- סדרת חזקות אי-זוגיות של מספרים טבעיים עוקבים
- סדרת שורשים ריבועיים ממספרים טבעיים עוקבים
- סדרת ערכי סינוסים של מספרים טבעיים עוקבים
- סדרה שבה כל איבר שווה לסכום הספרות במספר מקומו n בסדרה

סדרה כללית

במקרים כאלה, כאשר הסדרה מתוארת באופן מילולי, לא תמיד אפשר לומר מהו איבר הסדרה הנמצא במקום מסוים.

לענות על שאלה זו מאפשרת הגדרת הסדרה באמצעות **נוסחה**. שיטה זו מאפשרת לחשב את כל איברי הסדרה שמקומו ידוע.

אם נסמן את מקום האיבר ב- n , אזי אומרים שנוסחת הסדרה מאפשרת לחשב את **האיבר ה- n** .

A	
2	1
4	2
6	3
8	4
10	5
12	6
14	7
16	8
18	9
?	10

דוגמה 1 את הסדרה של מספרים זוגיים המתחילה מ- 2 אפשר להגדיר באמצעות הטבלה:

האם תוכלו להיעזר בטבלה ולנחש מה האיבר במקום העשירי (a_{10}) ? [כדי לבדוק את הניחוש הקישו בקישור זה.](#)

פתרון

מספר זוגי הוא המספר שמתחלק ב- 2, כלומר המספר שאפשר להציגו לפי הנוסחה: $a = 2 \cdot n$.

השוואה עם הטבלה מראה כי איברי הסדרה מקיימים את הנוסחה אם n הוא מקום האיבר בסדרה.

לכן הנוסחה לאיבר n -י בסדרה זו היא: $a_n = 2 \cdot n$.

נציב בנוסחה זו $n = 10$, ונקבל תשובה: $a_{10} = 2 \cdot 10 = 20$.

דוגמה 2 מה הנוסחה שמגדירה את סדרת המספרים האי-זוגיים החל מ- 3?

רמז מה ההפרש בין מספר זוגי ומספר אי זוגי הקרוב ביותר אליו?

[אם ניחשתם – הקישו בקישור זה ובדקו את עצמכם.](#)

n	a	$2n + 1$
1	3	$2 \cdot 1 + 1$
2	5	$2 \cdot 2 + 1$
3	7	$2 \cdot 3 + 1$
4	9	$2 \cdot 4 + 1$
5	11	$2 \cdot 5 + 1$
6	13	$2 \cdot 6 + 1$
7	15	$2 \cdot 7 + 1$
8	17	$2 \cdot 8 + 1$
9	19	$2 \cdot 9 + 1$
10	21	$2 \cdot 10 + 1$

פתרון

נרשום כמה איברים ראשונים של הסדרה בטבלה:

מהטבלה אפשר להסיק כי הנוסחה שמגדירה

את האיבר a_n על פי מקומו בסדרה של

מספרים אי-זוגיים היא: $a_n = 2n + 1$.

לאיבר ה- n -י בסדרה קוראים גם **איבר כללי**.

סדרה כללית

בסדרה מספרית שבה ידועה נוסחה לאיבר כללי אפשר למצוא את כל איבריה.

דוגמה 3 בסדרת ריבועים של מספרים טבעיים :

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, (n+1)^2, \dots$$

האיבר הראשון הוא $a_1 = 1$, האיבר השני $a_2 = 4$, השלישי $a_3 = 9$, ..., האיבר ה- n י-

הוא $a_n = n^2$, והאיבר שמקומו בסדרה $(n+1)$ הוא $a_{n+1} = (n+1)^2$.

מה האיבר שמקומו בסדרה: $100 = 2n$?

פתרון $a_{2n} = (2n)^2 = 4n^2$, $a_{100} = 100^2 = 10,000$

דוגמה 4 רשמו ששת איבריה הראשונים בסדרת חזקות של 2: $a_n = 2^n$.

פתרון נציב בנוסחת האיבר הכללי $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

ונקבל בהתאמה: $2, 2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, \dots$

תשובה: $2, 4, 8, 16, 32, 64$
 $n=1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6$

שימו לב! ערך האיבר a_n לא דווקא שווה למספר המסמן את מקומו בסדרה (n) .

דוגמה 5 סדרת מספרים מוגדרת באמצעות נוסחת האיבר ה- n :

$$a_n = n(n-2)$$

מצאו את האיבר מספר 100 של הסדרה.

פתרון נציב בנוסחת האיבר לפי מקומו $n = 100$:

$$\triangleright a_{100} = 100(100-2) = 100 \cdot 98 = 9800$$

באמצעות נוסחת האיבר לפי מקומו אפשר גם לאתר בסדרה את מקומו של איבר שערכו ידוע.

דוגמה 6 סדרת מספרים מוגדרת באמצעות נוסחת האיבר ה- n : $x_n = 2n + 3$

מצאו בסדרה את מקומו של האיבר שערכו: (א) 43 (ב) 50

פתרון

(א) על פי הנתון: $x_n = 2n + 3 = 43$, מכאן נחלץ n : $2n = 40$, $n = 20$.

(ב) על פי הנתון: $x_n = 2n + 3 = 50$, מכאן נחלץ n : $2n = 47$, $n = 23.5$.

n הוא מספר סידורי של האיבר, ולכן הוא חייב להיות שלם.

סדרה כללית

אי לכך, בסדרה הנתונה לא נמצא איבר השווה ל-50. ▷

לא כל סדרה מספרית אפשר לתאר באמצעות נוסחה לאיבר לפי מקום. בעיה זו היא למעשה בעיה הפוכה למציאת האיבר לפי מקומו. במקרים מסוימים אפשר לנחש את הנוסחה על פי כמה איברים נתונים בסדרה. חשוב לבדוק את הניחוש על כל איברי הסדרה הנתונים!

דוגמה 7 מצאו את כלל הסדרה: 4, 8, 12, 16, 20, ...

פתרון

ניחוש: זוהי סדרת כפולות של 4. נרשום את הטענה באמצעות הנוסחה: $a_n = 4n$.
בדיקה: $n = 1: a_1 = 4 \cdot 1 = 4; n = 2: a_2 = 4 \cdot 2 = 8; n = 3: a_3 = 4 \cdot 3 = 12; \dots$

דוגמה 8 מצאו את נוסחת האיבר ה-n בסדרה: 7, 11, 15, 19, 23, ...

פתרון

ניחוש: בסדרה זו כל איבר גדול ב-3 מהאיבר המתאים בדוגמה הקודמת ($a_n = 4n$).

לכן: $a_n = 4n + 3$

בדיקה: $n = 1: a_1 = 4 \cdot 1 + 3 = 7;$

$n = 2: a_2 = 4 \cdot 2 + 3 = 11;$

$n = 3: a_3 = 4 \cdot 3 + 3 = 15;$

$n = 4: a_4 = 4 \cdot 4 + 3 = 19;$

$n = 5: a_5 = 4 \cdot 5 + 3 = 23.$

דוגמה 9 מצאו את כלל הסדרה: $\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}$

כאן: $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ (בדקו זאת בעצמכם)

דוגמה 10

מצאו את נוסחת האיבר ה-n בסדרה: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

רמז

נסו תחילה למצוא את חוקיות הסדרה פשוטה יותר (הנקראת סדרה הרמונית):

סדרה כללית

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

ניחשתם נכון! התשובה: $a_n = \frac{1}{n}$.

הבעיה שנותרה – "לגרום" לאיברים סמוכים להחליף סימנים.

כדי לעשות זאת ניזכר בתכונות החזקות בעלות בסיס שלילי.

ענו על השאלות:

מה ערך הביטוי:

א. $(-1)^1$ ב. $(-1)^2$ ג. $(-1)^3$ ד. $(-1)^{2n}$ ה. $(-1)^{2n+1}$?

תשובה: ערך החזקה עם בסיס שלילי הוא חיובי, כאשר המעריך זוגי.

ושלילי כאשר המעריך אי זוגי:

א. $(-1)^1 = -1$ ב. $(-1)^2 = 1$ ג. $(-1)^3 = -1$ ד. $(-1)^{2n} = 1$ ה. $(-1)^{2n+1} = -1$

קעת ברור כיצד לרשום את הנוסחה לאיברים בעלי סימנים מתחלפים:

$$y_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

נציב $n = 1, 2, 3, 4$ ונבדוק אם כל איברי הסדרה מקיימים את הנוסחה לאיבר הכללי

שפיתחנו:

$$y_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1} = -1$$

$$y_2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_3 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$y_4 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

משימת חקר: נתונים ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \dots$$

מצאו את הנוסחה האיבר לפי מקומו בסדרה.

ערכי המונה הם מספרים טבעיים עוקבים, והמכנה הוא חזקות של 2,

לכן התשובה היא: $a_n = \frac{n}{2^n}$.

האם זאת תשובה יחידה?

כלומר: האם יש נוסחאות אחרות המתארות את ארבעת האיברים האלה?

סדרה כללית

רמז

נסו את הנוסחה הבאה: $a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + n}{2^n}$:
 הציבו בה את $n = 1, 2, 3, 4$.

- א. האם הערכים של a_n שקיבלתם שונים מערכי האיברים הנתונים?
 ב. האם אפשר לטעון ששתי הנוסחאות מתארות את הסדרה?
 ג. האם יש עוד נוסחאות שמתארות את הסדרה?

אפשר להוכיח, כי לכל סדרה אינסופית המוגדרת באמצעות כמה איברים ראשונים, אפשר להתאים אינסוף נוסחאות של האיבר ה-n-י!

תרגילים

1. נתונה סדרת ריבועים של מספרים טבעיים:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2, (n+1)^2, \dots$$

- (א) מהם האיברים השלישי, השישי והאיבר ה-n-י (איבר שמקומו n) של הסדרה?
 (ב) מהו מיקום האיבר בסדרה: 4 ? 25 ? n^2 ? $(n+1)^2$?

2. חשבו את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה, בעזרת הנוסחה לאיבר לפי מקומו:

(א) $a_n = 2n + 3$ (ב) $a_n = 1 + 3n$ (ג) $a_n = 100 - 10n^2$

(ד) $a_n = \frac{n-2}{3}$ (ה) $a_n = \frac{1}{n}$ (ו) $a_n = -n^3$

3. נתונה סדרה המוגדרת בנוסחה $a_n = n^2$. מה מקומו בסדרה של האיבר השווה ל:

(א) 100 (ב) 144 (ג) 225 ?

האם בין איברי הסדרה נמצאים המספרים:

(ד) 48 (ה) 49 (ו) 169 ?

4. נתונה סדרה המוגדרת בנוסחה $a_n = n^2 - 2n - 6$.

האם בין איברי הסדרה נמצאים המספרים: (א) -3 (ב) 2 (ג) 3 (ד) 9?

סדרה כללית

5. מצאו את ארבעת האיברים הראשונים של סדרת מספרים טבעיים שהם כפולות של 5. מנו את האיברים במקומות 6, 9, 21, n.
6. סדרת מספרים מוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו: $a_n = (n - 1)(n + 4)$. מצאו את n אם ידוע: (א) $a_n = 150$ (ב) $a_n = 104$.
7. מצאו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרת המספרים הטבעיים שהם כפולות של 7. מנו את האיברים במקומות 8, 10, 37, n.
8. מצאו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרת המספרים הטבעיים שהם כפולות של 5. מנו את האיברים במקומות 6, 9, 21, n.
9. נתון כי (a_n) היא סדרת חזקות 3 של מספרים טבעיים. מצאו את a_1, a_2, a_3, a_4, a_n .
10. נתון כי (c_n) היא סדרת חזקות של 2. מצאו את c_1, c_2, c_3, c_4, c_n .
11. רשמו את הנוסחה לאיבר לפי מקומו בסדרה שבה נתונים חמשת איבריה הראשונים:
 (א) 1, 2, 3, 4, 5, ... (ב) 6, 7, 8, 9, 10, ...
 (ג) -2, -1, 0, 1, 2, ... (ד) -1, -2, -3, -4, -5, ...
12. רשמו את הנוסחה לאיבר לפי מקומו בסדרה שבה נתונים חמשת איבריה הראשונים:
 (א) 1, 3, 5, 7, 9, ... (ב) 3, 6, 9, 12, 15, ...
 (ג) 4, 6, 8, 10, 12, ... (ד) 4, 8, 12, 16, 20, ...
13. רשמו את הנוסחה לאיבר לפי מקומו בסדרה שבה נתונים חמשת איבריה הראשונים:
 (א) 1, 4, 9, 16, 25, ... (ב) 4, 9, 16, 25, 36, ...
 (ג) 2, 5, 10, 17, 26, ... (ד) 1, 8, 27, 64, 125, ...
14. על פי הנוסחה לאיבר ה-n, רשמו את חמשת האיברים הראשונים בסדרה:
 (א) $a_n = (-2)^n$ (ב) $b_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$
 (ג) $c_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n$ (ד) $d_n = (-2)^n + (-2)^{n-1}$

15. הסדרה מוגדרת על פי נוסחת האיבר לפי מקומו.

רשמו את שלושת האיברים הראשונים במקומות הזוגיים בסדרה :

$$x_n = (-1)^n + (-2)^{n+1} \quad \text{א)} \quad y_n = (-2)^{n+1} - (-2)^{n-1} \quad \text{ב)}$$

$$z_n = (-2)^n - (-2)^{n+1} \quad \text{ג)} \quad w_n = (-1)^{n+1} - (-2)^n \quad \text{ד)}$$

16. הסדרה מוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו.

רשמו את שלושת האיברים הראשונים במקומות אי זוגיים בסדרה :

$$a_n = (-1)^n + 2^n \quad \text{א)} \quad b_n = (-2)^n + 16 \quad \text{ב)}$$

$$x_n = (-2)^n + 4n \quad \text{ג)} \quad y_n = (-1)^n - 1 \quad \text{ד)}$$

רשמו כמה נוסחאות אפשריות לאיבר ה- n בסדרה שבה נתונים חמשת איבריה

הראשונים :

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots \quad \text{א)} \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots \quad \text{ב)}$$

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots \quad \text{א)} \quad \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \frac{1}{5 \cdot 6}, \dots \quad \text{ב)}$$

$$-\frac{2}{2}, \frac{4}{5}, -\frac{6}{8}, \frac{8}{11}, -\frac{10}{14}, \dots \quad \text{א)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4\sqrt{2}}, \dots \quad \text{ב)}$$

$$\frac{2}{5}, -\frac{4}{10}, \frac{8}{15}, -\frac{16}{20}, \frac{32}{25}, \dots \quad \text{א)} \quad -\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}}, \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3}}, -\frac{9}{\sqrt{3 \cdot 4}}, \frac{16}{\sqrt{4 \cdot 5}}, -\frac{25}{\sqrt{5 \cdot 6}}, \dots \quad \text{ב)}$$

19. מצאו את מקומו של איבר בסדרה המוגדרת בנוסחת האיבר ה- n $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$

שערכו הוא :

$$\frac{5}{14} \quad \text{א)} \quad \frac{14}{41} \quad \text{ב)} \quad \frac{6}{17} \quad \text{ג)} \quad \frac{8}{23} \quad \text{ד)}$$

20. סדרה מוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו : $a_n = (2n - 1)(3n + 2)$

האם המספר הזה הוא איבר בסדרה?

$$0 \quad \text{א)} \quad 24 \quad \text{ב)} \quad 153 \quad \text{ג)} \quad -2 \quad \text{ד)}$$

סדרה כללית

תשובות

1. א) $a_n = n^2$, $a_6 = 36$, $a_3 = 9$
 ב) $a_{n+1} = (n+1)^2$, $a_n = n^2$, $a_5 = 25$, $a_2 = 4$
 2. א) $a_3 = 10$, $a_2 = 7$, $a_1 = 4$; ב) $a_3 = 9$, $a_2 = 7$, $a_1 = 5$
 ג) $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$; ד) $a_3 = 10$, $a_2 = 60$, $a_1 = 90$
 ה) $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_2 = 0$, $a_1 = -\frac{1}{3}$; ו) $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$
 3. א) $a_{10} = 100$; ב) $a_{12} = 144$; ג) $a_{15} = 225$
 ד) לא ; ה) כן, $a_7 = 49$; ו) כן, $a_{13} = 169$
 4. א) כן, $a_3 = -3$; ב) כן, $a_4 = 2$; ג) לא ; ד) כן, $a_5 = 9$
 5. $a_4 = 20$, $a_3 = 15$, $a_2 = 10$, $a_1 = 5$
 $a_n = 5n$, $a_{21} = 105$, $a_9 = 45$, $a_6 = 30$
 6. א) $n = 11$; ב) $n = 9$
 7. $a_4 = 28$, $a_3 = 21$, $a_2 = 14$, $a_1 = 7$
 $a_n = 7n$, $a_{37} = 259$, $a_{10} = 70$, $a_8 = 56$
 8. $a_1 = 5$, $a_2 = 10$, $a_3 = 15$, $a_4 = 20$, $a_6 = 30$, $a_9 = 45$, $a_{21} = 105$, $a_n = 5n$
 9. $a_5 = 125$; $a_4 = 64$, $a_3 = 27$, $a_2 = 8$, $a_1 = 1$
 10. $c_5 = 32$; $c_4 = 16$, $c_3 = 8$, $c_2 = 4$, $c_1 = 2$
 11. א) $a_n = n$; ב) $a_n = n + 5$; ג) $a_n = n - 2$; ד) $a_n = -n$
 12. א) $a_n = 2n - 1$; ב) $a_n = 3n$; ג) $a_n = 2n + 2$; ד) $a_n = 4n$
 13. א) $a_n = n^2$; ב) $a_n = (n+1)^2$; ג) $a_n = n^2 + 1$; ד) $a_n = n^3$
 14. א) $a_5 = -32$; $a_4 = 16$, $a_3 = -8$, $a_2 = 4$, $a_1 = -2$
 ב) $b_5 = 162$; $b_4 = -54$, $b_3 = 18$, $b_2 = -6$, $b_1 = 2$
 ג) $c_2 = c_4 = -2$, $c_1 = c_3 = c_5 = 2$
 ד) $d_5 = -16$; $d_4 = 8$, $d_3 = -4$, $d_2 = 2$, $d_1 = -1$
 15. א) $x_6 = -127$, $x_4 = -31$, $x_2 = -7$; ב) $y_6 = -96$, $y_4 = -24$, $y_2 = -6$
 ג) $z_6 = 192$, $z_4 = 48$, $z_2 = 12$; ד) $w_6 = -65$, $w_4 = -17$, $w_2 = -5$
 16. א) $a_5 = 31$, $a_3 = 7$, $a_1 = 1$; ב) $b_5 = -16$, $b_3 = 8$, $b_1 = 14$

$$\cdot x_1 = x_3 = x_5 = -2 \quad (\text{ד} \quad ; \quad x_5 = -12, \quad x_3 = 4, \quad x_1 = 2 \quad \text{ג})$$

$$; a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{ב} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{2n-1} \quad \text{א}) \quad .17$$

$$\cdot a_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad (\text{ד} \quad ; \quad a_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{ג})$$

$$; a_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \quad (\text{ב} \quad ; \quad a_n = \frac{(-1)^n \cdot 2n}{3n-1} \quad \text{א}) \quad .18$$

$$\cdot a_n = \frac{(-1)^n \cdot n^2}{\sqrt{n^2+n}} \quad (\text{ד} \quad ; \quad a_n = \frac{-(-2)^n}{5n} \quad \text{ג})$$

$$\cdot n = 7 \quad (\text{ד} \quad ; \quad n = 5 \quad \text{ג} \quad n = 13 \quad (\text{ב} \quad ; \quad n = 4 \quad \text{א}) \quad .19$$

$$\cdot \text{א) לא ; ב) כן , } n = 2 \quad ; \quad \text{ג) כן , } n = 5 \quad ; \quad \text{ד) לא} \quad .20$$

2. כלל נסיגה

שיטת ההגדרה של סדרה באמצעות הנוסחה לאיבר לפי מקומו מאפשרת לחשב את כל איברי הסדרה ללא קושי מיוחד, אולם לעיתים רחוקות יודעים אנו את הנוסחה מראש. במקרים מסוימים, כאשר אי אפשר לחשב את האיבר a_n בעזרת מקומו בסדרה (n) , אפשר לחשב אותו, אם ידועים אחד או כמה איברים שלפניו. לדוגמה, לפני שנים רבות (ב-1590) חקר גלילאו גליליי את נפילת גופים. הוא מדד את מהירות האבן שנזרקה מגג המגדל (בעיר פיזה) ומדד את המהירויות ברגעי זמן שונים. מהירות הזריקה הייתה 5 מטר/שנייה, ובכל שנייה המהירות גדלה ב-10 מ"ש:

$$v_1 = 15 \quad (\text{מ"ש})$$

$$v_2 = 25 \quad (\text{מ"ש})$$

$$v_3 = 35 \quad (\text{מ"ש})$$

האם אפשר על פי הנתונים הנ"ל לחשב את v_n - מהירות האבן כעבור n שניות של נפילה (כלומר לדעת את נוסחת האיבר ה- n בסדרה 15, 25, 35, ...)?
גלילאו תיאר את הסדרה באופן הבא:

$$v_{n+1} = v_n + 10$$

נוסחה זו מאפשרת לחשב את המהירות בכל שנייה, אם ידוע ערכה בשנייה הקודמת.

סדרה כללית

במקרים אחרים אפשר לחשב איברי הסדרה, רק אם ידועים ערכי שניים או יותר איברים הקודמים לאיבר המבוקש.

על פי שיטה זו, אנו חוזרים אחורה ובודקים מהם האיברים הקודמים. שיטה זו של הגדרת הסדרה נקראת **כלל נסיגה** (או **רקורסיה** – מהמילה הלטינית *recurrere* - לחזור).

הגדרת איברי הסדרה במקרים אלה נעשית באמצעות הנוסחה המבטאת את האיבר ה- n בעזרת קודמיו וכמה איברים ראשונים של הסדרה. בכלל נסיגה משתמשים ביישומים רבים, כאשר נוסחה לאיבר לפי מקום אינה ידועה.

דוגמה 11

נתונים: $a_1 = 3$, $a_n = a_{n-1} + 4$. מצאו את שלושת האיברים הבאים של הסדרה. נציב את נתוני הבעיה בכלל הנסיגה, ונחשב את האיברים העוקבים החל מ- a_2 :

$$a_1 = 3;$$

$$a_2 = a_1 + 4 = 3 + 4 = 7;$$

$$a_3 = a_2 + 4 = 7 + 4 = 11;$$

$$a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 = 15.$$

הסדרה היא, אם כן: 3, 7, 11, 15, ...

שימו לב: במקרה זה אפשר להגדיר את הסדרה שהתקבלה גם באמצעות נוסחת האיבר לפי מקומו: $a_n = 4n - 1$.

עבור $n = 1$ נקבל: $a_1 = 4 \cdot 1 - 1 = 3$, עבור $n = 2$: $a_2 = 4 \cdot 2 - 1 = 7$ וכך הלאה.

דוגמה 12

נתונים: $a_1 = 3$, $a_n = 2a_{n-1}$. כל איבר הוא מכפלת האיבר הקודם ב-2. מצאו שלושת האיברים הבאים של הסדרה.

נציב את נתוני הבעיה בכלל הנסיגה, ונחשב את האיברים העוקבים החל מ- a_2 :

$$a_1 = 3;$$

$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 6 = 12;$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 12 = 24, \dots$$

סדרה כללית

3, 6, 12, 24, ...

הסדרה היא :

שימו לב: אפשר להגדיר את הסדרה שהתקבלה גם באמצעות נוסחת האיבר לפי מקומו: $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (בדקו זאת!).

חידה זוג ארנבים ממליט כל חודש זוג ארנבים חדש.

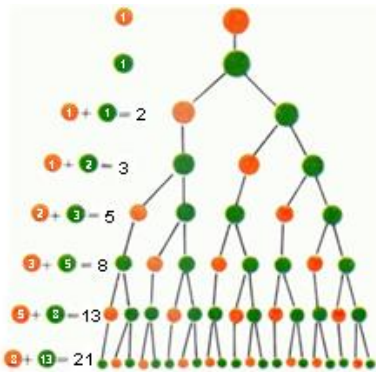
כל זוג ארנבים חדש מגיע ליכולת ההמלטה חודש לאחר היוולדותו.

אם מכניסים לכלוב סגור זוג של ארנבים, כמה זוגות של ארנבים יהיו בסוף השנה?

הדרכה רשמו את מספר זוגות הארנבים בכמה חודשים עוקבים ונסו לגלות את החוקיות.

פתרון נסמן את זוג הארנבים החדש בכתום, ואת הזוג שהגיע ליכולת ההמלטה

בירוק, ואת כמות הזוגות שיוולדו בחודש n ב- F_n .



$F_1 = 1$: מהאיור רואים כי :

$$F_2 = 1$$

$$F_3 = 2$$

$$F_4 = 5$$

$$F_5 = 8$$

$$F_6 = 13$$

$$F_7 = 21$$

האם תוכלו לומר כמה זוגות ארנבים ייוולדו בחודש שמיני?

מהתבוננות בסדרת המספרים שקיבלנו אפשר להסיק, כי

כל איבר בסדרה שווה לסכום שני איברים קודמים.

בדרך זו אפשר לחשב את מספר הזוגות שיוולדו בחודש 12 (144),

לחבר את מספרי הזוגות שנולדו בכל חודש, לחבר ולקבל את **התשובה** : 376.

סדרה כללית

הגדרה סדרת מספרים המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

והאיברים הראשונים $F_2 = 1, F_1 = 1$ נקראת **סדרת פיבונאצ'י**, על שמו של מתמטיקאי איטלקי מהמאה ה-13. הוא הגיע לנוסחה זו במהלך פתרון חידת הארנבים. נבדוק אם כלל הנסיגה הנ"ל מתאר את הסדרת המספרים שקיבלנו. נציב את נתוני הבעיה בכלל הנסיגה:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1; \\ F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2; \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3; \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5; \\ F_6 &= F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8, \dots \end{aligned}$$

הסדרה שקיבלנו: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 \dots$ היא סדרת פיבונאצ'י. גם לסדרה זו יש נוסחת האיבר לפי מקומו:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

קשה לפתח אותה, וקשה להשתמש בה.

נבדוק לדוגמה, אם נוסחה זו מאפשרת לחשב את האיברים הראשונים של סדרת פיבונאצ'י F_1 ו- F_2 :

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1 \\ F_2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 \end{aligned}$$

אפשר גם לחשב את F_3 . עשו זאת בעצמכם!

אולם, קשה יותר לחשב בעזרת הנוסחה הנ"ל את האיבר השישי:

$$F_6 = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^6 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^6 \right) \quad ??????$$

סדרה כללית

לעומת זאת, נוכחנו שקל לחשב את F_6 באמצעות כלל נסיגה:

$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$$

אולם כלל הנסיגה בלבד אינו מאפשר לחשב את איברי הסדרה.

חייבים לדעת גם את ערכי אחד או כמה איברים קודמים.

לדוגמה, נתון כלל הנסיגה: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. מצאו את a_3 .

$$a_3 = 2a_2 + a_1 \quad \text{נציב } n = 3$$

אילו ידענו את a_2 ו- a_1 , אפשר היה לחשב את כל האיברים הבאים.

שאם לא כן, אי אפשר לחשב אף איבר.

המסקנה: כדי למצוא את איברי הסדרה יש לדעת מלבד כלל הנסיגה גם את האיברים הראשונים a_1 ו- a_2 .

איברים אלה נקראים **איברים התחלתיים** של הסדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה.

בסדרת פיבונאצ'י, האיברים ההתחלתיים הם $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

אם נשנה את ערכם של איברים התחלתיים, גם הסדרה תשתנה.

דוגמה 13 מצאו את ששת האיברים הראשונים של הסדרה שבה כל איבר החל

מהשלישי שווה לסכום שני איברים קודמים, כלומר: $L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$ (כמו בסדרת

פיבונאצ'י), ושני איבריה הראשונים הם $L_1 = 1$, $L_2 = 3$.

נציב בכלל הנסיגה את ערכי האיברים הראשונים ונקבל:

$$L_3 = L_1 + L_2 = 1 + 3 = 4,$$

$$L_4 = L_2 + L_3 = 3 + 4 = 7,$$

$$L_5 = L_3 + L_4 = 4 + 7 = 11,$$

$$L_6 = L_4 + L_5 = 7 + 11 = 18.$$

הסדרה $1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$ מוגדרת באמצעות כלל נסיגה הזהה לכלל הנסיגה של

סדרת פיבונאצ'י, אולם ערכי שני האיברים הראשונים שונים.

סדרה זו נקראת **סדרת לוקה**, על שמו של מתמטיקאי צרפתי מהמאה 19 פרנסואה לוקה.

אף שכלל הנסיגה של סדרה זו זהה לכלל הנסיגה של סדרת פיבונאצ'י, סדרה זו מתארת

תופעות אחרות, ואיבריה שונים מאיברי סדרת פיבונאצ'י.

סדרה כללית

מספר האיברים ההתחלתיים של סדרה המוגדרת באמצעות כלל נסיגה תלוי בצורת כלל הנסיגה.

אם a_n מוגדרת באמצעות $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_{n-k}$, אזי יש להגדיר k איברים התחלתיים.

לדוגמה, אם סדרה מוגדרת באמצעות כלל נסיגה $a_n = a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1}^2$

אזי צריך לדעת מהם שלושת האיברים התחלתיים: a_1, a_2 ו- a_3 .

נניח ש- $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 4$.

נציב בכלל הנסיגה את $n = 4$ ונמצא:

$$a_4 = a_1 - a_2 + a_3^2 = 2 - 5 + 16 = 13$$

באותו אופן נמצא את a_5 ואת האיברים הבאים.

בשיטת הנסיגה משתמשים, בין היתר, בחישובים מקורבים, לדוגמה בחישוב של שורשים.

שימוש בשיטת הנסיגה בחישובים מקורבים

במאה 17 פיתח ניוטון שיטת חישוב מקורב של שורש ריבועי \sqrt{a} , כאשר a איננו ריבוע שלם. שיטה זו מאפשרת לחשב בדיוק הרצוי שורש ריבועי של כל מספר.

שיטה זו מוכרת כשיטת ניוטון-רפסון או ככלל ניוטון.

על פי השיטה, בוחרים ערך התחלתי x_1 (בדרך כלל, מספר שלם הקרוב ביותר לשורש ריבועי של a), ומחשבים את הקירוב הבא (קרוב יותר לערך המדויק של \sqrt{a}) על פי הכלל:

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right)$$

דוגמה 14 חשבו את $\sqrt{2}$ בדיוק של אלפית.

שלב 1 מוצאים את x_2 עבור $a = 2$:

$$a = 2 \implies x_1 = \sqrt{2} \approx 1, x_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

שלב 2 על פי שיטת הנסיגה מחשבים את הקירוב הבא לפי הנוסחה:

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{a}{x_2} \right)$$

סדרה כללית

מציבים את x_2 שקיבלנו בשלב הראשון:

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(1.5 + \frac{2}{1.5} \right) = 1.417$$

שלב 3 מציבים את x_3 שקיבלנו בשלב הקודם בכלל הנסיגה

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(1.417 + \frac{2}{1.417} \right) = 1.414 \quad \text{עבור } n = 3$$

שלב 4 מציבים את x_4 שקיבלנו בשלב הקודם בכלל הנסיגה:

$$x_5 = \frac{1}{2} \left(1.414 + \frac{2}{1.414} \right) = 1.414$$

רואים שהמשך התהליך אינו גורם לשינוי ספרת האלפיות, לכן אפשר לקבוע כי בדיוק

$$\sqrt{2} \approx 1.414 \quad \text{עד אלפית מתקיים:}$$

סיכום

א. ידיעת כלל הנסיגה והאיברים ההתחלתיים מאפשרת לחשב את כל איברי הסדרה.

ב. ידיעת הנוסחה לאיבר לפי מקום גם היא מאפשרת לחשב את כל איברי הסדרה.

ג. יש סדרות מספריות שלא ידועה עבורן נוסחה לפי מקום וידוע כלל נסיגה,

ויש סדרות שלא ידועים כלל נסיגה וגם לא נוסחה לפי מקום.

דוגמה: סדרת מספרים ראשוניים עוקבים. עבור סדרה זו איננו יודעים כלל לפיו

אפשר לחשב מספר ראשוני הבא בסדרת מספרים ראשוניים נתונה.

תרגילים

22. מצאו את ארבעת האיברים הראשונים של סדרה המוגדרת באמצעות האיבר הראשון

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad \text{א} \quad a_1 = 2 \text{ וכלל הנסיגה:}$$

$$\text{א) } a_{n+1} = 3a_n + 1 \quad \text{ב) } a_{n+1} = 5 - 2a_n$$

רשמו את ששת האיברים הראשונים של סדרה (b_n) המוגדרת באמצעות כלל נסיגה:

$$\text{א) } b_1 = 1, b_n = -b_{n-1} + 5 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\text{ב) } b_1 = -5, b_n = b_{n-1} + 10 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\text{ג) } b_1 = 1, b_n = 2 + b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

$$\text{ד) } b_1 = -3, b_n = -b_{n-1} - 2 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

סדרה כללית

$$b_1 = 1, b_n = n \cdot b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \text{א)}$$

.24

$$b_1 = -3, b_n = -b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \text{ב)}$$

$$b_1 = -512, b_n = 0.5 \cdot b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \text{ג)}$$

$$b_1 = 1, b_n = b_{n-1} : 0.1 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \text{ד)}$$

.25 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} \quad \text{והאיבר הראשון: } a_1 = 256.$$

.26 רשמו את ששת האיברים הראשונים של סדרה (a_n) שבה נתון: $a_1 = -3, a_2 = -2$ וכל

איבר, החל מהשלישי, שווה לסכום הכפול של שני איברים קודמים.

רשמו את כלל הנסיגה עבור סדרה זו.

רשמו את כלל הנסיגה ואת האיברים ההתחלתיים של הסדרה:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots \quad \text{ב)} \quad 2, 2, 2, 2, 2, \dots \quad \text{א)}$$

.27

$$5, -5, 5, -5, 5, \dots \quad \text{ד)} \quad 9, 7, 5, 3, 1, \dots \quad \text{ג)}$$

$$1, 8, 15, 22, 29, \dots \quad \text{ב)} \quad 2, 6, 18, 54, 162, \dots \quad \text{א)}$$

.28

$$3, -9, 27, -81, 243, \dots \quad \text{ד)} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots \quad \text{ג)}$$

.29 הסדרות שלהלן מוגדרות באמצעות כלל נסיגה.

רשמו את הביטוי האלגברי לאיבר ה- n בכל סדרה:

$$b_1 = 3, b_n = b_{n-1} + 5 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \text{א)}$$

$$b_1 = 2, b_n = 3 \cdot b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \text{ב)}$$

$$b_1 = 11, b_n = b_{n-1} - 4 \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \text{ג)}$$

$$b_1 = 3, b_n = \frac{b_{n-1}}{2} \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \quad \text{ד)}$$

.30 חשבו על פי השיטה לחישוב שורש ריבועי את ערכי השורשים בדיוק של 0.01:

$$\sqrt{89} \quad \text{ד)} \quad \sqrt{26} \quad \text{ג)} \quad \sqrt{10} \quad \text{ב)} \quad \sqrt{3} \quad \text{א)}$$

את התוצאה השווה עם ערך השורש המחושב באמצעות המחשבון.

.31 הסדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ והאיברים $a_1 = 2, a_2 = 3$.

מצאו את האיבר החמישי בסדרה.

סדרה כללית

32 הסדרה מוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו. רשמו את האיברים שמספרם בסדרה הוא $(n+1)$, $(n-1)$ ו- $(n+5)$:
 (א) $a_n = -5n + 4$ (ב) $a_n = 2(n-10)$ (ג) $a_n = 2^{3n+1}$ (ד) $a_n = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

33 כל אחד מהמספרים בסדרה שווה לסכום שני קודמיו. ידוע שהמספר התשיעי והעשירי הוא 1. מצאו את המספר הראשון ואת השני.

34 האם הנוסחה $a_n = n^3 + 3n + 1$ מגדירה סדרה של מספרים ראשוניים?

35 מצאו נוסחה לאיבר ה- n של הסדרה המוגדרת באמצעות כמה איברים ראשוניים:

(א) $1, 4, 9, 16, 25, \dots$ (ב) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$

(ג) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots$ (ד) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$

(ה) $1, 7, 31, 127, 511, \dots$ (ו) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \frac{7}{20}, \frac{8}{23}, \dots$

הערה לשאלה יש כמה תשובות, ציינו אחת בלבד.

36 הוכיחו שהסדרה (a_n) המוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו $a_n = 3^n + 5 \cdot 2^n$ מקיימת

את כלל הנסיגה $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ואת תנאי ההתחלה $a_1 = 13, a_2 = 29$.

37 בסדרה נתון: $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}$

הביעו את a_n ו- b_n באמצעות a_1, b_1 ו- n .

תשובות

22 (א) $a_1 = 2, a_2 = 7, a_3 = 22, a_4 = 67$;

(ב) $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3, a_4 = -1$.

23 (א) $b_1 = b_3 = b_5 = 1, b_2 = b_4 = b_6 = 4$;

(ב) $b_1 = -5, b_2 = 5, b_3 = 15, b_4 = 25, b_5 = 35, b_6 = 45$;

(ג) $b_1 = 1, b_2 = 3, b_3 = 5, b_4 = 7, b_5 = 9, b_6 = 11$;

(ד) $b_1 = b_3 = b_5 = -3, b_2 = b_4 = b_6 = 1$.

24 (א) $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 6, b_4 = 24, b_5 = 120, b_6 = 720$;

(ב) $b_1 = b_3 = b_5 = -3, b_2 = b_4 = b_6 = 3$;

(ג) $b_1 = -512, b_2 = -256, b_3 = -128, b_4 = -64, b_5 = -32, b_6 = -16$;

(ד) $b_1 = 1, b_2 = 10, b_3 = 100, b_4 = 1000, b_5 = 10000, b_6 = 100000$

סדרה כללית

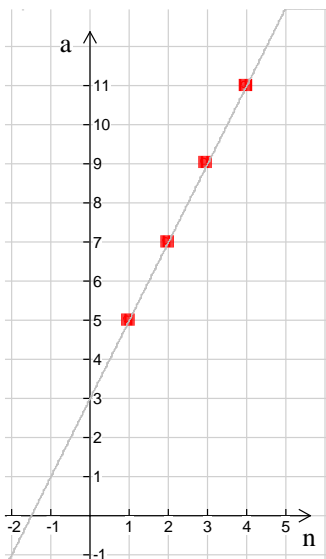
- .25 $a_4 = 2, a_3 = 4, a_2 = 16, a_1 = 256$ (א)
- .26 $a_6 = -196, a_5 = -72, a_4 = -26, a_3 = -10, a_2 = -3, a_1 = -2$
- $a_{n+2} = 2(a_{n+1} + a_n), n = 1, 2, 3, \dots$
- .27 ; $a_{n+1} = a_n, n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = 2$ (א)
- ; $a_{n+1} = a_n + 2, n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = 2$ (ב)
- ; $a_{n+1} = a_n - 2, n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = 9$ (ג)
- . $a_{n+1} = -a_n, n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = 5$ (ד)
- .28 ; $a_{n+1} = 3a_n, n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = 2$ (א)
- ; $a_{n+1} = a_n + 7, n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = 1$ (ב)
- ; $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n, n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = \frac{1}{2}$ (ג)
- . $a_{n+1} = -3a_n, n = 1, 2, 3, \dots; a_1 = 3$ (ד)
- .29 $b_n = \frac{3}{2^{n-1}}$ (ד) ; $b_n = 15 - 4n$ (ג) ; $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ (ב) ; $b_n = 5n - 2$ (א)
- .30 ; $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1.75, a_4 = a_5 = 1.73$ (א)
- ; $a_1 = 1, a_2 = 5.5, a_3 = 3.66, a_4 = 3.20, a_5 = a_6 = 3.16$ (ב)
- ; $a_1 = 1, a_2 = 13.5, a_3 = 7.71, a_4 = 5.54, a_5 = 5.12, a_6 = a_7 = 5.10$ (ג)
- . $a_1 = 10, a_2 = 9.45, a_3 = a_4 = 9.43$ (ד)
- .31 ; $a_{n+1} = -5n - 1, a_{n-1} = -5n + 9, a_{n+5} = -5n - 21$ (א) .32 $a_5 = -7$
- ; $a_{n+1} = 2(n-9), a_{n-1} = 2(n-11), a_{n+5} = 2(n-5)$ (ב)
- ; $a_{n+1} = 2^{3n+4}, a_{n-1} = 2^{3n-2}, a_{n+5} = 2^{3n+16}$ (ג)
- $a_{n+1} = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}, a_{n-1} = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, a_{n+5} = 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+7}$ (ד)
- .33 $a_4 = 77$ או $a_2 = 15$: למשל : לא. 34 $a_1 = 13, a_2 = -8$
- .35 ; $a_n = -(-1)^n$ (ד) ; $a_n = 2^n$ (ג) ; $a_n = 2n - 1$ (ב) ; $a_n = n^2$ (א)
- . $a_n = \frac{n}{3n-1}$ (ו) ; $a_n = 2^{2n-1} - 1$ (ה)
- .37 $b_n = \frac{\frac{4^{n-1}-1}{3} \cdot a_1 + \frac{2 \cdot 4^{n-1} + 1}{3} \cdot b_1}{4^{n-1}}, a_n = \frac{\frac{2 \cdot 4^{n-2} + 1}{3} \cdot a_1 + \frac{4^{n-1} - 1}{3} \cdot b_1}{2^{2n-3}}$

3. סדרה מספרית כפונקציה. התיאור הגרפי של סדרה

סדרה מספרית מוגדרת, אם קיים כלל המתאים לכל n את ערך אחד ויחיד של האיבר n -י בסדרה. כלל זה יכול להיות בצורה של טבלה, הגדרה מילולית, נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה, או בצורת כלל נסיגה.

בכל מקרה, הגדרת סדרה היא בעצם הגדרת פונקציה של משתנה n מתחום המספרים הטבעיים, כלומר לכל מספר טבעי n (הקובע את מקומו של איבר בסדרה) יתאים האיבר a_n .

הגדרה: סדרה מספרית היא פונקציה f המוגדרת **בתחום המספרים הטבעיים**, כאשר ערכי הפונקציה יכולים להיות גם מספרים רציונליים ואי-רציונליים, כלומר, **טווח הפונקציה הוא כל מספרים ממשיים**.



כאשר משתנה בלתי תלוי x הוא מתחום של מספרים רציונליים), כל נקודה על ציר המספרים מייצגת x מסוינ במקרה זה הפונקציה היא של משתנה רציף.

כאשר ערכי x הם מספרים טבעיים, המיוצגים על ידי המספרים, אומרים שהפונקציה היא של משתנה בדיד.

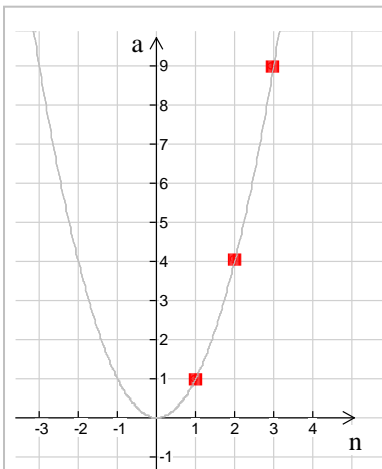
עבור סדרה מספרית מקובל לרשום a_n במקומו של $f(n)$ ו בסעיפים הקודמים ראינו דוגמאות רבות של סדרות (a_n) לאיבר לפי מקום או לפי כלל נסיגה.

לפונקציה יש עוד ייצוג חשוב: הייצוג הגרפי, שבו ערכי מוצגים כנקודות במערכת צירים ישרה (x, y) .

אולם, להבדיל מהפונקציות שלמדתם קודם, ערכי המשתנה הבלתי תלוי (n) הם מספרים טבעיים בלבד, לכן אוסף הנקודות (a_n, n) איננו קו רציף, אלה נקודות בודדות במערכת צירים (a, n) .

כדי לשרטט גרף של סדרה, אפשר לסמן כמה מאיבריה במערכת הצירים, או לבנות תחילה את גרף הפונקציה (a, x) , ולבחור עליו נקודות בודדות עובר $n = 1, 2, 3, \dots$

סדרה כללית



דוגמה 1 סדרה מספרית מוגדרת באמצעות נוסחת

$$x_n = 2n + 3 \quad \text{האיבר ה- } n\text{-י:}$$

שרטטו את גרף הסדרה.

פתרון נשרטט את גרף הפונקציה $f(x) = 2x + 3$

ונסמן עליו את הנקודות בעלות שיעור x טבעי:

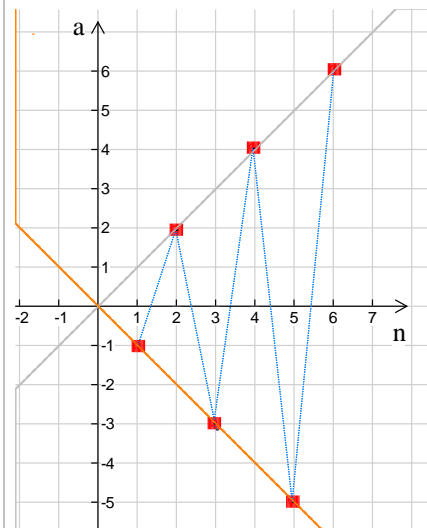
דוגמה 2 סדרת מספרים מוגדרת באמצעות נוסחת

$$a_n = n^2 \quad \text{האיבר ה- } n\text{-י:}$$

שרטטו את גרף הסדרה.

פתרון נשרטט את גרף הפונקציה $f(x) = x^2$

ונסמן עליו את הנקודות בעלות שיעור x טבעי:



דוגמה 3 בסדרה מספרית נתונה נוסחת האיבר לפי

$$a_n = n(n - 2) \quad \text{מקום:}$$

שרטטו את גרף הסדרה.

פתרון נשרטט את גרף הפונקציה

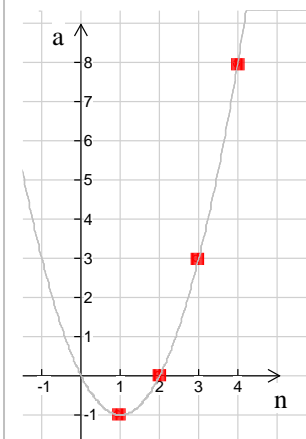
$$f(x) = x(x - 2) = x^2 - 2x$$

ונסמן עליו את הנקודות בעלות שיעור x טבעי:

דוגמה 4 סדרת מספרים מוגדרת באמצעות נוסחת

$$a_n = (-1)^n n \quad \text{האיבר ה- } n\text{-י:}$$

שרטטו את גרף הסדרה.



פתרון עבור n זוגיים נקבל: $a_n = n$,

עבור n אי זוגיים נקבל: $a_n = -n$.

נשרטט גרפים שך שתי הפונקציות:

$$f_1(x) = n, \quad f_2(x) = -x$$

ונסמן נקודות מתאימות על כל גרף:

הערה חיבור הנקודות הוא לצורך המחשה בלבד:

לנקודות על הקווים המרוסקים אין משמעות.

סדרה כללית

אפשר לתאר באופן גרפי גם את הסדרות שנוסחת האיבר לפי מקום אינה ידועה, אלא ידועים כמה איבריה של הסדרה, כפי שנראה בסעיף הבא.

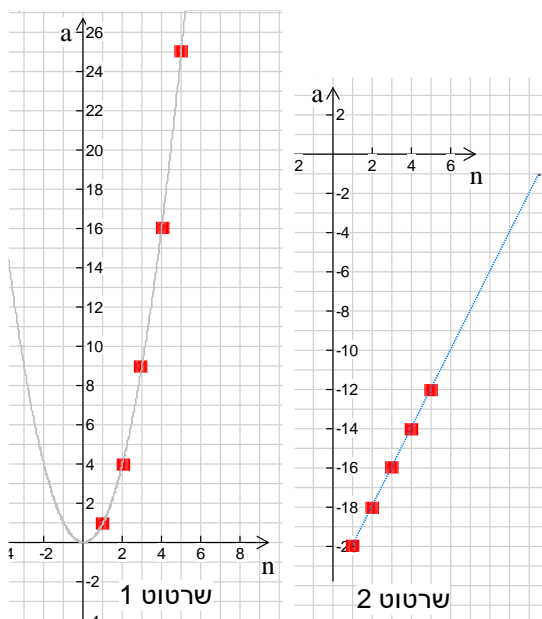
הגדרת הסדרה באמצעות טבלה

במקרים רבים איברי הסדרה מתקבלים ממדידות, כאשר חוקיות הקשר בין האיברים כמו נוסחת האיבר הכללי או כלל נסיגה אינם ידועים, לדוגמה: ערך יומי מקסימלי של מניה מסוימת M_n בבורסה במהלך השנה ($n = 1, 2, \dots, 365$); כמות חיידקים במבחנה Q_n הנמדדת פעם בשעה במשך חודש ($n = 1, 2, \dots, 31$), צריכת חשמל חודשית בבית במשך שנה E_n ($n = 1, 2, \dots, 12$), וכדומה.

נתונים אלה מהווים סדרה המוגדרת על-ידי מספר המדידה n וערך מספרי.

העסקת מסקנות וחיזוי עתידי דורשים הצגת הנתונים בצורה ברורה ונוחה לעיבוד מתמטי, כמו נוסחה לאיבר כללי, כלל נסיגה או גרף. צורת ההצגה הנוחה ביותר במקרים אלה היא ייצוג נתונים בטבלה.

4. סדרה עולה וסדרה יורדת



ראינו בדוגמאות הקודמות שישנן סדרות שאיבריהן הולכים וגדלים על פי מקומם בסדרה, לדוגמה:

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

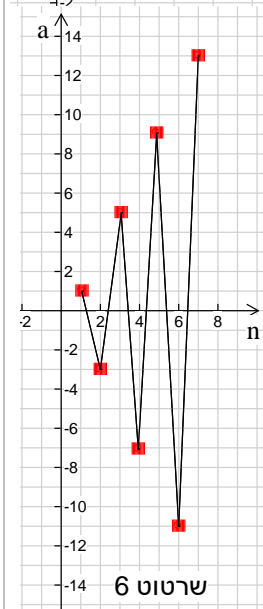
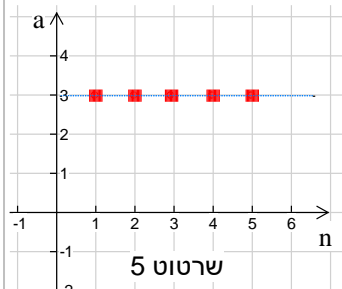
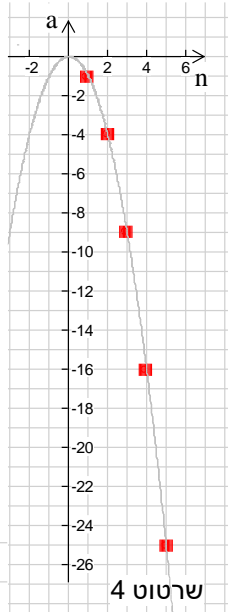
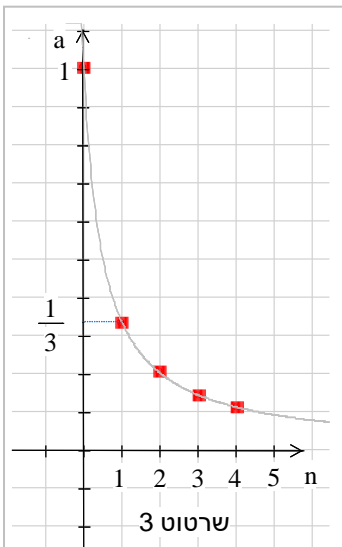
(שרטוט 1)

או

$$20, -18, -16, -14, -12, \dots$$

(שרטוט 2)

סדרה כללית



או קטנים:

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$$

(שרטוט 3)

או

$$-1, -4, -9, -16, -25, \dots$$

(שרטוט 4).

איברי הסדרה יכולים להיות זהים:

$$3, 3, 3, 3, 3, \dots$$

(שרטוט 5)

או יכולים לשנות את מגמתם מאיבר לאיבר,

כמו בסדרה:

$$1, -3, 5, -7, 9, -11, 13, \dots$$

(שרטוט 6)

לסדרה (a_n) קוראים סדרה עולה כאשר איבריה הולכים וגדלים (עבור כל מספר טבעי n מתקיים אי שוויון $a_{n+1} > a_n$), ואילו לסדרה (a_n) שאיבריה הולכים וקטנים (עבור כל מספר טבעי n מתקיים אי שוויון $a_{n+1} < a_n$). קוראים סדרה יורדת.

סדרה כללית

דוגמה 6

א) הסדרה $1, 8, 27, 125, \dots, n^3, \dots$ עולה, כיוון שלכל n טבעי מתקיים
אי שוויון $(n+1)^3 > n^3$, כלומר $a_{n+1} > a_n$.

ב) הסדרה $\dots, \frac{1}{n^2}, \dots, \frac{1}{16}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1}$ יורדת, כיוון שלכל n טבעי מתקיים

אי שוויון $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, כלומר $a_{n+1} < a_n$.

אם בין איברי הסדרה יש ערכים גדולים מהקודמים וגם ערכים קטנים מהקודמים, אזי הסדרה אינה עולה ואינה יורדת.

דוגמה 7: הסדרה $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$

כאשר נוסחת האיבר לפי מקום ידועה, אפשר לדעת אם הסדרה עולה או יורדת על ידי בדיקת ההפרש $a_{n+1} - a_n$.

דוגמה 7 האם הסדרה שהאיבר ה- n שלה הוא $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ היא עולה או יורדת?

נבדוק האם ההפרש $a_{n+1} - a_n$ חיובי או שלילי:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} = \\ &= \frac{2n^2+7n+6-2n^2-7n-3}{(n+2)(n+3)} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0 \end{aligned}$$

כיוון ש- $a_{n+1} - a_n > 0$, כלומר $a_{n+1} > a_n$ עבור כל $n = 1, 2, 3, \dots$ מסיקים כי הסדרה עולה.

דרך אחרת להעריך אם $a_{n+1} > a_n$ או $a_n < a_{n+1}$ היא להציג את הביטוי לאיבר ה- n באופן הבאה:

$$a_n = \frac{2n+1}{n+2} = \frac{2n+4-4+1}{n+2} = \frac{2(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$$

עבור האיבר הבא גודל השבר יהיה קטן יותר: $\frac{3}{(n+1)+2} < \frac{3}{n+2}$

לכן האיבר a_{n+1} יהיה גדול מקודמו: $a_{n+1} > a_n$.

כלומר הסדרה עולה.

סדרה כללית

לפעמים נוח יותר לבדוק את היחס בין שני איברים עוקבים $a_{n+1} : a_n$ אם איברי הסדרה חיוביים והיחס גדול מ-1, הסדרה עולה. אם היחס קטן מ-1, הסדרה יורדת.

דוגמה 8 האם הסדרה (a_n) שהאיבר ה- n שלה הוא $a_n = \frac{n^2}{5^n}$ עולה או יורדת? נבדוק את המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} : \frac{n^2}{5^n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n^2} = \frac{(n+1)^2}{5n^2} = \frac{1}{5} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \leq \frac{4}{5}$$

אי שוויון $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ מתקיים לכל $n = 1, 2, 3, \dots$ כיוון ש- $a_n > 0$ עבור כל n , מסיקים, כי $a_{n+1} < a_n$ לכל $n = 1, 2, 3, \dots$ לכן הסדרה יורדת.

במקרים מסוימים קל יותר לגלות אם הסדרה עולה או יורדת, כאשר ידוע כלל הנסיגה של הסדרה.

דוגמה 9 הסדרה מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n + 2$. האם הסדרה עולה או יורדת?

פתרון נבדוק את ההפרש בין האיברים העוקבים: $a_{n+1} - a_n = 2 > 0$ כלומר הסדרה עולה.

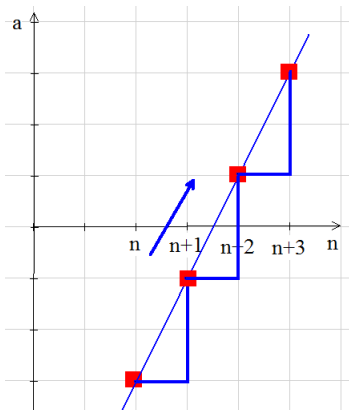
הערות

א. הגדרה מילולית של הסדרה הני"ל:

הסדרה שבה כל איבר גדול מקודמו ב-2.

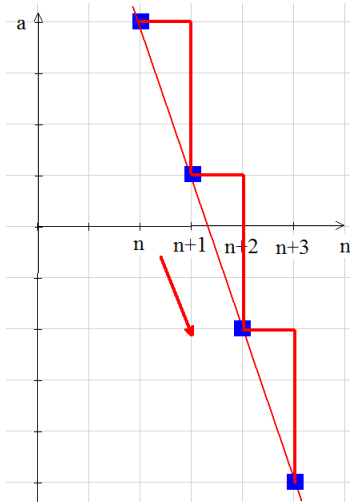
ב. כלל נסיגה והגדרה מילולית של סידרה אינן מאפשרות לחשב את איברי הסדרה כל עוד לא ידוע ערך האיבר ההתחלתי.

ג. התיאור הגרפי של הסדרה מאפשר לראות שהסדרה עולה, גם אם ערכי האיברים אינם ידועים:



סדרה כללית

דוגמה 10 הסדרה מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $a_{n+1} = a_n - 3$.



האם הסדרה עולה או יורדת?

פתרון נבדוק את ההפרש בין האיברים העוקבים:

$$a_{n+1} - a_n = -3 < 0$$

כלומר הסדרה יורדת.

הערות

א. הגדרה מילולית של הסדרה הנ"ל:

הסדרה שבה כל איבר קטן מקודמו ב-3.

ב. התיאור הגרפי של הסדרה מאפשר לראות

שהסדרה יורדת:

דוגמה 11 הסדרה מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 2a_n$.

האם הסדרה עולה או יורדת?

פתרון נבדוק את היחס בין האיברים העוקבים: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 > 1$

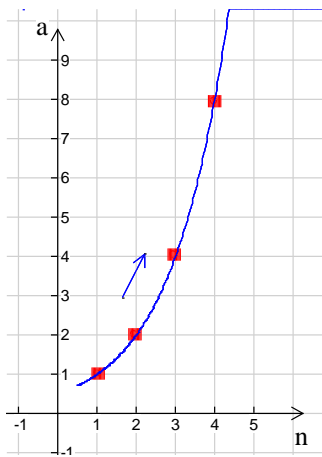
כלומר הסדרה עולה.

הערות

א. הגדרה מילולית של הסדרה:

הסדרה שבה כל איבר גדול מקודמו פי 2.

ב. נשרטט גרף הסדרה שעבורה $a_1 = 1$:



5. סדרה מחזורית

ערכי הסדרה (a_n) יכולים לחזור על עצמם לאחר מקום $n = N$ מסוים:

$$a_{N+1} = a_1, a_{N+2} = a_2, \dots$$

לדוגמה, איברי הסדרה 1,2,3,4,1,2,3,4 חוזרים על עצמם החל מ- $n = 5$ ($N=4$):

סדרה כללית

$$a_5 = a_1, a_6 = a_2, a_7 = a_3, a_8 = a_4$$

סדרה מסוג זה מכונה **מחזורית**, והמספר N מכונה **מחזור** הסדרה.

סדרה יכולה לכלול כמה מחזורים, לדוגמה, הסדרה (b_n) :

$$6, 4, 1, 6, 4, 1, 6, 4, 1, 6, 4, 1$$

כוללת 4 מחזורים, והסדרה (c_n) המוגדרת ע"י כלל נסיגה:

$$c_1 = 2, c_2 = 3, c_{n+2} = \frac{c_{n+1}}{c_n}$$

כוללת אינסוף מחזורים (ומכונה בהתאם סדרה מחזורית אינסופית).

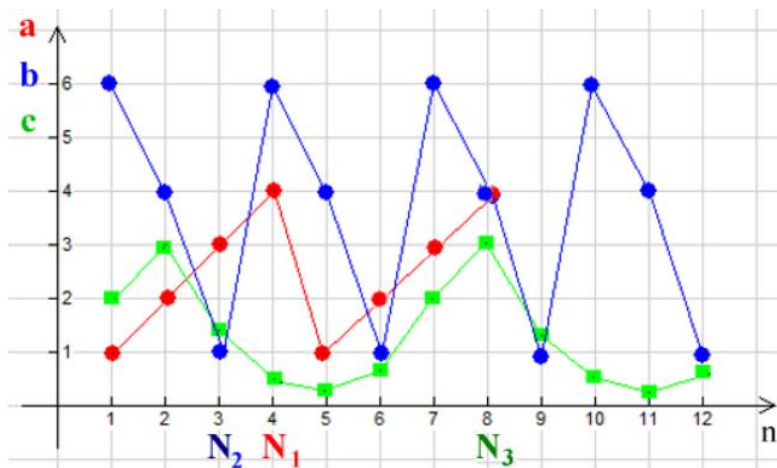
משימת חקר

חשבו 10 האיברים הראשונים של הסדרה (c_n) , ומצאו את מחזור הסדרה.

גרף של סדרה מחזורית

כיוון ששיעורי הנקודות המייצגות את איברי הסדרה שווים בהתאמה לכל הנקודות שהמרחק ביניהן בציר n שווה למחזור, אזי הגרף של פונקציה מחזורית יכול את אוספי הנקודות המייצגות את איברי הסדרה בתחום של מחזור, שחוזר על עצמו בכל תחום הגדרה של הסדרה.

לדוגמה, נשרטט גרפים של הסדרות (a_n) , (b_n) ו- (c_n) :



גרף של כל סדרה מכיל את הנקודות המייצגות את איברי הסדרות, ואת הישרים המחברים את הנקודות (לצורך המחשה). מהגרפים אפשר לראות את ערכי המחזור

סדרה כללית

של הסדרות: $N_1 = 4, N_2 = 3, N_3 = 8$, ואת כמות המחזוריים בתחום המוצג (שני מחזורים עבור הסדרה a_n , ארבעה מחזורים לסדרה b_n , ומחזור אחד וחצי לסדרה c_n).

הערה: התבוננות בגרף וזיהוי התבנית שחוזרת על עצמה מאפשרים לקבוע את מחזור הפונקציה גם במקרה כאשר נוסחה לאיבר ה- n -י או כלל נסיגה של הסדרה אינם ידועים, והגרף נבנה על-סמך הנתונים שהתקבלו בדרכים אחרות (מדידות, הערכות וכדומה).

כך, מהגרף אפשר לראות תרתי משמע, כי מחזורי הסדרות $(a_n), (b_n)$ ו- (c_n) הם בהתאמה – $N_1=4, N_2=3, N_3=8$.

6. השפעת פרמטרים על התנהגות הסדרה

בדוגמה 9 ראינו כי הסדרה המוגדרת לפי כלל נסיגה $a_{n+1} = a_n + 2$ היא סדרה עולה, ואילו הסדרה בדוגמה 10: $a_{n+1} = a_n - 3$, השונה מהקודמת בסימן האיבר החופשי, היא סדרה יורדת.

האם אפשר לדעת את התנהגות הסדרה ללא חישוב איבריה?

מסתבר, שבמקרה של ידיעת הנוסחה לאיבר ה- n -י זה אפשרי:

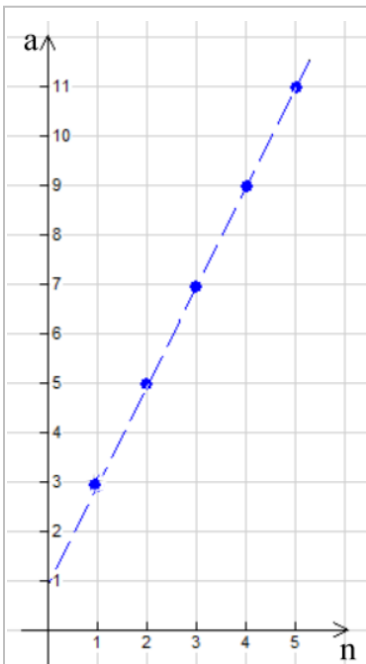
ניעזר בהגדרת סדרה מספרית כפונקציה של משתנה בדיד n המוגדרת בתחום מספרים טבעיים (ראו סעיף 3).

אם נרחיב את תחום ההגדרה לכל מספרים ממששים (כך שמספרים טבעיים n יהיו תת-קבוצה ממנו), נקבל **פונקציה $f(x)$** , שערכיה בנקודות $x_n = n$ יהיו שווים לערכי הסדרה באותן הנקודות: $f(x_n) = a_n$.

לכן, על-מנת לשרטט גרף של סדרה המוגדרת באמצעות הנוסחה לאיבר כללי: $a_n = F(n)$, יש להחליף את המשתנה n ב- x , לשרטט גרף הפונקציה $a = F(x)$, ולסמן על קו הגרף את הנקודות בעלות שיעור x טבעי (כפי שמוגדר עבור הסדרה הנתונה a_n).

דוגמה: שרטטו גרף הסדרה $a_n = 1 + 2n$.

סדרה כללית



דרך א: נמלא את טבלת הערכים עבור כמה איברים ראשונים של הסדרה:

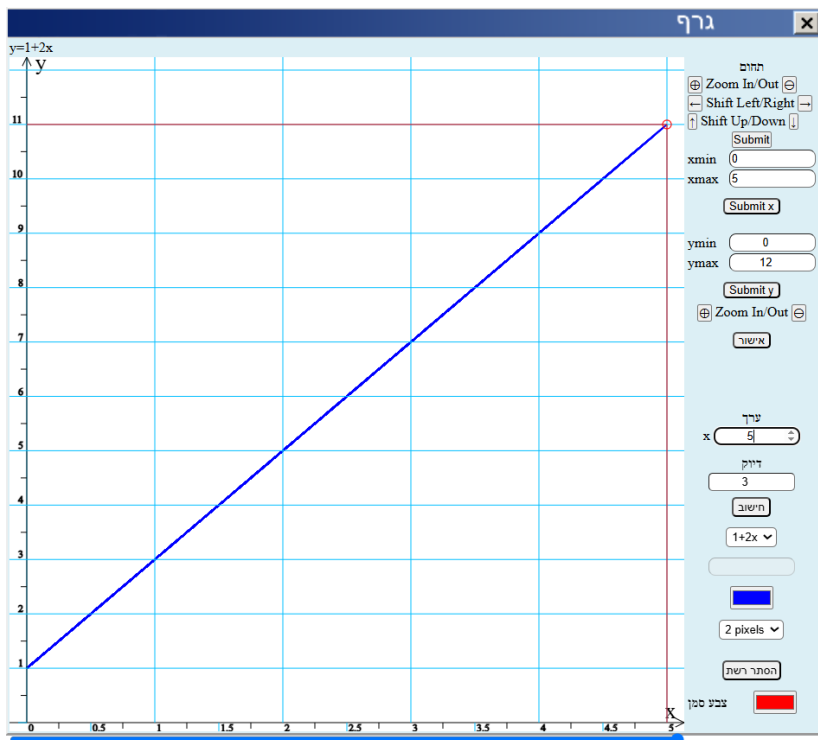
5	4	3	2	1	n
11	9	7	5	3	a_n

נסמן את הנקודות במערכת צירים, נחבר אותן לצורך המחשה, ונקבל גרף של הסדרה.

דרך ב: נרשום את נוסחת האיבר הכללי בצורת פונקציה: $y = 1 + 2x$, ונשתמש בתוכנה לבניית גרפים של

פונקציות. נציב בחלון שייפתח את תחומי המשתנים x

ו- y וקבל גרף הפונקציה:



סדרה כללית

היתרון של הגרף שמתקבל באמצעות התוכנה הוא בכך, שהוא אינטראקטיבי – מאפשר לחקור את הפונקציה: לראות את שינוי צורתה ואת ערכי המשתנים כאשר משנים את המקדמים במידה והם רשומים כפרמטרים.

לדוגמה: הסדרה מוגדרת על-ידי איבר כללי שכולל פרמטר a : $a_n = 1 + a \cdot n$. עבור אלו ערכי הפרמטר הסדרה עולה, ועבור אלו היא יורדת:

פתרון

נרשום את נוסחת הסדרה בצורה של פונקציה: $y = 1 + a \cdot x$.

ברור, כי הפונקציה היא קווית, ושיפוע הגרף שלה נקבע על-ידי המקדם a . ניזכר בתכונות העלייה והירידה של פונקציה קווית: הפונקציה עולה כאשר המקדם $a > 0$, ויורדת כאשר $a < 0$. נשרטט גרפים באמצעות התוכנה, ונוודא את התשובה:

תרגילים

21. בנו את גרף הסדרה:

(א) $y_n = 2 + 5n$ (ב) $y_n = \frac{3-n}{2}$ (ג) $y_n = n^2 - 4$ (ד) $y_n = \frac{3n}{2}$

38. הוכיחו שהסדרה עולה:

(א) $a_n = 3n + 4$ (ב) $b_n = 5n - 3$
 (ג) $y_n = 7n - 2$ (ד) $x_n = 4n - 1$

39. הוכיחו שהסדרה יורדת:

(א) $a_n = -2n - 3$ (ב) $b_n = -3n + 4$
 (ג) $y_n = -n + 8$ (ד) $x_n = 4 - 5n$

40. הוכיחו שהסדרה עולה:

(א) $a_n = \frac{n-1}{n}$ (ב) $b_n = 1 - \frac{1}{2n}$

(ג) $b_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ (ד) $d_n = \frac{5n}{n+1}$

41. הוכיחו כי הסדרה יורדת:

(א) $a_n = \frac{1}{2n}$ (ב) $b_n = 1 + \frac{1}{3n}$

(ג) $c_n = \frac{n+1}{n}$ (ד) $d_n = \frac{1}{3^n}$

סדרה כללית

42. האיבר ה-n של הסדרה הוא $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 4}$. הוכיחו כי הסדרה עולה.

43. האיבר ה-n של הסדרה הוא $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$. הוכיחו כי הסדרה יורדת.

44. בדקו אם הסדרה (a_n) עולה או יורדת:

א) $a_n = \frac{1}{n^3 + n}$ ב) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ג) $a_n = n^3 - n^2$

ד) $a_n = |3 - 2n|$ ה) $a_n = \frac{2n+1}{6n+2}$ ו) $a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{6n+2}$



שאלות
מפתח

תרגילים אינטראקטיביים



תרגיל 4.1 האיבר ה-n של הסדרה ניתן ע"י הביטוי:

$$a_n = 4n^2 - 47n$$

מצאו, עבור אלו n הסדרה עולה?

תרגיל 4.2 מצאו מספר טבעי n שעבורו מתקיים:

$$(-1)^n (6n - 81) = 3$$

תרגיל 4.3 נתונים ארבעה איברים ראשונים של סדרה:

$$9, \frac{13}{2}, \frac{17}{4}, \frac{21}{8}, \dots$$

מצאו את נוסחת האיבר ה-n של הסדרה.

תרגיל 4.4 נתונים חמישה איברים ראשונים של סדרה:

$$5, 7, 13, 23, 37, \dots$$

מצאו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.

תרגיל 4.5 נתונים חמישה איברים ראשונים של סדרה:

$$2, 4, 10, 28, 82, \dots$$

מצאו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.

סדרה כללית

תרגיל 4.6 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, החל מהאיבר השני בסדרה המקיימת את כלל הנסיגה הבא:
 $a_1 = 10, a_{n+1} = a_n + 6n^2 - 3$

תרגיל 4.7 רשמו כלל נסיגה לסדרה שהאיבר ה- n הוא $a_n = 7n^2 + 4n$.

תרגיל 4.8 הגדירו את הסדרה הבאה באמצעות כלל הנסיגה:
 $5, 6, 11, 20, 33, \dots$

תרגיל 4.9 מצאו את נוסחת האיבר ה- n עפ"י כלל הנסיגה:
 $a_1 = 8, a_{n+1} = a_n + 4n + 5$

תרגיל 4.10 הסדרה מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_1 = 5, a_{n+1} = 2 \cdot a_n + 8$. מצאו את שני האיברים הסמוכים בסדרה שסכומם הוא $s = 2480$.

שיעורי בית אינטראקטיביים (עם הערכה)

תרגיל 4.1 האיבר ה- n בסדרה ניתן ע"י הביטוי:

$$a_n = 5n^2 - 47n$$

מצאו, עבור אלו n הסדרה עולה?

תרגיל 4.2 מצאו מספר טבעי n שעבורו מתקיים:

$$(-1)^n (4n - 46) = 2$$

סדרה כללית

תרגיל 4.3 נתונים ארבעה איברים ראשונים של סדרה:

$$9, \frac{13}{2}, \frac{17}{4}, \frac{21}{8}, \dots$$

מצאו את נוסחת האיבר ה- n של הסדרה.

תרגיל 4.4 נתונים חמישה איברים ראשונים של סדרה:

$$5, 7, 13, 23, 37, \dots,$$

מצאו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.

תרגיל 4.5 נתונים חמישה איברים ראשונים של סדרה:

$$2, 4, 10, 28, 82, \dots,$$

מצאו את נוסחת האיבר הכללי של הסדרה.

תרגיל 4.6 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, החל מהאיבר השני

בסדרה המקיימת את כלל הנסיגה הבא:

$$a_1=10, a_{n+1}=a_n+6n^2-3$$

תרגיל 4.7 רשמו כלל נסיגה לסדרה שהאיבר ה- n

$$a_n=7n^2+4n$$

תרגיל 4.8 הגדירו את הסדרה הבאה באמצעות כלל הנסיגה:

$$5, 6, 11, 20, 33, \dots,$$

תרגיל 4.9 מצאו את נוסחת האיבר ה- n עפ"י כלל הנסיגה:

$$a_1=8, a_{n+1}=a_n+4n+5$$

תרגיל 4.10 הסדרה מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_1=5, a_{n+1}=2 \cdot a_n+8$

מצאו את שני האיברים הסמוכים בסדרה שסכומם הוא $s=2480$.

סדרה כללית

תשובות

$$; b_{n+1} - b_n = 5 > 0 \quad (\text{ב}) \quad ; a_{n+1} - a_n = 3 > 0 \quad (\text{א}) \quad .38$$

$$\cdot x_{n+1} - x_n = 4 > 0 \quad (\text{ד}) \quad ; y_{n+1} - y_n = 7 > 0 \quad (\text{ג})$$

$$; b_{n+1} - b_n = -3 < 0 \quad (\text{ב}) \quad ; a_{n+1} - a_n = -2 < 0 \quad (\text{א}) \quad .39$$

$$\cdot x_{n+1} - x_n = -5 < 0 \quad (\text{ד}) \quad ; y_{n+1} - y_n = -1 < 0 \quad (\text{ג})$$

$$; b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2n^2 + 2n} > 0 \quad (\text{ב}) \quad ; a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n^2 + n} > 0 \quad (\text{א}) \quad .40$$

$$\cdot d_{n+1} - d_n = \frac{5}{n^2 + 3n + 2} > 0 \quad (\text{ד}) \quad ; b_{n+1} - b_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0 \quad (\text{ג})$$

$$; b_{n+1} - b_n = -\frac{1}{3n^2 + 3n} < 0 \quad (\text{ב}) \quad ; a_{n+1} - a_n = -\frac{1}{2n^2 + 2n} < 0 \quad (\text{א}) \quad .41$$

$$\cdot d_{n+1} - d_n = -\frac{2}{3^{n+1}} < 0 \quad (\text{ד}) \quad ; c_{n+1} - c_n = -\frac{1}{n^2 + n} < 0 \quad (\text{ג})$$

$$a_n = 1 - \frac{4}{n^2 + 4} ; a_{n+1} - a_n = 1 - \frac{4}{(n+1)^2 + 4} - \left(1 - \frac{4}{n^2 + 4}\right) = \frac{4((n+1)^2 - n^2)}{(n^2 + 4)((n+1)^2 + 4)} > 0 \quad .42$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^2 + 1} - \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{n^2 - (n+1)^2}{(n^2 + 1)((n+1)^2 + 1)} < 0 \quad .43$$

$$; \text{יורדת, } a_{n+1} - a_n = \frac{1}{(n+1)^3 + n + 1} - \frac{1}{n^3 + n} = \frac{n^3 - (n+1)^3 - 1}{(n^3 + n)((n+1)^3 + n + 1)} < 0 \quad (\text{א}) \quad .44$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad (\text{ב})$$

$$, a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} < 0$$

; יורדת

$$; \text{עולה, } a_n = n^2(n-1) ; a_{n+1} - a_n = n(n+1)^2 - n^2(n-1) = n(3n+1) > 0 \quad (\text{ג})$$

$$; \text{לא עולה ולא יורדת, } a_1 = a_2 = 1 \quad (\text{ד})$$

$$; \text{יורדת, } a_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{6n+2}\right) ; a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6n+8} - \frac{1}{6n+2}\right) = \frac{-2}{(6n+8)(6n+2)} < 0 \quad (\text{ה})$$

$$; \text{לא עולה ולא יורדת, } a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = \dots = 0 \quad (\text{ו})$$

סדרה ככליית