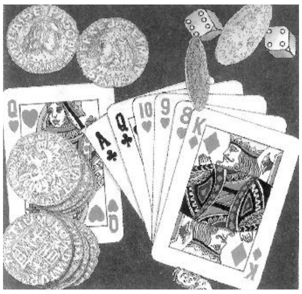
3.1 מושגים בסיסיים בהסתברות (חזרה)

הגדרות	דוגמאות
מְאוֹרָע מקרה, מעשה, התרחשות, אירוע שקרה, יכול לקרות או יכול שלא לקרות. גם תוצאות הניסויים, תצפיות ומדידות נחשבות למאורעות.	הופעת המספר 5 על הדופן העליונה של קוביית משחק ; הופעת סמל על פני המטבע המוטל ; לידת חמישה בנים ברצף במחלקת יולדות ; ליקוי חמה ; ירידה במניות הבורסה.
המאורע יכול להיות **ודאי**, **בלתי-אפשרי או אקראי**. **מאורע ודאי** – מאורע שייתרחש בוודאות בתנאים הקיימים. **מאורע בלתי אפשרי – מאורע שלא יכול להתרחש בתנאים הקיימים.** **מאורע אקראי** – מאורע שעשוי להתרחש ועשוי שלא להתרחש בתנאים הקיימים. **מאורעות בלתי תלויים** מאורעות שהתרחשות כל אחד מהם אינו מושפע מהתרחשותו או מאי התרחשותו של האחר.	א) לאחר יום חמישי יגיע יום שישי. ב) בהטלת קובייה יופיע מספר קטן מ- 7. א) בהטלת קובייה יופיע המספר 7. ב) בטמפרטורה של 25°C יקפאו המים בנחל. א) בהטלת קובייה יופיע המספר 2. ב) ביום שני התלמיד ילך לבית ספר. א) יירד גשם והמניות בבורסה יעלו. ג) בהטלת קובייה הופיע המספר 7, בהטלה הבאה - 2.

מאורעות	דוגמאות
מאורעות זרים מאורעות שלא יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת.	א) השחר עלה, ובשמים הופיעו כוכבים ; ב) בהטלת קובייה המספר 1 יופיע פעמיים סכום המספרים בשתי ההטלות יהיה 12.
מאורעות משלימים מאורע $\overline{A}$ מכונה **משלים** למאורע A, אם הוא יתרחש בוודאות כאשר מאורע A לא יתרחש.	א) זכייה ואי זכייה בהגרלה ; ב) ניצחון והפסד במשחק ; ג) הופעת מספר זוגי והופעת מספר אי זוגי בהטלת קובייה.
מאורע חד שלבי מאורע יחיד המבטא התרחשות או תוצאה בודדת.	א) הופעת המספר 2 בהטלה בודדת של קובייה ; ב) קָלָע אינו פוגע במטרה בניסְיון הירי הראשון.
מאורע דו שלבי מאורע שמורכב משני מאורעות חד-שלביים.	א) סכום המספרים המופיעים על שתי קוביות בשתי הטלות הוא 7. ב) שני קלעים פוגעים במטרה בניסְיון הירי הראשון.
מאורע רב שלבי מאורע שמורכב ממספר מאורעות חד-שלביים (עוקבים או מתרחשים בו-זמנית).	
מאורעות שווי סיכוי מאורעות שונים שסיכויי התרחשותם שווים. אפשר להסיק שוויון הסיכויים משיקולי סימטריה או היגיון. לדוגמה: כדורים צבעוניים ששולף קוסם באקראי מכובעו זהים במידות ובמשקל ועשויים מאותו חומר.	א) הופעות של מספרים שונים בהטלת קוביית- משחק ; ב) הופעת סמל או מספר על פני המטבע שנזרק.

אפשר להסיק אפוא שסיכויי הוצאת כדורים שונים שווים. שווים גם סיכויי עצירת הכדור ליד מספרים שונים במשחק רולטה, או הופעת אות מסוימת בסביבון, כיוון שצורתו של גלגל הרולטה ושל סביבן הם סימטריים.	**מאורעות שאינם שווי-סיכוי:** א) נפילת פרוסה מרוחה בחמאה על צד מסוים (מרכז הכובד של הפרוסה נמצא קרוב יותר לצד המרוח). ב) משיכת קוביית דומינו בעלת מספרים שווים (דַבֶּל) ומשיכת קובייה בעלת מספרים שונים (בסך הכל ישנן 7 קוביות דַבֶּל ו- 21 קוביות אחרות).
בחיי היום-יום המושג **מאורע** מציין אירוע משמעותי. במתמטיקה הוא מציין אפשרית של מצב נדון. המתמטיקאים הצרפתיים בְּלֶז פַּסְקָל ופייר פֶּרְמָה היו הראשונים שהשתמשו במושג זה בניתוח משחקי מזל כבר במאה ה– 17. חוקי המאורעות האקראיים שולטים, בין היתר, גם בתהליך יצירת מולקולות ה- DNA הנושאות את המידע הגנטי של האדם.	
הסתברות היא מדד הסיכוי להתרחשות מאורע מסוים. **הסתברות P** שווה ליחס שבין מספר הופעות המאורע הנדון A (**המאורע הרצוי**) למספר כל האפשרויות. ערכי ההסתברות נמצאים בתחום שבין 0 ל-1 : $0 \le P(A) \le 1$. מאורע בלתי אפשרי הוא בעל הסתברות 0, ומאורע ודאי הוא בעל הסתברות 1.	א) הסתברות ההופעה של המספר 2 בהטלת קובייה היא $P(A) = \frac{1}{6}$ (מספר כל התוצאות האפשריות הוא 6, ומספר ההופעות של המספר 2 הוא 1). ב) ההסתברות שאדם שלא רכש כרטיס לוטו יזכה בלוטו היא 0. ג) הסתברות ההופעה של מספר **או** סמל על פני מטבע שהוטל היא 1.

הסתברות של מאורע משלים	דוגמה
סכום ההסתברויות של מאורע ושל מאורע משלים הוא 1: $$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$ הסתברות מאורע משלים היא: $$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$	ההסתברות שקַלָּע יפגע במטרה נעה היא $P(A) = 0.8$, כאשר A מציין את אירוע הפגיעה. הסתברות ההחטאה היא: $$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = 0.2$$

דוגמה 1 מטילים קובייה פעם אחת.

בין כל המאורעות האפשריים נבחר ארבעה:

א) הופעת המספר 2;   ב) הופעת המספר 5;

ג) הופעת מספר הגדול מ- 2;   ד) הופעת מספר זוגי.

א. כמה מאורעות **דו שלביים** אפשר להרכיב מהמאורעות הנ"ל?

◄ כל מאורע דו שלבי מורכב משני מאורעות, ולכן מספרם של כל המאורעות הדו-שלביים שווה למספר כל זוגות המאורעות האפשריים:

1) א) + ב)   2) א) + ג)   3) א) + ד)

4) ב) + ג)   5) ב) + ד)   6) ג) + ד)

תשובה: 6.

ב. בין ארבעת המאורעות שנבחר, מצאו זוגות של **מאורעות זרים**.

◄ מאורעות **זרים** (מאורעות שאינם יכולים להתרחש יחדיו) הם:

א) + ב) (שני מספרים אינם יכולים להופיע בהטלה אחת)

א) + ג) (מספר גדול מ- 2 אינו יכול להופיע יחד עם המספר 2)

ב) + ד) (מספר 5 אינו מספר זוגי).

ג. בין ארבעת המאורעות שנבחרו, מצאו מאורעות **שווי סיכוי**.

◄ בהטלת הקובייה קיימות **שש תוצאות אפשריות** (הופעת מספר מסוימת).

מספר התוצאות המתאימות למאורע א) ולמאורע ב) הוא 1;

מספר התוצאות המתאימות למאורע ג) הוא 4 (הופעת הספרות 3, 4, 5 ו- 6);

מספר התוצאות המתאימות למאורע ד) הוא 3 (הופעות הספרות 2, 4, ו- 6).

<u>לכן המאורעות שווי-הסיכוי הם א) ו- ב).</u>

דוגמה 2 10 תלמידים עורכים הגרלה באמצעות משיכת פתק מתוך כובע המכיל 10 פתקים. על פתק הזכייה כתוב "זכית!", על האחרים: "בוז!".

א) מה ההסתברות שבמשיכה הראשונה נמשוך את הפתק "זכית!"?

ב) מה ההסתברות שבמשיכה הראשונה נמשוך את הפתק "בוז!"?

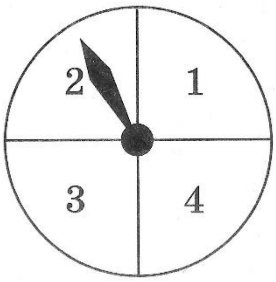
◄ א) המאורע הרצוי – משיכת הפתק "זכית!". סך כל המשיכות האפשריות הוא 10; מספר המאורעות הרצויים הוא 1 (משיכת הפתק "זכית!").

לכן הסתברות הזכייה היא: 1/10. ▷

ב) המאורע הרצוי – משיכת הפתק "בוז!" (ברור שאין הדבר *רצוי*, אבל אנו מעוניינים לדעת מה הסיכוי שהדבר עלול לקרות). כמו במקרה הקודם, מספר כל המשיכות האפשריות הוא 10; מספר המאורעות הרצויים הוא 9 (ישנם 9 פתקי "בוז!").

לכן הסתברות ההפסד היא: 9/10. ▷

דוגמה 3 גלגל הרולטה מחולק לארבעה חלקים שווים.
מה ההסתברות שהמחוג המסתובב יעצור בגזרה 2?



◄ כיוון ששטחי הגזרות של גלגל הרולטה שווים, קיימים סך הכול 4 מאורעות שווי סיכוי: המחוג יעצור

א) בגזרה 1 ב) בגזרה 2 ג) בגזרה 3 ד) בגזרה 4.

מתוכם מספר המאורעות הרצויים הוא אחד: המחוג יעצור בגזרה 2.

לכן על פי הגדרת ההסתברות מקבלים: $P(A) = \frac{1}{4}$.

☜ מלבד המאורעות **הבסיסיים** המוגדרים בדרך ישירה (כמו בדוגמאות הנ"ל: "הופיע המספר 6" או "המחוג נעצר בגזרה 2"), קיימים מאורעות מורכבים יותר שבהם נדרש לקבוע אם בכלל המאורע רצוי או לאו.

דוגמה "על פני הקובייה הופיע מספר אי זוגי" או "מחוג הרולטה לא נעצר בגזרה 2" וכד'. ננתח את מאורע A: " לאחר הטלה אחת הופיע מספר זוגי על פני הקובייה". מאורע זה מתקיים בשלושה מקרים (התוצאות הרצויות): בהופעת המספרים 2, 4 או 6.

הסתברות המאורע A היא, אם כן:

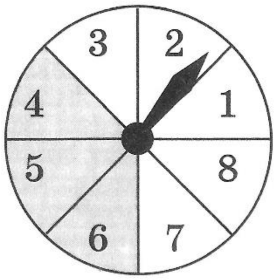
$$P(A) = \frac{\text{מספר התוצאות הרצויות}}{\text{מספר כל התוצאות האפשריות}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

דוגמה 4 מטילים קובייה פעם אחת. מה ההסתברות של הופעת מספר הגדול מ- 4 על הדופן העליונה?

◄ מתוך שש האפשרויות, המאורעות הרצויים הם שניים: הופעת 5 והופעת 6.

לכן: $$P(A) = \frac{\text{מספר התוצאות הרצויות}}{\text{מספר כל התוצאות האפשריות}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ ▷

דוגמה 5 גלגל הרולטה מחולק ל- 8 גזרות שוות.
מצאו את ההסתברות להימצאותו של המחוג בשטח הכהה של הגלגל לאחר עצירת הגלגל.



◄ קיימות שמונה תוצאות שוות סיכוי: המחוג יימצא בגזרה 1, בגזרה 2, ..., בגזרה 8. מספר המאורעות הרצויים הוא 3 (הגזרות 4, 5 או 6).

לכן ההסתברות היא: $$P(A) = \frac{\text{מספר התוצאות הרצויות}}{\text{מספר כל התוצאות האפשריות}} = \frac{3}{8}$$

☜ כאשר המאורע A ודאי (כלומר הוא יתרחש בהכרח), כל מאורע רצוי; מספר המאורעות הרצויים שווה למספר המאורעות האפשריים, וההסתברות $P(A) = 1$.

דוגמה 6 מטילים קובייה. מה ההסתברות להופעת מספר קטן מ- 7?

◄ מספר כל המאורעות האפשריים הוא 6; כל מספר שעשוי להופיע קטן מ- 7 (1, 2, ..., 6), כלומר מספר המאורות הרצויים הוא 6; לכן ההסתברות היא

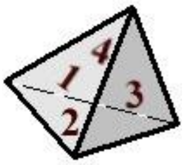
$$P(A) = \frac{6}{6} = 1$$

☜ כאשר המאורע A בלתי אפשרי, מספר המאורעות הרצויים הוא אפס (שהרי המאורע לא יתרחש לעולם), וההסתברות $P(A) = 0$.

דוגמה 7 מטילים קובייה. מה ההסתברות להופעת מספר גדול מ- 6?

◄ המאורע הרצוי בלתי אפשרי. לכן ההסתברות היא אפס. ▷

תרגילים



1. מנו את כל המאורעות הבסיסיים ושווי הסיכוי שעשויים להתרחש:
א) מהטלת מטבע;
ב) מהטלת קובייה;
ג) מהטלת ארבעון שפאותיו ממוספרות מ- 1 עד 4;
ד) מסיבוב גלגל הרולטה המחולק ל- 5 גזרות המסומנות באותיות A, B, C, D ו- E.

2. בתיבה 2 כדורים לבנים ו- 3 שחורים; מוציאים באקראי כדור אחד. מה ההסתברות שהוצאנו:
א) כדור לבן ב) כדור שחור
ג) כדור אדום ד) כדור לבן **או** כדור שחור ?

3. בתיבה 2 כדורים לבנים, 3 שחורים ו- 4 אדומים; מוציאים באקראי כדור אחד. מה ההסתברות שהוצאנו:
א) כדור לבן ב) כדור שחור ג) כדור אדום
ד) **לא** כדור לבן ה) **לא** כדור שחור ו) **לא** כדור אדום?

4. על קלפים זהים רשומים המספרים 1 עד 10 (על כל קלף מספר אחד).
הניחו את הקלפים על השולחן, הפכו אותם כשהמספרים כלפי מטה וערבבו.
משכו באקראי קלף אחד. מה ההסתברות שעל הקלף רשום:
א) מספר 7 ב) מספר זוגי ג) כפולה של 3
ד) כפולה של 4 ה) מספר המתחלק ב- 5 ו) מספר ראשוני?

5. נאור שכח את הספרה האחרונה של מספר הטלפון של חברתו לכיתה.
הוא מחייג אותה באקראי.
א) מה ההסתברות שנאור ניחש נכון?
ב) מה ההסתברות שינחש נכון אם הוא בטוח שהספרה איננה 0?

6. הנפיקו 1000 כרטיסים להגרלה, מתוכם 20 כרטיסי זכייה בפרס הגדול ועוד 100 כרטיסים שזוכים בפרס ניחומים. נועה רכשה כרטיס אחד.
בהנחה שההגרלה הוגנת, מה ההסתברות שנועה תזכה:
א) בפרס הגדול ב) בפרס ניחומים ג) בפרס כלשהו ד) בשום פרס.

7. תוכנה מחוללת בחינות בוחרת באקראי שאלה אחת למבחן בגאומטריה מתוך מאגר נתון של 25 שאלות. במהלך הכנה לבחינה פתר תלמיד 22 מהשאלות.
מה ההסתברות שהתלמיד יקבל במבחן שאלה מבין אלו שפתר?

8. צבעו את שש פאותיה של קוביית עץ ונסרו אותה ל- 27 קוביות קטנות ע״י שישה חתכים: שניים לאורך, שניים לרוחב ושניים לגובה. בחרו אחת מהקוביות באקראי.
מה ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים:

א) A – לקובייה הקטנה שלוש פאות צבועות.

ב) B – לקובייה הקטנה שתי פאות צבועות.

ג) C – לקובייה הקטנה פאה אחת צבועה.

ד) D – לקובייה הקטנה אין אף לא פאה צבועה אחת.

9. מלאו את הטבלה:

מס. משימה	המשימה	מספר כל המאורעות שווי-סיכוי	המאורע A	מספר מאורעות רצויים	הסתברות מאורע A
1	הטלת קובייה		המספר שהופיע הוא אי זוגי		
2	הטלת קובייה		המספר שהופיע הוא כפולה של 3		
3	הוצאת אבן אחת מבין סדרת אבני דומינו		הוצאת האבן 2 : 6		
4	הוצאת אבן אחת מבין סדרת אבני דומינו		הוצא דאבל		
5	סיבוב גלגל הרולטה המחולק ל- 8 גזרות שוות וממוספרות		המחוג נעצר בגזרה שממספר הוא כפולה של 4.		
6	סיבוב גלגל הרולטה המחולק ל- 8 גזרות שוות וממוספרות		מחוג נעצר בגזרה שממספר אינו גדול מ- 6.		

1. מאורעות משלימים

דוגמה 1 במסיבה שבה השתתפו 100 אנשים חילקו באקראי 100 כרטיסי הגרלה, ביניהם 5 כרטיסים זוכים. כל משתתף קיבל כרטיס אחד.

מה ההסתברות שמשתתף מסוים קיבל:

א) כרטיס זוכה ב) כרטיס שאינו זוכה?

◄ כל משתתף עשוי לקבל כל אחד מ- 100 הכרטיסים, כלומר מספר כל האפשרויות עבור המשתתף המסוים הוא 100.

א) מספר המאורעות הרצויים זהה למספר כרטיסי הזכייה - 5.

לכן ההסתברות היא:

$$P(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

אפשר לבטא את ההסתברות גם באחוזים: $P(A) = 5\%$. ▷

ב) מספר הכרטיסים שאינם זוכים הוא 95, לכן למאורע ש"אינו רצוי" מתאימים 95 מאורעות. ההסתברות שמשתתף מסוים יקבל כרטיס שלא זוכה היא אפוא:

$$P(\overline{A}) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} = 95\%$$

תשובה: א) 5% ב) 95%. ▷

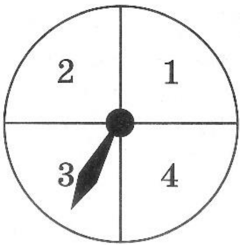
למאורע $\overline{A}$ (מבטאים "A גג" או "לא A") קוראים **המאורע המשלים** למאורע A, אם הוא מתרחש כאשר מאורע A אינו מתרחש.

דוגמאות נוספות למאורעות משלימים:

1) "זכייה" ו"אי זכייה" במשחק (מדוע לא "זכייה" ו"הפסד"?)

2) "הופעת התמונה" ו"הופעת המספר" בהטלת מטבע;

3) "הופעת המספר 2" ו"הופעת כל מספר שאינה 2" (כלומר, הופעת 1, 3, 4, 5 או 6) על דופן קובייה לאחר הטלה בודדת;



4) "עצירת מחוג הגלגל של רולטה בגזרה 3" ו"עצירת מחוג הגלגל של רולטה בגזרה שאינה 3" (כלומר בגזרה 1, 2 או 4);

5) "הופעת מספר שהוא כפולה של 3" ו"הופעת מספר שאינו כפולה של 3" (כלומר הופעת 1, 2, 4 או 5) בהטלת קובייה.

נניח שבניסוי קיימות n תוצאות שוות סיכוי. מכל אלה למאורע (הרצוי) A מתאימות m_1 תוצאות, ולמאורע המשלים $\overline{A}$ מתאימות m_2 תוצאות.

על פי ההגדרה של מאורע משלים:

$$m_1 + m_2 = n \qquad (1)$$

(כלומר סכום כל המאורעות הרצויים והבלתי רצויים שווה לסך כל האפשרויות).

על פי ההגדרה, הסתברות המאורע A שווה ליחס שבין המאורעות הרצויים למספר כל האפשרויות:

$$P(A) = \frac{\text{מספר המאורעות הרצויים}}{\text{מספר כל המאורעות}} = \frac{m_1}{n}$$

ובדומה, הסתברות המאורע המשלים:

$$P(\overline{A}) = \frac{m_2}{n}$$

נחבר את שתי ההסתברויות:

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n}$$

נשתמש בשוויון (1) ונקבל סופית:

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

סכום ההסתברויות של המאורעות המשלימים שווה ל- 1:

$$\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$$

באמצעות נוסחה זאת אפשר לחשב הסתברות של מאורע כאשר הסתברות המאורע המשלים ידועה:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (2)$$

דוגמה 2 ההסתברות שקלע יפגע במטרה נעה היא 0.8.

מה ההסתברות שהוא יחטיא?

נסמן את המאורע "פגיעה במטרה" באות A. על פי הנתון:

נסמן את המאורע "פגיעה במטרה" באות A; אזי על פי הנתון:

$$P(A) = 0.8$$

כיוון שההחטאה $\overline{A}$ היא מאורע משלים לפגיעה (הקלע פוגע או מחטיא), אפשר לרשום עבור הסתברות ההחטאה:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = 0.2$$

תשובה: 0.2 ▷

נחזור ל**דוגמה 1**. שם חישבנו (בסעיף ב) את ההסתברות שהמשתתף יקבל כרטיס שאינו זוכה. אותה התוצאה אפשר לקבל באמצעות הנוסחה (2):

אי זכייה היא מאורע משלים לזכייה, לכן:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 95\%$$

תרגילים

10. מה המאורע המשלים למאורע הנתון:

א) בהטלת המטבע הופיע מספר;

ב) בהטלת קובייה הופיע המספר 5;

ג) בהטלת קובייה הופיע מספר זוגי;

ד) בהגרלת טוטו הכרטיס של תמיר זכה;

ה) מחוג של רולטה נעצר בגזרה 4;

ו) מתיבה שבה 2 כדורים לבנים ו- 3 שחורים שלפו באקראי כדור לבן?

11. הסתברות הזכייה של כרטיס אחד בהגרלה בית ספרית היא:

א) 0.03 ב) $\frac{2}{121}$.

מה ההסתברות של משיכת כרטיס שאינו זוכה?

12. המאורע A מציין הופעת מספר קטן מ- 5 בהטלת קובייה.

מה המשמעות של מאורע $\overline{A}$? מצאו את $P(\overline{A})$ באחוזים.

13. מה ההסתברות שבהטלה אחת של קובייה לא יופיע המספר 6?

14. מה ההסתברות שאבן שתוצא מתוך אוסף של אבני דומינו לא תהיה דַּבֶּל (כפול)?

15. בתיבה 3 כדורים לבנים, 4 שחורים ו- 5 אדומים.
מה ההסתברות שכדור שהוצא באקראי יהיה:
א) לא לבן ב) לא שחור ג) לא אדום ?

16. מאורע B מציין פגיעה במטרה של לפחות קליע אחד.
מה המשמעות של מאורע $\overline{B}$?

2. איחוד מאורעות זרים (חיבור הסתברויות)

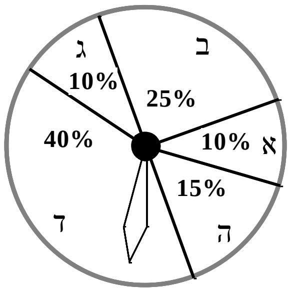
אם A ו- B הם מאורעות שאינם יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת (כלומר A ו- B *מאורעות זרים*), אז הסתברות ההתרחשות של **אחד משני המאורעות (איחוד המאורעות)** - מאורע C - שווה לסכום ההסתברויות של כל אחד מהמאורעות:

$$P(C) = P(A) + P(B)$$

דוגמה 1 מטילים קובייה. מה ההסתברות שהמספר שיופיע יהיה 5 **או** 2?

◄ שני המאורעות – הופעת המספר 5 (מאורע A) והופעת המספר 2 (מאורע B) - אינם יכולים להתרחש יחדיו (או 5 או 2). לכן הם מאורעות זרים, והסתברות ההתרחשות של **אחד מהם** שווה לסכום ההסתברויות של כל אחד מהם.

מכיוון ש- $P(A) = \frac{1}{6}$ ו- $P(B) = \frac{1}{6}$ נקבל: $P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. ▷



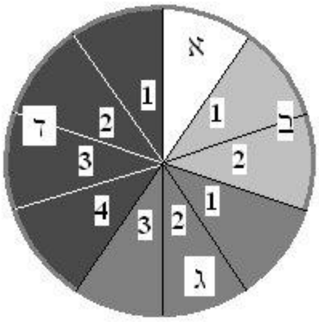
דוגמה 2 גלגל הרולטה מחולק ל- 5 גזרות א׳ עד ה׳ בעלות שטח שונה, כפי שמסומן באיור. מה ההסתברות שלאחר סיבוב, מחוג הגלגל יעצור בגזרה א׳, או ב׳ או ג׳?

◄ הסתברות העצירה של המחוג בגזרה מסוימת היא ביחס ישר לשטח הגזרה.

כיוון שהמחוג יכול לעצור בגזרה אחת בלבד, עצירותיו בגזרה א׳ או ב׳ או ג׳ הן מאורעות זרים (שלא יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת), ולכן ההסתברות המבוקשת שווה לסכום ההסתברויות:

▷ $P(C) = 10\% + 25\% + 10\% = 45\% = 0.45$

3. חיתוך מאורעות בלתי תלויים (מכפלה של הסתברויות)



דוגמה 1 גלגל רולטה מחולק ל- 4 אזורים (א׳- ד׳) ;

כל אזור מחולק לגזרות ממוספרות. כל הגזרות בעיגול שוות שטח.

מה ההסתברות שמחוג הגלגל יעצור בגזרה 2 של אזור ד׳?

דרך א כיוון ששטחי כל הגזרות שווים, שווה גם הסתברות העצירה של המחוג בכל אחת מהגזרות.
בסך הכול קיימות 10 אפשרויות שמתוכן אחת רצויה,
לכן ההסתברות היא : $P = \frac{1}{10}$. ▷

דרך ב תחילה נחשב את הסתברות שהמחוג יעצור באזור ד׳.

כיוון ששטח האזור שווה ל- $\frac{4}{10}$ משטח העיגול (4 גזרות מתוך 10),
גם הסתברות זו שווה ל- $P_{ד} = \frac{4}{10}$.

המחוג יכול לעצור בכל אחת מ- 4 הגזרות, שמתוכן אחת (גזרה 2) היא רצויה.

לכן הסתברות העצירה בגזרה 2 **כאשר המחוג נמצא באזור ד׳** היא : $P_2 = \frac{1}{4}$.

מהשוואה של $P_{ד}$ ו- P_2 עם התוצאה שהתקבלה בדרך א אפשר להסיק :

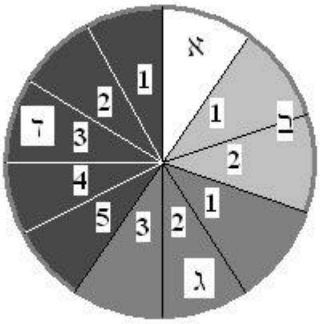
$$P = P_{ד} \cdot P_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

אם מאורעות A ו- B **בלתי תלויים** (כלומר התרחשות אחד מהם אינה משפיעה על הופעת השני), ההסתברות $P(C)$ של **חיתוך המאורעות** C (שני המאורעות יתרחשו בעת ובעונה אחת), שווה למכפלת ההסתברויות של כל אחד מהם :

$$P(C) = P(A) \times P(B)$$

דוגמה 2 גלגל רולטה מחולק ל- 4 אזורים (א׳- ד׳), כל אזור מחולק לגזרות שוות וממוספרות. כל הגזרות שוות שטח, פרט לגזרה ד׳ שונה (בדוגמה זו האזור מחולק ל- 5 גזרות).

מה ההסתברות שמחוג הגלגל יעצור בגזרה 2 של אזור ד׳?



כיוון ששטחי הגזרות באזור ד׳ שונים מאזורים אחרים, הסיכוי לעצירת המחוג באחת הגזרות של אזור ד׳ שונה מהסיכוי לעצירתו בכל גזרה של אזורים אחרים.

לכן המאורעות אינם שווי סיכוי, ואי אפשר לחשב את ההסתברות כיחס של מספר המאורעות הרצויים.

אי לכך, דרך א׳ אינה מתאימה.

נתייחס למאורע הנדון כ**מאורע דו שלבי**: השלב הראשון – עצירת המחוג באזור ד׳. הסתברות המאורע הזה היא ביחס ישר לשטח האזור, כמו בדוגמה 1:

$$P_{ד} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

השלב השני – עצירת המחוג באחת הגזרות של אזור ד׳ (גזרה 2). הסתברות מאורע זה שווה ליחס של מספר המאורעות הרצויים (1) למספר כל האפשרויות (5 על פי מספר הגזרות):

$$P_2 = \frac{1}{5}$$

שני המאורעות – עצירת המחוג באזור ד׳ ועצירתו בגזרה 2 באזור זה – יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת, לכן הם בלתי תלויים, והסתברות המאורע הרצוי- **חיתוך שני מאורעות** – שווה למכפלה:

$$P = P_{ד} \cdot P_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

כלל מכפלת ההסתברויות של מאורעות בלתי תלויים מתקיים גם כאשר מספר המאורעות גדול מ- 2.

דוגמה 3 מטילים קובייה 3 פעמים.

מה ההסתברות שהמספר 6 יופיע לפחות פעם אחת?

◄ כיוון שהופעת כל מספר אינו תלוי בתוצאה הקודמת, המאורעות בלתי תלויים.

מספר כל האפשרויות הוא : $6 \times 6 \times 6 = 216$.

כיצד נחשב את מספר המאורעות הרצויים?

אפשר לנסות בדרך ישירה : המספר 6 יכול להופיע פעם אחת, 2 פעמים או 3 פעמים.

כל מאורע כזה הוא מאורע רצוי.

המאורע שבו המספר 6 מופיע 3 פעמים הוא יחיד : $6 - 6 - 6$.

כדי לחשב את מספר המאורעות שבהם המספר 6 יופיע פעם אחת, נכין טבלה :

הופעה אחת		
הטלה ראשונה	**הטלה שנייה**	**הטלה שלישית**
6	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)
סה"כ : 1 x 5 x 5 = **25 מאורעות רצויים**		
כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	6	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)
סה"כ : 1 x 5 x 5 = **25 מאורעות רצויים**		
כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	6
סה"כ : 1 x 5 x 5 = **25 מאורעות רצויים**		

מספר המאורעות הרצויים שבהם מופיע 6 פעם אחת הוא, אם כן, 75.

המספר 6 יכול להופיע פעמיים במקרים שלהלן :

2 הופעות		
הטלה ראשונה	**הטלה שנייה**	**הטלה שלישית**
6	6	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)
סה"כ: 1 x 5 x 5 = **5 מאורעות רצויים**		
כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	6	6
סה"כ: 1 x 5 x 5 = **5 מאורעות רצויים**		
6	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	6
סה"כ: 1 x 5 x 5 = **5 מאורעות רצויים**		

מספר כל המאורעות הרצויים הוא אפוא: $91 = 1 + 15 + 75$.

נחלק במספר המאורעות הכולל ונקבל את ההסתברות הרצויה:

$$P = \frac{91}{216} \approx 0.42$$ ▷

הפִתְרון הישיר באמצעות ספירת מספר המאורעות הרצויים הוא ארוך ומייגע.

האם קיימת דרך קצרה יותר?

כן, במקום לחשב את מספר הפעמים שבהן מופיע מספר 6, נחשב את מספר הפעמים שבהן היא <u>אינה מופיעה</u>. כלומר, נחשב את ההסתברות של <u>המאורע המשלים</u>, כאשר מספר 6 לא יופיע אפילו פעם אחת.

עבור זריקה בודדת הסתברות כזאת היא 5/6 (5 תוצאות "רצויות" מסך כל 6 האפשרויות). עבור 3 הטלות נקבל הסתברות של אי הופעת מספר 6 <u>כחיתוך המאורעות</u> (שהרי המאורעות בלתי תלויים):

$$P(\overline{A}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

הסתברות המאורע המשלים :

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) =$$

$$= 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0.42$$

קיבלנו, כמובן, תוצאה זהה.

3.3 הטלת שתי קוביות משחק

במשחק שש-בש מטילים שתי קוביות הוגנות (כאלה שקיימים בהן סיכויים שווים להופעת כל מספר מ- 1 עד 6).

בהטלה יכולים להופיע צירופי מספרים שונים (ראו שאלות 14 - 17 במאגר).

בסעיף זה נחשב את ההסתברויות של צירופים אופייניים שונים.

1. **הופעת צירוף המספרים הרצוי (המספרים אינם זהים)**

נניח שרוצים לקבל (3: 4). מה הסיכוי לכך?

הסתברות ההופעה של מספר מסוים (3) על גבי קובייה אחת היא $\frac{1}{6}$.

הסתברות ההופעה של מספר שני (4) על קובייה אחרת גם היא $\frac{1}{6}$.

שני המאורעות <u>בלתי תלויים</u> (יכולים להתרחש יחדיו),

לכן הסתברות <u>החיתוך של שניהם</u> (הופעה משותפת של שני המאורעות) שווה למכפלה :

$$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \qquad (1)$$

סדר הופעת המספרים אינו חשוב, ולכן התוצאה תהיה זהה אם על גבי הקובייה הראשונה יופיע המספר 4, ועל השנייה 3.

הסתברות המאורע הזה גם היא שווה ל- $\frac{1}{36}$.

שני המאורעות $(3 - 4)$ ו- $(4 - 3)$ הם *מאורעות זרים* (רק אחד מהם יכול להתממש). ההסתברות של *איחוד מאורעות זרים* שווה לסכום ההסתברויות.

לכן נקבל עבור הסתברות ההופעה של הצמד 3 – 4 (נסמן אותה ב- P(3,4)) :

$$P(3,4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18} \qquad \triangleright$$

2. הופעת מספרים זהים מסוימים

מה הסיכוי לקבל (3: 3)?

הסתברות ההופעה של 3 על הקובייה הראשונה היא $\frac{1}{6}$.

הסתברות ההופעה של 3 על הקובייה השנייה גם היא $\frac{1}{6}$.

המאורעות הם בלתי תלויים, ולכן ההסתברות הנדרשת שווה למכפלה:

$$P(3,3) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$ ▷

3. הופעת מספרים זהים כלשהם

מה הסיכוי לקבל דַבֶּל כלשהו?

הסתברות ההופעה של צמד מספרים זהים מסוימים היא - $\frac{1}{36}$.

כיוון שהופעות הצמדים (n,n) (הדאבלים) השונים (1,1; 2,2; 3,3; 4,4; 5,5 ו- 6,6) הם מאורעות *זרים* (שאינם יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת), ההסתברות הנדרשת שווה לסכום כל ההסתברויות:

$$P(n,n) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + ... + \frac{1}{36} = 6 \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$ ▷

4. הופעת סכום מספרים מסוים

א) נרשום את כל הצירופים האפשריים המרכיבים את הסכום הנתון;

ב) נרשום את ההסתברות של כל הצירוף כפי שמצאנו בסעיפים הקודמים;

ג) נחבר את ההסתברויות של כל המאורעות הזרים.

דוגמה 1 מה ההסתברות שסכום המספרים על שתי הקוביות יהיה 5?

◀ א) הצירופים האפשריים: 1,4; 2,3;

ב) כפי שמצאנו בסעיף 1:

$$P(1,4) = \frac{1}{18}, \; P(2,3) = \frac{1}{18}$$

ג) המאורעות (1,4) ו- (2,3) הם מאורעות זרים, לכן:

$$P(5) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$ ▷

דוגמה 2 מה ההסתברות שסכום המספרים על שתי הקוביות יהיה 8?

◄ א) הצירופים האפשריים: 6,2; 3,5; 4,4

ב) כפי שמצאנו בסעיף 1: $P(2,6) = \frac{1}{18}$, $P(3,5) = \frac{1}{18}$

כפי שמצאנו בסעיף 2: $P(4,4) = \frac{1}{36}$

ג) כל המאורעות הם מאורעות זרים, ולכן מחברים את ההסתברויות:

$$P(8) = P(2,6) + P(3,5) + P(4,4) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

5. אי הופעת מספר מסוים

כאשר היריב במשחק שש-בש צריך להחזיר אבנים ללוח, אנו מקווים שלא יופיע מספר מסוים על הקוביות שהוא יטיל.
מה ההסתברות לכך?

אי הופעת מספר מסוים הוא <u>המאורע המשלים</u> להופעתו של מספר זה (ראו סעיף 42.1), לכן די לחשב את הסתברות ההופעה של המספר הנדון ולהשתמש בנוסחה למאורע המשלים.

דוגמה 1 מה הסיכוי שאם נטיל את הקובייה פעם אחת לא יופיע המספר 3?

◄ הסיכוי שיופיע מספר 3 הוא $P(3) = \frac{1}{6}$ (מאורע רצוי אחד מתוך סה״כ 6 אפשרויות).
הסיכוי <u>שלא יופיע</u> מספר 3 הוא *מאורע משלים* שסיכויו:

$$P(\bar{3}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \qquad \triangleright$$

דוגמה 2 מה הסיכוי שאם נטיל את הקובייה <u>פעמיים</u> לא יתקבל המספר 3 ולו פעם אחת?

◄ שתי ההטלות הן מאורעות בלתי תלויים, לכן ההסתברות ששניהם יתקיימו שווה למכפלת ההסתברויות של כל אחד מהם:

$$P(\bar{3}) \cdot P(\bar{3}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

3.4 סביבון

על הפאות של סביבון חנוכה רשומות האותיות **נ**, **ג**, **ה**, **פ**.

מסובבים את הסביבון פעם אחת.

א) מה הסיכוי שתופיע אות מסוימת?

ב) מה הסיכוי שלא תופיע אות מסוימת?

◄ מתוך 4 אפשרויות היתכנות המאורע הרצוי (הופעת אות מסוימת) הוא אחד.

לכן הסתברות ההופעה של אות כלשהי היא $\frac{1}{4}$:

$$P(\text{נ}) = P(\text{ג}) = P(\text{ה}) = P(\text{פ}) = \frac{1}{4}$$

אי הופעת אות היא מאורע משלים להופעתה. לכן הסיכוי שאות מסוימת לא תופיע בסביבון היא: $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$P(\overline{\text{נ}}) = P(\overline{\text{ג}}) = P(\overline{\text{ה}}) = P(\overline{\text{פ}}) = \frac{3}{4}$$

מסובבים סביבון פעמיים.

א) מה הסיכוי שאות מסוימת תופיע פעמיים?

ב) מה הסיכוי שאות מסוימת לא תופיע אפילו לא פעם אחת?

ג) מה הסיכוי שאות מסוימת תופיע בדיוק פעם אחת?

ד) מה הסיכוי שאות מסוימת תופיע לפחות פעם אחת?

◄ א) הסיכוי להופעת האות בסיבוב הראשון הוא $\frac{1}{4}$.

סיכוי הופעתה של אותה אות בסיבוב השני הוא גם $\frac{1}{4}$.

שני המאורעות בלתי תלויים (יכולים להתרחש יחד), לכן ההסתברות של ההתרחשות של שניהם שווה למכפלה:

$$P(\text{נ}, \text{נ}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \qquad \triangleright$$

ב) אי הופעת אות היא מאורע משלים להופעתה של האות.

לכן הסיכוי לאי הופעתה של האות "נ" לדוגמה, שווה ל:

$$P(\overline{\text{נ}}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \qquad \triangleright$$

ג) יש שתי אפשרויות:

א) האות מופיעה בסיבוב הראשון ואינה מופיעה בשני;
ב) האות אינה מופיעה בסיבוב הראשון ומופיעה בשני.

המאורעות א) ו- ב) הם מאורעות זרים (יכול להתרחש א) או ב), ולא שניהם ביחד), לכן הסתברות המאורע המבוקש שווה לסכום שתי ההסתברויות:

$$P(\text{נ}) = P_1 + P_2$$

מאורע א) מורכב משניים: הופעת האות בסיבוב הראשון (הסיכוי $\frac{1}{4}$), ואי הופעתה בסיבוב השני (ההסתברות $\frac{3}{4}$). המאורעות בלתי תלויים (מתרחשים יחד – אחד לאחר השני), לכן הסיכוי שווה למכפלה:

$$P_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

בדומה לכך, סתברות המאורע ב) שווה ל-:

$$P_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

נחבר את ההסתברויות של שני המאורעות ונקבל את ההסתברות שאות מסוימת (למשל "נ") תופיע בדיוק פעם אחת לאחר שני סיבובים:

$$\triangleright \quad P(\text{נ}) = P_1 + P_2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$$

ד) דרך א' כמו במקרה הקודם, המאורע מורכב משני מאורעות זרים:

$$P(\text{נ}) = P_1 + P_2$$

כאשר P_1 הוא הסיכוי להופעת האות בסיבוב הראשון (ובסיבוב השני יכולה להופיע כל אות),

ו- P_2 הוא הסיכוי להופעת האות בסיבוב השני (בסיבוב הראשון יכולה להופיע כל אות, מלבד האות המבוקשת שהופעתה נלקחה בחשבון ב- P_1).

הסתברות המאורע שבו יכולה להופיע כל אות היא 1 (כל מאורע רצוי).

לכן:

$$P_1 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

חישוב P_2: סיכוי הופעת האות הרצויה בסיבוב השני הוא $\frac{1}{4}$;

סיכוי הופעת כל אות מלבד האות המבוקשת הוא $\frac{3}{4}$.

לכן : $P_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$, וסיכוי הופעת האות לפחות פעם אחת הוא :

$$P(\text{נ}) = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

תשובה : $P = \frac{7}{16}$ ▷

<u>דרך ב׳</u> נמצא את ההסתברות שהאות <u>לא תופיע</u> ולו פעם אחת.

הסיכוי לכך בסיבוב הראשון הוא : $\frac{3}{4}$ (3 <u>מאורעות רצויים</u> מסך כל 4 האפשרויות).

גם הסיכוי שהאות לא תופיע בסיבוב השני הוא $\frac{3}{4}$.

שני המאורעות בלתי תלויים, לכן הסיכוי שהאות לא תופיע בשני הסיבובים הוא המכפלה :

$$P(\overline{\text{נ}}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

הסיכוי שהאות תופיע לפחות פעם אחת שווה להסתברות המאורע המשלים :

$$P(\text{נ}) = 1 - P(\overline{\text{נ}}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$ ▷

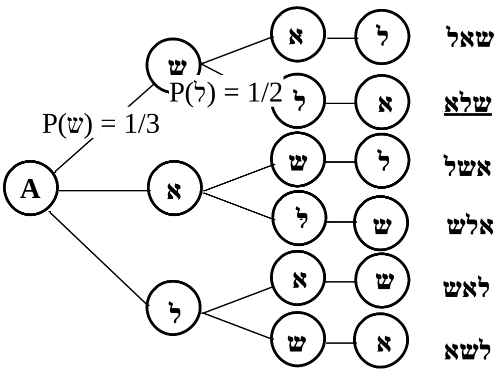
3.5 הסתברות של מאורע דו שלבי - עץ האפשרויות

נתבונן בדוגמה :

דוגמה 1 בקופסה 3 קוביות משחק זהות: אדומה (א), שחורה (ש) ולבנה (ל). מוציאים אותן באקראי, אחת אחת. מה ההסתברות שסדר הופעת הקוביות יהיה **(ש), (ל) , (א)**?

◀ את כל האפשרויות, כולל המאורעות הרצויים, אפשר להציג באמצעות *עץ האפשרויות* שלפניכם :

כל מסלול רציף **(ענף)** מייצג אפשרות מסוימת. לדוגמה הענף העליון מייצג משיכת קובייה שחורה (ש), אחריה אדומה (א), ולבסוף לבנה (ל).



הענף המייצג את המאורע הרצוי (**ש–ל–א**) הוא אחד מ- 6 ענפי העץ.

לכן ההסתברות שהמאורע הרצוי יתרחש היא $\frac{1}{6}$.

הבה נראה כיצד אפשר להגיע לתשובה בלי ספירה קפדנית של כל האפשרויות.

1) שלושת הענפים הם **מאורעות זרים** (ענף אחד בלבד יכול להתממש) ;
לדוגמה, בשלב הראשון אפשר לבחור **או** כדור שחור, **או** אדום, **או** לבן) ;
כאשר כמה מהענפים הם **מאורעות רצויים**, מחברים את ההסתברויות של כל אחד מהם.
בדוגמה הנ"ל *רק ענף אחד רצוי* (משיכת הכדור השחור בשלב ראשון), והסיכוי שהוא יתממש היא :

$$P(\text{ש}) = \frac{1}{3}$$

2) המאורעות *בתוך הענף* הם **בלתי תלויים** (יכולים להתממש יחד) : לאחר שבחרנו בשלב הראשון בכדור השחור אפשר לבחור בשלב השני באחד משני הכדורים הנותרים (אדום או לבן), ולהוסיף אותו לכדור השחור שנבחר קודם.
הסתברות הבחירה של הכדור הלבן (המאורע הרצוי) היא : $P(\text{ל}) = \frac{1}{2}$
(אפשרות אחת מתוך שתיים).
ההסתברות שיתממשו שני מאורעות בלתי תלויים **(איחוד מאורעות בלתי תלויים)** שווה למכפלת ההסתברויות :

$$P(\text{ש,ל}) = P(\text{ש}) \times P(\text{ל}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

לאחר בחירת שני הכדורים (שחור ולבן) המאורע של בחירת הכדור האדום הוא *ודאי* (יתממש בהכרח) וההסתברות שלו היא 1.
לכן הסתברות המאורע המורכב היא :

$$P(\text{ש,ל,א}) = P(\text{ש}) \times P(\text{ל}) \times P(\text{א}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} \qquad \triangleright$$

דוגמה 2

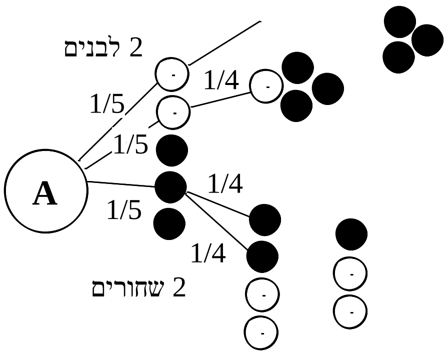
בקופסה שני כדורים לבנים ושלושה שחורים.

מוציאים באקראי שני כדורים יחד. מה הסתברות המאורע :

א) ששני הכדורים לבנים?

ב) ששני הכדורים שחורים?

ג) ששני הכדורים הם : לבן ושחור?



א) קיימים שני ענפים מתאימים (ראו איור). ההסתברות של כל ענף היא מכפלת הסתברויות הבחירה של כדור ראשון לבן (1/5) וכדור שני לבן (1/4) (אחד מתוך 4 הכדורים שנשארו):

$$P_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

לכן סיכוי המקרה הראשון הוא:

$$P(1) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

ב) עבור כל אחד מ- 3 הכדורים השחורים קיימים שני ענפים אפשריים (ראו ציור). לכן הסתברות המאורע 2 (שני כדורים שחורים) היא:

$$P(2) = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{10}$$

ג) ספירת ענפי העץ האפשריים: 2 ענפים המתחילים בכדור לבן, ואחריו 3 ענפים העוברים דרך הכדורים השחורים, ו- 3 ענפים המתחילים בכדור שחור ואחריו 2 ענפים העוברים דרך כדור לבן:

$$P(3) = 2 \times \left(3 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) + 3 \times \left(2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{2 \cdot 6}{20} = \frac{3}{5}$$

סיכום:

את אוסף המאורעות ה**בלתי תלויים** אפשר להציג בעץ, שענפיו מייצגים את קבוצת המאורעות **הזרים (או** זה **או** אחר), וכל ענף מורכב מסדרת מאורעות בלתי-תלויים שיכולים להתרחש יחדיו.

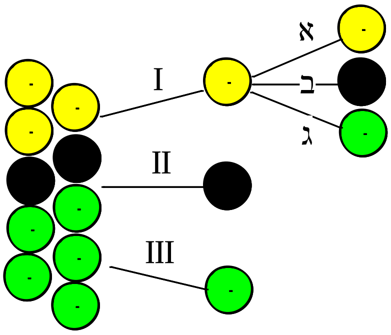
הסתברות המאורע הרצוי שווה לסכום הסתברויות כל הענפים "הרצויים" (**חיבור הסתברויות**), כאשר ההסתברות של כל ענף שווה **למכפלת ההסתברויות** של המאורעות הבלתי תלויים שמהם הענף מורכב.

דוגמה 3

בתיבה 3 כדורים צהובים, 2 כדורים שחורים ו- 5 כדורים ירוקים.

מוציאים באקראי כדור, מחזירים אותו לתיבה ושוב מוציאים באקראי כדור.

א) מה ההסתברות שבשתי הפעמים הוצא כדור צהוב?



◄ נשרטט את "עץ האפשרויות" המתאר את המאורע "פעמיים הוצא כדור צהוב".

מאורע זה **דו שלבי**. בשלב ראשון מוציאים כדור אחד. כיוון שיכולים להוציא שלושה סוגים של כדורים: צהוב **או** שחור **או** ירוק, מאורעות אלה **זרים** ומיוצגים על ידי 3 מענפי העץ.

לנתוני השאלה מתאים ענף I (הוצאת כדור צהוב), שההסתברות שלו היא $\frac{3}{10}$ (יש 3 כדורים צהובים מתוך 10).

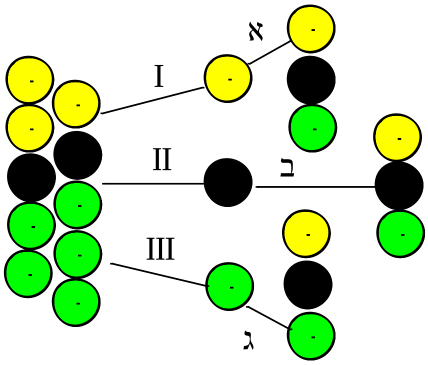
בשלב השני שוב יכולים להתרחש 3 מאורעות **בלתי תלויים** במאורע של השלב הראשון (הוצאת הכדור השני אינה תלויה בסוג הכדור הראשון, *מכיוון שמחזירים אותו לאחר הוצאתו*).

הסתברות להוציא את הכדור הצהוב היא שוב $\frac{3}{10}$.

המאורעות המתאימים לשני השלבים של אותו ענף I הם בלתי תלויים, לכן ההסתברות הכוללת שווה למכפלת ההסתברויות:

$$P(\text{Iא}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 9\% \qquad \triangleleft$$

ב) מה ההסתברות שבשתי הפעמים הוצאו כדורים באותו צבע?



◄ מאורע זה יכול להתרחש בכל אחד משלושת ענפי העץ: I, II ו- III שהם **מאורעות זרים** (בשלב ראשון אפשר להוציא רק כדור אחד בצבע כלשהו).

אולם להבדיל מהמקרה הקודם, **המאורע הרצוי** (הוצאת שני כדורים בצבע זהה) **יכול להתרחש בכל אחד מהענפים האלה** (ראו את הענפים המתאימים בעץ האפשרויות: Iא, IIב, IIIג).

לכן המאורע הרצוי מורכב מ**חיבור** המאורעות הזרים:

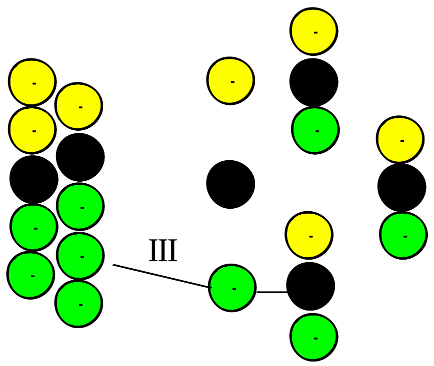
$$P(A) = P(\text{Iא}) + P(\text{IIב}) + P(\text{IIIג})$$

בכל ענף המאורעות **בלתי תלויים**, לכן הסתברות המאורע הדו שלבי בכל ענף שווה **למכפלת ההסתברויות**:

$$P(\text{I}א) = \frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10} = \frac{9}{100},\quad P(\text{II}ב) = \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{4}{100},\quad P(\text{III}ג) = \frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{25}{100}$$

נחבר ונקבל את התשובה:

$$P(A) = \frac{9}{100} + \frac{4}{100} + \frac{25}{100} = \frac{38}{100} = 38\%$$



ג) מה ההסתברות שתחילה הוצא כדור ירוק ואחריו כדור שחור?

למאורע זה מתאים הענף התחתון המורכב משני מאורעות בלתי תלויים:

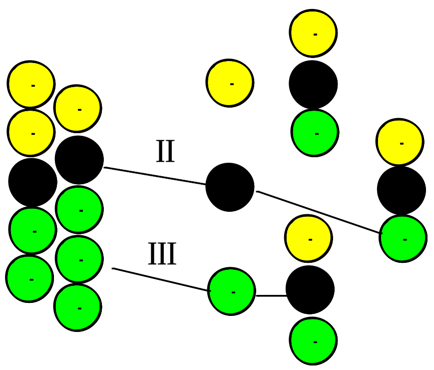
הוצאת כדור ירוק (הסתברות $\frac{2}{10}$)

והוצאת כדור שחור (הסתברות $\frac{5}{10}$).

הסתברות המאורע הדו שלבי שווה למכפלה:

$$P(A) = \frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10} = \frac{1}{10}$$

ד) מה ההסתברות שאחד משני הכדורים שהוצאו הוא ירוק והשני שחור?



לענף התחתון התווסף ענף המייצג מקרה של בחירת הכדור השחור תחילה, ואחריו הכדור הירוק.

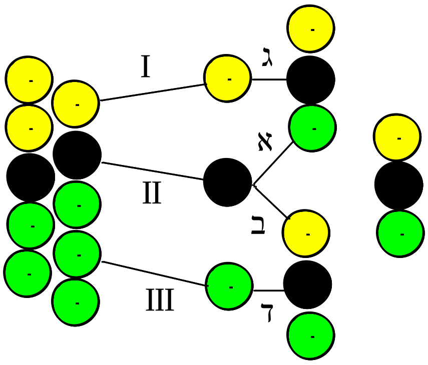
הסתברות המאורע הזה שווה למכפלה:

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{10} = \frac{1}{10}$$

וההסתברות המסכמת שווה לסכום ההסתברויות של שני הענפים:

$$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

ה) מה ההסתברות שאחד משני הכדורים שהוצאו שחור (והשני ירוק או צהוב)?



נתבונן בעץ האפשרויות. כל אחד משלושת הענפים I, II ו- III מכיל את המאורע הרצוי: ענף II מייצג מקרה שבו בשלב הראשון הוצא כדור שחור.

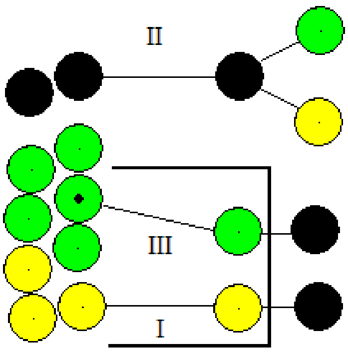
ההסתברות של השלב הזה היא: $\frac{2}{10}$.

מאורע השלב השני ("לא הוצא כדור שחור") הוא **מאורע משלים** למאורע "הוצא כדור שחור", לכן ההסתברות שלו היא: $1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$.

שני השלבים בענף אחד הם מאורעות **בלתי תלויים**, לכן ההסתברות של הענף II שווה למכפלה:

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{4}{25}$$

שני הענפים I ו- III מתארים מקרים שבהם הכדור השחור לא הוצא בשלב הראשון, אלא בשלב השני.



אפשר לחשב את ההסתברויות לכך בעזרת עץ האפשרויות, שבו שני הענפים I ו- III מהווים ענף אחד, שבו הכדור השחור **לא הוצא** בשלב הראשון.

גם ההסתברות למאורע זה היא: $1 - \frac{2}{10} = \frac{8}{10}$ (המאורע המשלים למאורע "הוצא כדור שחור").

בשלב השני בענף זה מתרחשת הוצאה של הכדור השחור. ההסתברות לכך היא: $\frac{2}{10}$.

שני השלבים בענף אחד הם מאורעות **בלתי תלויים**, לכן ההסתברות של הענף המאוחד I ו- III שווה למכפלה:

$$\frac{2}{10} \cdot \frac{8}{10} = \frac{4}{25}$$

מאורעות שני הענפים II ו- (I+III) הם זרים (מתממש **או** מקרה ראשון **או** שני), לכן המאורע הרצוי הוא **איחוד** שני המאורעות, וההסתברות שלו שווה לסכום:

$$\triangleleft \qquad \frac{4}{25}+\frac{4}{25}=\frac{8}{25}$$

בדיוק, לפחות ולכל היותר...

כאשר מדובר במאורעות **חוזרים**, כמו הטלת קובייה, עולות שאלות גם לגבי סיכויי הופעתו של מספר מסוים וגם לגבי סיכויי הופעתו של מספר מסוים **כמה פעמים** באותו משחק.

לדוגמה: הסתברות הופעת המספר 3 על הפאה העליונה של קוביית משחק שווה ל- $\frac{1}{6}$ (תוצאה אחת רצויה מתוך 6 אפשרויות).

מה ההסתברות שגם בזריקה הבאה יופיע 3? גם הסתברות זו היא $\frac{1}{6}$ (כיוון שתוצאת הזריקה אינה תלויה במספר שיצא לפניה – המאורעות הם בלתי תלויים).

מה הסיכוי שמספר 3 יופיע בשתי זריקות רצופות?

כיוון שהמאורעות בלתי תלויים, המאורע המורכב הוא **חיתוך** של שניהם, וההסתברות שלו שווה למכפלת ההסתברויות:

$$P(3,3) = P(3)\cdot P(3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ומה הסיכוי שמספר 3 יופיע שלוש פעמים ברצף?

בדומה למקרה הקודם, כל המאורעות (הופעת מספר 3) הם בלתי תלויים, מאורע המורכב הוא חיתוך שלוש המאורעות, וההסתברות שווה ל-

$$P(3,3,3) = P(3)\cdot P(3)\cdot P(3) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{108}$$

ישנם מצבים, שבהם לא רצוי לקבל "דַבֶּל" 3:3, אלא מספר אחד 3, ושני - כל מספר אחר (מתוך שתי זריקות, מספר 3 יופיע **בדיוק פעם אחת**).

מה הסיכוי לכך?

בשפת תורת ההסתברות אפשר לומר שהמאורע הרצוי מורכב משני מאורעות בלתי תלויים: האחד – הופעת המספר 3, והשני – הופעת כל מספר מלבד המספר 3, כלומר **אי הופעתו** של 3.

זהו מאורע **משלים** למאורע של הופעת מספר 3, לכן ההסתברות שלו היא:

$$P(\overline{3}) = 1 - P(3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

והסתברות המאורע המורכב שווה למכפלה:

$$P(3,\overline{3}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

דוגמה 4 זורקים קובייה שלוש פעמים.

א. מה הסיכוי שמספר 2 יופיע שלוש פעמים?

◄ סיכוי הופעת 2 הוא $P(2) = \frac{1}{6}$;

המאורעות בלתי תלויים, לכן: $P(2,2,2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. ▷

ב. מה הסיכוי שמתוך 3 זריקות יופיע מספר 2 **בדיוק** פעמיים?

◄ המאורע הרצוי מורכב משתי הופעות של 2 והופעה אחת של "לא 2", לכן:

$$P(2,2,\overline{2}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$ ▷

ג. מה הסיכוי שמתוך 3 זריקות מספר 2 יופיע **בדיוק** פעם אחת?

◄ המאורע הרצוי מורכב מהופעה אחת של 2 ושתי הופעות של "לא 2", לכן:

$$P(2,\overline{2},\overline{2}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$ ▷

ד. מה הסיכוי שמתוך 3 זריקות מספר 2 **לא יופיע** אפילו פעם אחת?

◄ המאורע הרצוי מורכב מ- 3 הופעות של "**לא 2**", לכן:

$$P(\overline{2},\overline{2},\overline{2}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$ ▷

ה. מה הסיכוי שמתוך שלוש זריקות המספר 2 יופיע **לפחות** פעם אחת?

◄ נבדוק, מה המאורע <u>המשלים</u> למאורע המתואר "מספר 2 יופיע **לפחות** פעם אחת"?

המאורע המשלים הוא המאורע "מספר 2 **לא יופיע אפילו פעם אחת**", שאת ההסתברות שלו חישבנו בסעיף הקודם.

לכן, ההסתברות היא: $1 - P(\overline{2},\overline{2},\overline{2}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

ו. מה הסיכוי שמתוך שלוש זריקות מספר 2 יופיע **לפחות** פעמיים?

◀ למאורע זה מתאים **איחוד** המאורעות האלה: **או** שהמספר 2 מופיע שלוש פעמים (ההסתברות היא $P(2,2,2) = \frac{1}{216}$), **או** שהוא **אינו** מופיע בהטלה ראשונה (ההסתברות היא $P(\overline{2},2,2) = \frac{5}{216}$) שנייה, **או** שלישית, לכן ההסתברות של המאורע המורכב שווה ל-

$$P(2,2,2) + P(2,2,\overline{2}) + P(2,\overline{2},2) + P(\overline{2},2,2) = \frac{1}{216} + 3\cdot\frac{5}{216} = \frac{16}{216}$$

ז. מה הסיכוי שמתוך 3 זריקות מספר 2 יופיע **לכל היותר** פעמיים?

◀ גם את השאלה הזו קל יותר לפתור אם בודקים את **המאורע המשלים**:

<u>המספר 2 יופיע שלוש פעמים</u>. הסתברות המאורע הזה היא: $P(2,2,2) = \frac{1}{216}$.

לכן הסתברות המאורע המשלים:

$$P = 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216} \qquad \triangleright$$

דוגמה 5 כדי לעודד ילדה הלומדת טניס, מציעים לה הוריה פרס אם תנצח ברצף **לפחות** שני משחקים בסדרה של שלושה נגד האם ואלוף הליגה, כאשר יש שתי אפשרויות של סדר המשחקים: אימא – אלוף - אימא או אלוף – אימא – אלוף. האלוף משחק טוב מהאימא.

איזה סדר משחקים עדיף לילדה לבחור, כדי שסיכוייה לזכות בפרס יהיו טובים יותר?

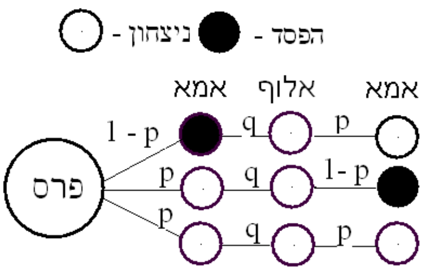
◀ נסמן את הסתברות הניצחון של הבת על אִמהּ ב- p, ועל האלוף ב- q.

על פי הנתון $p > q$.

נשרטט את עץ האפשרויות בסדרה <u>אימא-אלוף-אימא</u>.

שלושת הענפים המתאימים לנתוני הבעיה מתארים את התוצאות שלפניכם:

א. הפסד לאימא, ניצחון על האלוף, ניצחון על אימא.



מאורעות אלה בלתי תלויים, לכן הסתברות ענף א היא:

$$P(א) = (1 - p)\cdot q\cdot p$$

☜ **הערה**: אם q הוא הסתברות של ניצחון, אז $1 - q$ הוא הסתברות של הפסד.

ב. ניצחון על אימא, ניצחון על האלוף, הפסד לאימא.

ההסתברות ענף ב היא :

$$P(ב) = p\cdot q\cdot(1 - p)$$

ג. ניצחון בכל המשחקים. הסתברות ענף ג היא :

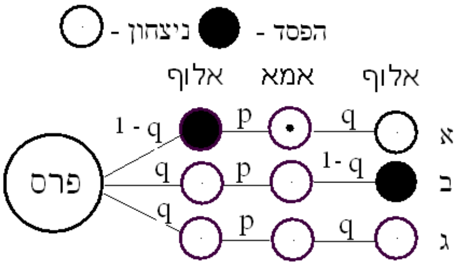
$$P(ג) = p\cdot q\cdot p$$

שלושת הענפים מתארים מאורעות **זרים**, לכן הסתברות הניצחון בסדרה זו שווה לסכום :

$$P = (1 - p)\cdot q\cdot p + p\cdot q\cdot(1 - p) + p^2q = qp - p^2q + pq - p^2q + p^2q =$$

$$= 2pq - p^2q = pq\,(2 - p) \quad (1)$$

בדומה נחשב את הסתברות הניצחון של הבת בסדרה <u>אלוף – אימא – אלוף</u> :



$$P(א) = (1 - q)\cdot p\cdot q$$

$$P(ב) = q\cdot p\cdot(1 - q)$$

$$P(ג) = q\cdot p\cdot q$$

$$P = (1 - q)\cdot p\cdot q + q\cdot p\cdot(1 - q) + q^2p =$$

$$= pq\,(2 - q) \qquad (2)$$

כיוון ש- $p > q$ (הסיכוי לנצח את אימא גבוה מהסיכוי לנצח את האלוף), אזי

$2 - p < 2 - q$, לכן ההסתברות לנצח בסדרה **אימא-אלוף-אימא** קטנה יותר מההסתברות בסדרה השנייה (**אלוף – אימא – אלוף**).

תשובה : כדי לזכות בפרס, על הבת לשחק בסדרה <u>אלוף – אימא – אלוף</u>. ▷

סיכום ביניים : כדי לפתור בעיות בהסתברות מאורע מורכב יש לשרטט את עץ האפשרויות, לסמן עליו את כל הענפים האפשריים של השלב בראשון ולחשב את ההסתברויות של כל ענף.

לאחר מכן, יש לשרטט את כל האפשרויות של השלב השני ולחשב את ההסתברויות שלהן.

לבסוף, יש לבדוק אֵלו מאורעות זרים, אֵלו – בלתי תלויים, ולחשב את הסתברות המאורע המורכב.

לסקרנים

חידה/פרדוקס (לפותרים מובטח פרס ענק!)

פרדוקס הוא מסקנה (או תשובה לשאלה) שהתקבלה בדרך נכונה, אולם אינה הגיונית. פִּתְרון (או הסבר הגיוני) לשאלה שלהלן טרם נמצא למרות חשיבותה הרבה של השאלה בתחומים שונים (מתעשיית התרופות ועד לבחירות לכנסת).

נתבונן במודל פשוט הממחיש את הבעיה: בחדר שלושה שולחנות: א, ב ו- ג.
על כל שולחן שני כובעי קסמים, שחור ולבן. בכל כובע שני סוגי מטבעות, מכסף ומזהב. אי אפשר להבדיל ביניהם על ידי מישוש. ליד כל כובע כתוב, כמה מטבעות מכל סוג נמצאים בו. מותר להוציא מטבע פעם אחת בלבד.

ניגשים לשולחן א.

ליד הכובע השחור כתוב: זהב - 5, כסף - 6.

ליד הכובע הלבן כתוב: זהב - 3, כסף - 4.

מאיזה כובע הסיכוי להוציא מטבע זהב גבוה יותר?

ההסתברות להוציא מטבע זהב מהכובע השחור היא:

$$\frac{5}{11} = 0.45$$

ההסתברות להוציא מטבע זהב מהכובע הלבן היא:

$$\frac{3}{7} = 0.43$$

לכן הסיכוי להוציא מטבע זהב מהכובע השחור גבוה יותר.

ניגשים לשולחן ב.

ליד הכובע השחור כתוב: זהב - 6, כסף - 3 .

ליד הכובע הלבן כתוב: זהב - 9, כסף - 5 .

ההסתברות להוציא מטבע זהב מהכובע השחור היא:

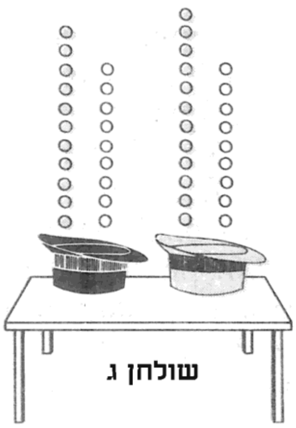
$$\frac{6}{9} = 0.67$$

ההסתברות להוציא מטבע זהב מהכובע הלבן היא:

$$\frac{9}{14} = 0.64$$

לכן הסיכוי להוציא מטבע זהב מהכובע השחור שעל שולחן ב גם הוא גבוה יותר.

כעת מציע הקוסם לחזור על הניסוי ליד שולחן ג, שגם עליו שני כובעים, שחור ולבן. לכובעים אלה העביר הקוסם את המטבעות משולחנות א ו- ב: לכובע השחור הוא העביר את כל המטבעות משני הכובעים השחורים (11 מזהב ו- 9 מכסף), וללבן – משני הלבנים (12 מזהב ו- 9 מכסף).



הגיוני לחשוב שגם הפעם כדאי לנסות את מזלנו קודם עם הכובע השחור, אולם חישוב ההסתברויות מוכיח אחרת:
ההסתברות להוצאת מטבע זהב מהכובע <u>השחור</u> היא

$$\frac{11}{20} = 0.55$$

ההסתברות להוצאת מטבע זהב מהכובע <u>הלבן</u> היא $0.57 = \frac{12}{21}$.

כלומר <u>כדאי יותר להוציא מטבע מכובע לבן</u>, אולם מסקנה זו אינה הגיונית!

אם בתחרויות נפרדות הכובע השחור "מנצח" את הלבן, איך ייתכן ששני הכובעים השחורים "יפסידו" ביחד לשני הלבנים?
מודל זה מְדַמֶּה תרחישים מתחומים רבים:

א. שתי מפלגות מתמודדות לכנסת.
בהצבעות בשתי ערים גדולות המפלגה הראשונה מנצחת בכל עיר, ואילו בהצבעה אחת כלל ארצית המפלגה השנייה מנצחת!

ב. משווים יעילות של שתי תרופות חדשות, א ו- ב, על קבוצת נשים ועל קבוצת גברים.
בכל אחת מהקבוצות תרופה א התגלתה כיעילה יותר מתרופה ב, ואילו בניסוי השוואתי דומה בקבוצה מעורבת של נשים וגברים, תרופה ב התגלתה כיעילה יותר!
לפִתְרון הפרדוקס מובטחת תהילה עולמית!

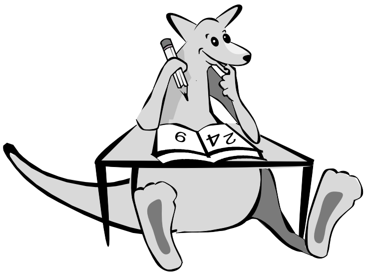
תרגילים

.17 מטילים קובייה פעמיים.

א) מה הסיכוי שתחילה יופיע המספר 6 ולאחר מכן 3?

ב) מה הסיכוי שתחילה יופיע המספר 3 ולאחר מכן 6?

ג) מה הסיכוי שבסיכום שתי ההטלות יופיע הצירוף 6:3?



.18 מטילים שתי קוביות בו זמנית.

א) מה הסיכוי שיופיע הצירוף 2,3?

ב) מה הסיכוי שיופיע הצירוף 2,2?

ג) מה הסיכוי שיופיע הצירוף 6,6?

.19 מסובבים סביבון פעמיים:

א) מה הסיכוי שהאות **נ** תופיע פעמיים?

ב) מה הסיכוי שהאות **ג** <u>לא תופיע</u> אפילו פעם אחת?

ג) מה הסיכוי שהאות **ה** תופיע <u>בדיוק</u> פעם אחת?

ד) מה הסיכוי שהאות **פ** תופיע <u>לפחות</u> פעם אחת?

.20 מה, לדעתכם, שכיח יותר (הסתברות גבוהה יותר) במשפחה בת ארבעה ילדים: שני בנים ושתי בנות, או שלושה מהמין האחד ואחד מהמין השני?

.21 מה הסיכוי שבהטלת שלוש קוביות סכום הנקודות יִשווה למכפלתן?

.22 במדינה מסוימת החליטו שכל אישה תפסיק ללדת אחרי הבן הראשון.

איך החלטה זו תשפיע, לדעתכם, על יחס המינים באוכלוסייה?

.23 אם יש סיכוי של 70% שאחרי יום גשום יבוא עוד יום גשום, וסיכוי של 50% שלאחר יום ללא גשם יבוא יום גשום - מה הסיכוי שאחרי יום ראשון גשום יֵרד גשם ביום שלישי?

.24 מטילים קובייה, ובו בזמן מסובבים סביבון שפאותיו מסומנות בספרות 1 עד 4.

א) מה הסיכוי שבקובייה ובסביבון יופיע אותו מספר?

ב) מה הסיכוי שהמספר שיופיע בסביבון קטן מהמספר שיופיע בקובייה?

25. א) איזה מאורע סביר יותר בהטלת שלוש קוביות: "הסכום זוגי" או "הסכום אי זוגי"?

ב) בהטלת 3 קוביות, הסכום 9 יכול להתקבל בכל משש הצירופים:

(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3)

גם הסכום 10 מתקבל ב- 6 הצירופים:

(1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4)

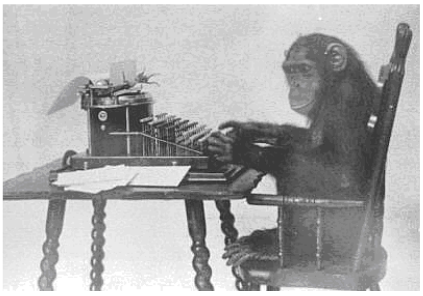
האם הסכומים 9 ו- 10 שווי הסתברות? נמקו.

26. אדם מפוזר מכניס באקראי שלושה מכתבים ממוענים לשלוש מעטפות.
מה הסיכוי שכל שלושת המכתבים הוכנסו למעטפות הנכונות?
נסו לקבל את התשובה בשתי דרכים:

א. על ידי ספירת כל האפשרויות 3, 2, 1 בסדר שונה;

ב. על ידי בניית עץ אפשרויות וחישוב ההסתברויות בכל הסתעפות.

27. קוף מאולף יושב ליד מכונת כתיבה בעברית ומקיש באקראי על ארבעה מקשי אותיות מבין 27.



א) מה הסיכוי שארבע האותיות הראשונות שיקיש מרכיבות את המילה 'בננה'? (במקרה זה הוא יזכה, כמובן, בבננה).

ב) מה הסיכוי שבניסיון הראשון שלו הוא לא יזכה בבננה?

ג) מה הסיכוי שכשנערוך את אותו הניסוי באלף קופים, לא יזכה אף לא אחד מהם בבננה?

ד) מה הסיכוי שמתוך אלף קופים יזכה לפחות אחד מהם בבננה?

28. הסיכוי לגשם בערב חנוכה הוא $\frac{1}{8}$, בערב פורים $\frac{1}{5}$ ו- $\frac{1}{10}$ בערב פסח.

א) מה הסיכוי שבכל ערבי חג אלה יֵרֵד גשם?

ב) מה הסיכוי שבערב חנוכה ובערב פסח יֵרֵד גשם, ואילו בערב פורים לא?

ג) מה הסיכוי שלפחות באחד מערבי חג אלה לא ירד גשם?

29. במפעל שלושה מתקני התרעה נגד שרפה.
ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל במקרה של שרפה היא 75% ;
ההסתברות שהמתקן השני יפעל במקרה של שרפה היא 82% ;
ההסתברות שהמתקן השלישי יפעל במקרה של שרפה היא 93%.
מה ההסתברות שלפחות שניים מן המתקנים יפעלו בעת השרפה?

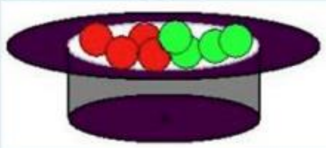
30. שלושה קַלָּעִים יורים במטרה. ההסתברות שהראשון יפגע בה היא 0.65,
שהשני יפגע 0.85, ושהשלישי יפגע 0.7.
א) מה ההסתברות שאף אחד מהם לא יפגע במטרה?
ב) מה ההסתברות שלפחות אחד מהם יפגע?

31. במכללה להנדסה 35% מהסטודנטים נשים.
בוחרים באקראי שלושה מהלומדים במכללה.
א) מה ההסתברות ששני סטודנטים וסטודנטית אחת ייבחרו?
ב) מה ההסתברות שלפחות שתי סטודנטיות ייבחרו?

32. בכל אחד משני שקים שמים 20 כדורים בשלושה צבעים : לבן, שחור וכתום.
א) כמה כדורים מכל צבע אפשר לשים בשק א, כדי שההסתברות להוציא ממנו כדור כתום תהיה $\frac{1}{4}$? (רשמו אפשרות אחת).
ב) כמה כדורים מכל צבע אפשר לשים בשק ב, כדי שההסתברות להוציא ממנו כדור כתום תהיה $\frac{1}{5}$, והסתברות להוציא כדור לבן תהיה $\frac{1}{2}$?
ג) הסתמכו על התשובות שקיבלתם בסעיפים א ו- ב וענו :
בוחרים באקראי שק, מוציאים ממנו באקראי כדור.
מה ההסתברות שהכדור שהוצא כתום?

תרגילים אינטראקטיביים

תרגיל 12.1 נתונים 10 קלפים ממוספרים מ-1 עד 10.
מערבבים את הקלפים על השולחן כשפניהם כלפי מטה
ומוציאים באופן אקראי קלף אחד.
מה ההסתברות שהמספר הרשום על הקלף יהיה:
א. 3 ב. מספר זוגי; ג. כפולה של 3 ;
ד. כפולה של 4 ; ה. מספר המתחלק ב- 5 ; ו. מספר ראשוני.



תרגיל 12.2 בכובע קוסם נמצאים 3 כדורים ירוקים ו- 5 כדורים אדומים.
הקוסם מוציא מהכובע עם עיניים עצומות כדור אחד.
מצאו את ההיסתברות שהקוסם:
א. יוציא כדור אדום; ב. יוציא כדור ירוק;
ג. יוציא כדור כחול; ד. יוציא כדור שאינו כחול.

תרגיל 12.3 להגרלה הנפיקו 1000 כרטיסים. ביניהם 35 כרטיסי הגרלה
בפרס הגדול ועוד 100 כרטיסים להגרלה בפרס ניחומים.
חלי רכשה כרטיס אחד. בהנחה שההגרלה היא הוגנת,
מה ההסתברות שחלי תזכה:
א. בפרס הגדול; ב. בפרס ניחומים; ג. בפרס כלשהו; ד. לא תזכה?

תרגיל 12.5 מטילים 3 מטבעות, שעל צידו אחד של כל מטבע
תמונה ועל צידו השני מספר.
מה ההסתברות שנקבל תמונה לפחות פעם אחת?

תרגיל 12.6 מטילים שתי קוביות.
מה ההסתברות שסכום המספרים בשתי הקוביות
יחד יהיה 6 ?

תרגיל 12.7 מטילים שתי קוביות.
מה ההסתברות שלפחות אחד
מהמספרים שיתקבלו יהיה קטן מ- 5 ?

תרגיל 2.43 תיבה מכילה 5 כדורים אדומים ו- 5 כדורים כחולים.
מוציאים ללא החזרה שני כדורים אחד אחרי שני.
מה ההסתברות שייצאו שני כדורים אדומים?

תרגיל 2.44 תיבה מכילה 7 כדורים אדומים ו-5 כדורים כחולים.

מוציאים ללא החזרה שני כדורים אחד אחרי השני.
מה ההסתברות שלא ייצאו שני כדורים בעלי אותו צבע?

תרגיל 2.45 תיבה מכילה 6 כדורים אדומים ו- 5 כדורים כחולים.

מוציאים ללא החזרה שלושה כדורים אחד אחרי שני.
מה ההסתברות שייצאו שלושה כדורים בעלי אותו צבע?

תרגיל 2.46 אדם משתתף בשני משחקי מזל. במשחק הראשון יש הסתברות של $\frac{1}{5}$ שיצליח ובמשחק השני הסתברות של $\frac{1}{3}$ שיצליח.

מה ההסתברות שפעם אחת הוא יצליח ופעם אחת יכשל?

תרגיל 12*. כדי לקבל תו תקן, המכשיר צריך לעבור בהצלחה על לפחות אחת משתי הבדיקות:
בדיקה א) שהסתברות לעבור אותה בהצלחה היא 0.84;

בדיקה ב) שהסתברות לעבור אותה בהצלחה היא 0.92 .

ידוע שהסתברות לעבור בהצלחה את שתי הבדיקות יחד היא 0.79.

מהי ההסתברות שהמכשיר לא יקבל את התו?

תרגיל 13. ההסתברות שהרכבת תצא בזמן היא 0.92. ההסתברות שהרכבת לא תצא בזמן ולא תגיע בזמן היא 0.05. ההסתברות שהרכבת תצא בזמן אך לא תגיע בזמן היא 0.03.

א) מהי ההסתברות p_1 שהרכבת תצא ותגיע בזמן?

ב) מהי ההסתברות p_2 שהרכבת תגיע בזמן אך לא תצא בזמן?

תרגיל 14. במפעל יש 2 מכונות. ההסתברות שהמכונה הראשונה תתקלקל היא 0.086. ההסתברות שהמכונה השנייה תתקלקל היא 0.071. ההסתברות שלפחות מכונה אחת תתקלקל היא 0.135. מצא את ההסתברויות הבאות:

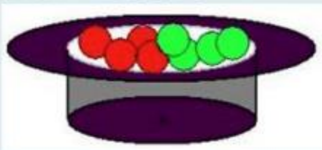
א) ההסתברות p_1 שהמכונה הראשונה תפעל והשנייה תתקלקל;

ב) ההסתברות p_2 ששתי המכונות תפעלנה;

ג) ההסתברות p_3 שלפחות אחת תפעל.

שיעורי בית אינטראקטיביים (עם ציון)

תרגיל 12.1 נתונים 10 קלפים ממוספרים מ-1 עד 10.
מערבבים את הקלפים על השולחן כשפניהם כלפי מטה
ומוציאים באופן אקראי קלף אחד.
מה ההסתברות שהמספר הרשום על הקלף יהיה:
א. 3 ב. מספר זוגי; ג. כפולה של 3;
ד. כפולה של 4; ה. מספר המתחלק ב- 5; ו. מספר ראשוני.



תרגיל 12.2 בכובע קוסם נמצאים 3 כדורים ירוקים ו- 5 כדורים אדומים.
הקוסם מוציא מהכובע עם עיניים עצומות כדור אחד.
מצאו את ההיסתברות שהקוסם:
א. יוציא כדור אדום; ב. יוציא כדור ירוק;
ג. יוציא כדור כחול; ד. יוציא כדור שאינו כחול.

תרגיל 12.3 להגרלה הנפיקו 1000 כרטיסים. ביניהם 35 כרטיסי הגרלה
בפרס הגדול ועוד 100 כרטיסים להגרלה בפרס ניחומים.
חלי רכשה כרטיס אחד. בהנחה שההגרלה היא הוגנת,
מה ההסתברות שחלי תזכה:
א. בפרס הגדול; ב. בפרס ניחומים; ג. בפרס כלשהו; ד. לא תזכה?

תרגיל 12.5 מטילים 3 מטבעות, שעל צידו אחד של כל מטבע
תמונה ועל צידו השני מספר.
מה ההסתברות שנקבל תמונה לפחות פעם אחת?

תרגיל 12.6 מטילים שתי קוביות.
מה ההסתברות שסכום המספרים בשתי הקוביות
יחד יהיה 6 ?

תרגיל 12.7 מטילים שתי קוביות.
מה ההסתברות שלפחות אחד
מהמספרים שיתקבלו יהיה קטן מ- 5 ?

תרגיל 2.43 תיבה מכילה 5 כדורים אדומים ו- 5 כדורים כחולים.
מוציאים ללא החזרה שני כדורים אחד אחרי שני.
מה ההסתברות שייצאו שני כדורים אדומים?

תרגיל 2.44 תיבה מכילה 7 כדורים אדומים ו-5 כדורים כחולים.

מוציאים ללא החזרה שני כדורים אחד אחרי השני.
מה ההסתברות שלא ייצאו שני כדורים בעלי אותו צבע?

תרגיל 2.46 אדם משתתף בשני משחקי מזל. במשחק הראשון יש הסתברות של $\frac{1}{5}$ שיצליח ובמשחק השני הסתברות של $\frac{1}{3}$ שיצליח.

מה ההסתברות שפעם אחת הוא יצליח ופעם אחת יכשל?

תרגיל 2.45 תיבה מכילה 6 כדורים אדומים ו- 5 כדורים כחולים.

מוציאים ללא החזרה שלושה כדורים אחד אחרי שני.
מה ההסתברות שייצאו שלושה כדורים בעלי אותו צבע?

תרגיל *12. כדי לקבל תו תקן, המכשיר צריך לעבור בהצלחה על לפחות אחת משתי הבדיקות:

בדיקה א) שהסתברות לעבור אותה בהצלחה היא 0.84;

בדיקה ב) שהסתברות לעבור אותה בהצלחה היא 0.92 .

ידוע שהסתברות לעבור בהצלחה את שתי הבדיקות יחד היא 0.79.

מהי ההסתברות שהמכשיר לא יקבל את התו?

תרגיל 13. ההסתברות שהרכבת תצא בזמן היא 0.92. ההסתברות שהרכבת לא תצא בזמן ולא תגיע בזמן היא 0.05. ההסתברות שהרכבת תצא בזמן אך לא תגיע בזמן היא 0.03.

א) מהי ההסתברות p_1 שהרכבת תצא ותגיע בזמן?

ב) מהי ההסתברות p_2 שהרכבת תגיע בזמן אך לא תצא בזמן?

תרגיל 14. במפעל יש 2 מכונות. ההסתברות שהמכונה הראשונה תתקלקל היא 0.086. ההסתברות שהמכונה השנייה תתקלקל היא 0.071. ההסתברות שלפחות מכונה אחת תתקלקל היא 0.135. מצא את ההסתברויות הבאות:

א) ההסתברות p_1 שהמכונה הראשונה תפעל והשנייה תתקלקל;

ב) ההסתברות p_2 ששתי המכונות תפעלנה;

ג) ההסתברות p_3 שלפחות אחת תפעל.

3.6 הסתברות מותנית

דוגמה 1 מקופסה שבה 2 כדורים לבנים ו- 10 שחורים, מוציאים שני כדורים בזה אחר זה.

נסמן את המאורעות האפשריים: A – "כדור ראשון לבן", B – "כדור שני לבן".

הסתברות המאורע הראשון היא: $P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

מהי הסתברות המאורע השני?

אילו התרחש המאורע הראשון, אזי בין 11 הכדורים הנותרים יש רק 1 לבן,
לכן ההסתברות שהכדור השני יהיה לבן היא $\frac{1}{11}$.

אילו המאורע A לא התרחש, ההסתברות שהכדור השני יהיה לבן היא $\frac{2}{11}$.

כלומר, לפנינו מצב שבו סיכוי ההתרחשות של אירוע B תלוי בשאלה האם האירוע הראשון A התרחש או לאו.

במקרה זה אומרים שמאורע B **תלוי** במאורע A, והסתברות מאורע B היא **הסתברות מותנית**.

נסמן ב- P(B/A) את ההסתברות מאורע B <u>למקרה שמאורע A התרחש</u>

ונרשום:

$$P(B/A) = \frac{1}{11}$$

דוגמה 2 מה הסתברות ההוצאה של כדור שחור מהקופסה שבה 2 כדורים לבנים ו- 10 כדורים שחורים?

נסמן ב- A את המאורע של הוצאת כדור לבן,

וב- B - הוצאת כדור שחור.

הסתברות ההוצאה של כדור שחור ראשון היא $P(B) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$,

ואילו הסתברות הוצאת כדור שחור לאחר הוצאת כדור ראשון תלויה בכך, האם בשאלה, האם הראשון לבן או שחור.

אם הראשון לבן (המאורע A התרחש), נרשום:

$$P(B/A) = \frac{10}{11}$$

(נותרו 10 שחורים מסך 11 הכדורים).

אם הראשון שחור, אפשר לשאול: מה ההסתברות שהשני לבן?

מקרה זה מתואר בהסתברות מותנית $P(A/B)$.

נחשב אותה: $P(A/B) = \frac{2}{11}$

(נותרו 2 לבנים מסך 11 הכדורים).

ערכה של $P(A/B)$ בדרך כלל שונה משל $P(B/A)$.

מה ההסתברות שהכדור הראשון לבן?

הסתברות זו אינה תלויה בתוצאה של הניסיון השני:

$$P(A) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

האם הסתברות ההוצאה של כדור אחד לבן ואחד שחור תלויה בסדר הוצאתם?

נבדוק זאת:

א. ראשון – לבן, שני – שחור.

אירוע זה הוא חיתוך ("גם וגם") של שני המאורעות A ו- B: $A \cap B$.

הסתברות אירוע זה שווה למכפלת ההסתברויות של כל אחד:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{11} = \frac{10}{66}$$

ב. ראשון – שחור, שני – לבן.

ההסתברות של חיתוך המאורעות היא:

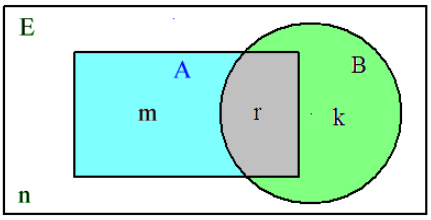
$$P(B \cap A) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{11} = \frac{10}{66}$$

קיבלנו תוצאה זהה (ההסתברות להוצאת זוג לבן-שחור אינה תלויה בסדר הוצאתם).

באופן כללי: מקופסה שבה m כדורים לבנים ו- k שחורים, מוציאים בזה אחר זה שני כדורים.

נסמן את האירועים האפשריים: A – "הוצאת כדור לבן", B – "הוצאת כדור שחור".

נתאר את כל המאורעות האפשריים באופן גרפי:



E - קבוצת כל המאורעות;

A – קבוצת כל המאורעות A,

כוללת m מאורעות של הוצאת כדור לבן;

B – קבוצת כל מאורעות B, כוללת k מאורעות

של הוצאת כדור שחור;

חיתוך קבוצות A ו- B (הוצאת כדור לבן ואחריו – כדור שחור) היא הקבוצה $A\cap B$,

שכוללת r מאורעות ($r \le m$ וגם $r \le k$).

הסתברות המאורע הרצוי שווה ליחס כל המאורעות השייכים לקבוצה $A\cap B$ (כלומר

r) למספר m של כל המאורעות A (הוצאת כדור לבן תחילה):

$$P(B/A) = \frac{r}{m} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{m}{n}} = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

באופן דומה נקבל את ההסתברות המותנית של מאורע A בתנאי שהמאורע B התרחש:

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

מהנוסחאות הנ"ל נמצא:

$$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A/B),$$

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A)$$

או כנוסחה אחת:

$$P(A\cap B) = P(B)\cdot P(A/B) = P(A)\cdot P(B/A) \qquad (\star)$$

נוסחה זו מהווה את **כלל מכפלת ההסתברויות**:

הסתברות החיתוך של שני מאורעות שווה למכפלת ההסתברות של מאורע אחד בהסתברות מותנית של מאורע שני, בתנאי שהראשון התרחש.

הערה:

הנוסחאות הנ"ל נכונות רק אם שני האירועים A ו- B אינם זרים, כלומר הם יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת.

דוגמה 3

בקופסה a כדורים לבנים ו- b שחורים. מוציאים באקראי שני כדורים זה אחר זה. מה ההסתברות ששני הכדורים לבנים?

◄ נסמן את האירועים:

A – כדור ראשון לבן;

B – כדור שני לבן.

עלינו לחשב את $P(A\cap B)$.

ההסתברות שהכדור הראשון לבן היא: $P(A) = \frac{a}{a+b}$

ההסתברות המותנית של הוצאת כדור שני לבן בתנאי שהראשון לבן היא:

$$P(B/A) = \frac{a-1}{a+b-1}$$

על-פי הנוסחה (★) להסתברות התרחשותם של שני האירועים יחד, מקבלים:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A) = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}$$

למשל: בקופסה 2 כדורים לבנים $(a = 2)$ ו- 10 שחורים $(b = 10)$.

מה ההסתברות להוציא שני כדולים לבנים זה אחר זה?

◄ ההסתברות להוציא כדור ראשון לבן היא $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$;

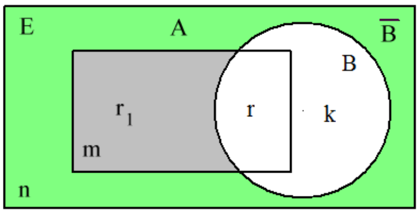
כעת נותרו 11 כדורים, 1 מהם לבן.

הסיכוי להוציאו: $\frac{1}{11}$.

ההסתברות להתרחשות שני האירועים יחד (חיתוך המאורעות) היא מכפלת ההסתברויות: $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{11} = \frac{1}{66}$.

נוודא אם התשובה נכונה באמצעות הנוסחה הכללית:

$$P(A\cap B) = \frac{2\cdot(2-1)}{(2+10)\cdot(2+10-1)} = \frac{2}{12\cdot 11} = \frac{1}{66}$$



נחשב <u>הסתברות המאורע המשלים ל- B</u> בתנאי שהאירוע A התרחש, כלומר, $P(\overline{B}/A)$.

בשרטוט רואים שמספר המאורעות הרצויים במקרה זה הוא: $r_1 = m - r$.

לכן הסתברות המאורע הזה:

$$P(\overline{B}/A) = \frac{m-r}{m} = 1 - \frac{r}{m} = 1 - P(B/A)$$

כלומר ההסתברות המותנית של המאורע <u>המשלים</u> ל- B בתנאי שמאורע A התרחש הוא משלים (ל- 1) להסתברות מותנית של B בתנאי שהתרחש A.

דוגמה 4

בקופסה 2 כדורים לבנים ו- 10 שחורים. מוציאים באקראי שני כדורים זה אחר זה.
מה ההסתברות שאחרי שמוציאים כדור ראשון לבן, השני יהיה שחור?

◄ מהדוגמה הקודמת ראינו שהסתברות להוצאת כדור שני לבן היא $\frac{1}{11}$.

המאורע המשלים להוצאת כדור לבן הוא אי הוצאת כדור לבן, כלומר הוצאת כדור שחור. לכן ההסתברות הנדרשת, הוצאת כדור שחור לאחר הוצאת כדור ראשון לבן, היא:

$$P(\overline{B}/A) = 1 - P(B/A) = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$$

דוגמה 5

מחפיסה של 32 קלפים מוציאים שני קלפים זה אחר זה.
מצאו את ההסתברות שהוציאו:

א. שני נסיכים;

ב. שני קלפים של לב;

ג. נסיך ומלכה.

◄ נסמן את האירועים:

A – קלף ראשון - נסיך;

B – קלף שני – נסיך;

C - קלף ראשון - לב;

D - קלף שני - לב;

E – קלף שני – מלכה.

עלינו למצוא: $P(A\cap B)$, $P(C\cap D)$ ו- $P(A\cap E)$.

א) על פי הנוסחה (★) רושמים:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B/A),$$

$$P(C\cap D) = P(C)\cdot P(D/C),$$

$$P(A\cap E) = P(A)\cdot P(E/A).$$

מציבים נתונים: $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$ (בין סך 32 הקלפים יש 4 נסיכים);

לכן: $P(B/A) = \frac{3}{31}$ (בין 31 קלפים שנשארו, יש 3 נסיכים).

$$P(A\cap B) = \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{31} = \frac{3}{248}$$

ב) $P(C) = \frac{1}{4}$ (יש 4 צורות, רצויה אחת – לב)

$P(D/C) = \frac{7}{31}$ (יש 8 קלפים מכל סוג, הוציאו אחד).

לכן:
$$P(C\cap D) = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{31} = \frac{7}{124}$$

ג) $P(A) = \frac{1}{8}$ (בין סך 32 הקלפים יש 4 נסיכים);

$P(E/A) = \frac{4}{31}$ (יש 4 מלכות מבין 31 קלפים שנשארו).

לכן:
$$P(E\cap A) = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{31} = \frac{1}{62}$$

3.7 הסתברות של מאורעות בלתי תלויים

מאורע B נקרא **בלתי תלוי** במאורע A אם הסתברות התרחשותו אינה תלויה בהתרחשותו של מאורע A:

$$P(B/A) = P(B) = P(B/\overline{A})$$

כלומר מאורע B מתרחש באותה הסתברות, אם מאורע A מתרחש ואם לאו.

במקרה זה מהנוסחה (★) להסתברות התרחשותם של שני האירועים יחד, נקבל:

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B) \qquad (★★)$$

כלומר: **הסתברות התרחשותם של שני אירועים בלתי תלויים שווה למכפלת ההסתברויות של כל אחד מהם.**

אפשר להשתמש בנוסחה (★★) כדי לבדוק אם האירועים בלתי תלויים או לאו.

דוגמה: מטילים קובייה. נוכיח כי שני האירועים: A – "הופעת מספר זוגי" ו- B – "המספר שהופיע מתחלק ב- 3" בלתי תלויים.

הוכחה.
$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

משמעות המאורע $A\cap B$ – המספר שהופיע הוא גם זוגי וגם מתחלק ב- 3, כלומר 6.

הסתברות הופעתו היא $\frac{1}{6}$.

כיוון ש- $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, מסיקים כי שני האירועים A ו- B בלתי תלויים.

אם שני המאורעות A ו- B בלתי תלויים, גם זוגות המאורעות A ו- $\overline{B}$, $\overline{A}$ ו- B וגם $\overline{A}$ ו- $\overline{B}$ בלתי תלויים.

הוכחה

לפי התכונה של הסתברות מותנית: $P(\overline{A}\cap B) = P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A})$

כיוון שמאורע B בלתי תלוי ב- A, הוא מתרחש בכל מקרה:

לפני מאורע A או לאו. לכן: $P(B) = P(B/A) = P(B/\overline{A})$

הסתברות החיתוך של B והמשלים ל- A היא:

$$P(\overline{A}\cap B) = P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A}) = P(\overline{A})\cdot P(B)$$

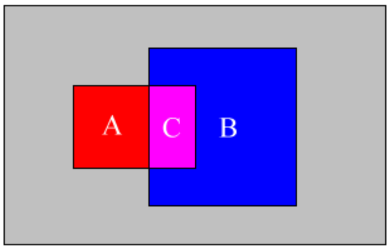
מכאן מסיקים, כי B – ו- $\overline{A}$ גם הם בלתי תלויים.

3.8 הסתברות של איחוד מאורעות

ישנם מאורעות היכולים להתרחש כל אחד לחוד וגם בעת ובעונה אחת.

לדוגמה, אפשר להרכיב צבע כלשהו מערבוב של שלושה צבעים בסיסיים: אדום, כחול וירוק ביחסים שונים, למשל ערבוב של אדום וכחול יוצר כסגול.

בציור משמאל השתמשו בכמה צבעים ביחס הזה: 20% אדום, 40% כחול ו- 40% - צבעים בסיסיים אחרים.



בציור הצבע הסגול מכסה 10% מהשטח.

מה הסיכוי שקטע קטן של הציור שנבחר באקראי יכיל אדום או כחול (או שניהם יחד)?

נסמן מאורעות: A – הופעת צבע אדום,

B – הופעת צבע כחול.

הצבע הסגול C הוא איחוד המאורעות A ו- B: $C = A\cap B$.

עלינו לחשב את הסתברות המאורע $A\cup B$ (A או B).

כיוון שהסתברות ההופעה של צבע מסוים הוא ביחס ישר לשטח המכוסה באותו צבע, אפשר לראות, כי שטח הציור שבו מופיע אדום או סגול (או שניהם יחד) שווה **לסכום השטחים המכוסים באדום ובכחול פחות השטח הסגול**:

$$20\% + 40\% - 10\% = 50\%$$

או במקרה הכללי: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

נוסחה זאת נקראת **נוסחת ההסתברות של איחוד מאורעות**.

כאשר A ו- B הם מאורעות זרים (שאינם יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת), נקבל:

$$P(A \cap B) = 0, \quad \underline{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

3.9 נוסחת ההסתברות השלמה

נניח שצריך להעריך הסתברות של מאורע A שיכול להתרחש יחד עם אחד משני המאורעות הזרים B_1 ו- B_2 ("או B_1 או B_2"), כאשר ידועות הסתברויות ההתרחשות של A יחד עם כל אחד מהם: $P(A/B_1)$ ו- $P(A/B_2)$.

לדוגמה: מאורע A – הוצאת כדור לבן בניסיון ראשון מתוך אחת משתי הקופסאות B_1 או B_2, שבכל אחת מהן מספר שונה של כדורים לבנים ושחורים.

אם ידוע שבקופסה B_1 שני כדורים לבנים ושלושה שחורים, הסיכוי להוציא ממנה כדור לבן הוא $\frac{2}{5}$. אולם הסיכוי לבחור קופסה זו הוא $\frac{1}{2}$ (אם הקופסאות זהות), לכן

$$P(A/B_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

ואם בקופסה B_2 כדור אחד לבן וארבעה שחורים , אזי $P(A/B_2) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$.

כיוון ששני המאורעות – הוצאת כדור לבן מקופסה B_1 או הוצאתו מקופסה B_2 – הם מאורעות זרים (או מ- B_1, או מ- B_2), לכן על פי המשפט של חיבור הסתברויות של מאורעות זרים, נקבל: $P(A) = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$

אם נניח שהקופסאות שונה זו מזו במראה: קופסה B_1 - כהה ופשוטה, ואילו קופסה B_2 – נוצצת ומושכת, סביר להניח שילד, שעליו הטילו את המשימה, יבחר בהסתברות גבוהה בקופסה השנייה הנוצצת .

נסמן ב- $P(B_1)$ ו- $P(B_2)$ את ההסתברויות הבחירה של הקופסאות על ידי הילד.

נניח כי- $P(B_1) = 0.3$ ו- $P(B_2) = 0.7$.

מה ההסתברות של הוצאת כדור לבן בנסיבות אלה?

כיוון שהסתברויות ההתרחשות של A יחד עם B_1 ו- B_2 שוות בהתאמה ל-

$$P(A\cap B_1) = P(A/B_1)\cdot P(B_1),\ P(A\cap B_2) = P(A/B_2)\cdot P(B_2)$$

והמאורעות $A\cap B_1$ ו- $A\cap B_2$ זרים, מסיקים כי

ההסתברות השלמה של A שווה לסכום ההסתברויות:

$$P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) \qquad (\star\star\star)$$

במקרה הנדון נקבל כי הסתברות ההוצאה של כדור לבן היא:

$$P(A) = \frac{2}{5}\cdot 0.3 + \frac{1}{5}\cdot 0.7 = 0.26$$

כלומר: הסיכוי להצלחה נמוך יותר!

כיוון שמאורע כלשהו B והמאורע המשלים $\overline{B}$ מהווים זוג מאורעות זרים

(ואין מאורעות אחרים המתאימים להתרחשות של A), אפשר לרשום עבור הסתברות

המאורע המורכב A שיכול להתרחש יחד עם B ו- $\overline{B}$:

$$P(A) = P(A/B)\cdot P(B) + P(A/\overline{B})\cdot P(\overline{B})$$

נוסחה זאת היא נוסחת ההסתברות השלמה עבור מאורעות משלימים.

דוגמה 1

בקופסה 5 כדורים לבנים ו- 4 שחורים.

מוציאים מהקופסה באקראי כדור אחד, ולארח מכן כדור נוסף.

מה ההסתברות שבמקרה השני יוציאו כדור לבן (הכדור הראשון לא הוחזר לקופסה)?

◄ נסמן מאורעות: A – הוצאת כדור שחור בפעם הראשונה;

B - הוצאת כדור לבן בפעם השנייה.

עלינו למצוא את P(B).

נגדיר את מאורע $\overline{A}$ המשלים ל- A: הוצאת כדור לבן בפעם הראשונה.

שני המאורעות A ו- $\overline{A}$ מהווים מערכת שלמה של מאורעות המתאימים, לכן אפשר

להשתמש בנוסחה להסתברות שלמה:

$$P(A) = \frac{4}{9},\ P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{5}{9},\ P(B/A) = \frac{5}{8},\ P(B/\overline{A}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = P(A)\cdot P(B/A) + P(\overline{A})\cdot P(B/\overline{A}) = \frac{4}{9}\cdot\frac{5}{8} + \frac{5}{9}\cdot\frac{4}{8} = \frac{5}{9}$$

התוצאה: הסתברות ההוצאה של כדור לבן בניסיון שני שווה לזו שבניסיון ראשון!

3.10 נוסחת בייס

הסתברות של מאורע מסוים A בחיי היום-יום תלויה במאורעות אחרים, לדוגמה B_1 ו- B_2, שכל אחד מהם יכול להתרחש בהסתברות מסוימת, שלא תמיד ידועה בוודאות.
נניח שמאורע A יכול להתרחש יחד עם B_1 בהסתברות מותנית $P(A/B_1)$ **או** יחד עם B_2 בהסתברות מותנית $P(A/B_2)$.
בהנחה שאין מאורעות אחרים, מלבד B_1 ו- B_2, אשר "מאפשרים" למאורע להתרחש, הסתברות מאורע A תהיה:

$$P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2)$$

נוסחה זו מאפשר לחשב את הסתברות המאורע בהנחה שהסתברויות ההתרחשות של ה"מאורעות המלווים" את מאורע A ידועות **במדויק**.
במציאות אנחנו יודעים את הסתברות ההתרחשות של מאורע A (מתוך ניסוי), אולם איננו יודעים, איזה "מאורע מלווה", B_1 או- B_2 גרם לה.
נוסחת בייס (על שם מתמטיקאי אנגלי מהמאה ה- 18) מאפשרת לחשב מחדש ובדיוק רב יותר את הסתברויות ההתרחשות של B_1 או- B_2 **לאחר שהתרחש מאורע A**:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)}, \quad P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)}$$

פירוש הנוסחאות:

$P(B_1/A)$ - הסתברות ההתרחשות של B_1 **לאחר** הניסוי (שהתוצאה שלו A);

$P(B_2/A)$ - הסתברות ההתרחשות של B_2 **לאחר** הניסוי (שהתוצאה שלו A);

$P(B_1)$ ו- $P(B_2)$ – ההסתברויות המוערכות של B_1 ו- B_2 **לפני** הניסוי;

$P(A/ B_1)$ – ההסתברות של A כאשר הוא מתרחש רק בליווי של B_1;

$P(A/ B_2)$ – ההסתברות של A כאשר הוא מתרחש רק בליווי של B_2;

$P(A)$ – ההסתברות של A בסביבה של B_1 ו- B_2 (כאשר הוא יכול להתרחש בליווי של כל אחד מהם).

דוגמה 1

למחסן הגיעו משלוחים של מוצרים משתי חברות:

4000 יחידות מחברה א׳ ו- 6000 מחברה ב׳.

ממוצע המוצרים הפגומים במשלוח א׳ הוא 20%, במשלוח ב׳ – 10%.

מוצר שהוצא באקראי מהמחסן היה תקין.

א) מה הסיכוי שהוא ממשלוח א׳?

ב) מה הסיכוי שהוא ממשלוח ב׳?

◄ נגדיר שני מאורעות:

B_1 – המוצר שהוצא באקראי מהמחסן ממשלוח א׳;

B_2 – המוצר שהוצא באקראי מהמחסן ממשלוח ב׳.

בסך הכול במחסן $4,000 + 6,000 = 10,000$ מוצרים,

לכן:

$$P(B_1) = \frac{4000}{10000} = 0.4, \; P(B_2) = \frac{6000}{10000} = 0.6$$

נסמן את המאורע הרצוי – הוצאת מוצר <u>תקני</u> - A.

במשלוח א׳ $100\% - 20\% = 80\%$ מוצרים תקניים, לכן $P(A/B_1) = 0.8$ היא הסתברות הוצאת מוצר תקני <u>בתנאי שנלקח ממשלוח א׳</u>.

בדומה לכך $P(A/B_2) = 0.9$ היא הסתברות הוצאת מוצר תקני <u>בתנאי שנלקח ממשלוח ב׳</u>.

נחשב את **ההסברות השלמה** של הוצאת מוצר תקני:

$$P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) = 0.8\cdot 0.4 + 0.9\cdot 0.6 = 0.86$$

כעת נחזור לשאלה: ״מה הסיכוי שהוא מהמשלוח א׳״?

כלומר, <u>נקבע</u> שהמאורע A כבר התרחש.

על פי נוסחאות בייס, הסתברות המקרה שהמוצר שייך למשלוח א׳ היא:

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1)\cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0.4\cdot 0.8}{0.86} = \frac{16}{43} \approx 0.37$$

והסתברות המקרה שהמוצר שייך למשלוח ב׳ היא:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2)\cdot P(A/B_2)}{P(A)} = \frac{0.6\cdot 0.9}{0.86} = \frac{27}{43} \approx 0.63$$

שימו לב: ערכי ההסתברויות של התרחשות המאורעות B_1 ו- B_2 **עודכנו** לאחר הניסוי:

B_1 – מ- 0.4 ל- 0.37, B_2 – מ- 0.6 ל- 0.63. שינוי זה יכול לעזור לבעל מחסן להעריך באופן מדויק יותר את כדאיות הרכישה מחברה א׳ או מחברה ב׳.

תרגילים

33. הטילו קובייה. מצאו את ההסתברות המותנית להופעת מספר ראשוני, בתנאי שהוא אי זוגי.

34. בקופסה 10 כדורים לבנים, ו- 8 אדומים.
מוציאים באקראי שני כדורים.
מה ההסתברות שהם בצבע שונה?

35. בקופסה 7 כדורים לבנים, ו- 9 שחורים.
מוציאים באקראי כדור אחד, מסתכלים עליו ומחזירים לקופסה.
לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. מה ההסתברות ששניהם לבנים?

36. שני קלעים יורים במטרה, כל אחד יורה כדור אחד.
הסתברות הפגיעה של קלע ראשון במטרה היא 0.7, ושל השני 0.6.
מצאו את הסתברות הפגיעה במטרה של לפחות כדור אחד.

37. לפועל יש 16 חלקים המיוצרים בבית מלאכה א׳ ו- 4 חלקים המיוצרים בבית מלאכה ב׳. הוא הוציא באקראי שני חלקים.
מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מיוצר בבית מלאכה א׳?

38. בנבחרת ספורטאים 20 שחיינים, 6 רוכבי אופניים ו- 4 טניסאים.
הסתברות הזכייה של כל שחיין במדליה היא 0.9, של רוכב אופניים – 0.8 ושל טניסאי – 0.75.
מה ההסתברות שספורטאי הנבחרת שייבחר באקראי יזכה במדליה?

39. ההסתברות של קופץ לגובה לשפר שיא אישי בקפיצה אחת היא p.
מה ההסתברות לשפר את שיאו האישי בשתי קפיצות?

40. בקופסה 12 כדורים אדומים, 8 ירוקים ו- 10 כחולים.
מוציאים באקראי כדור אחד.
מה ההסתברות שהוא אדום, אם ידוע שהוא לא כחול?

41. בקופסה 12 כדורים אדומים, 8 ירוקים ו- 10 כחולים.
מוציאים באקראי שני כדורים.
א) מה ההסתברות שהם ירוקים, אם ידוע שלא הוצא כדור כחול?

ב) מה ההסתברות שהם בצבע שונה, אם ידוע שאין ביניהם כדור כחול?

תשובות

2. א) $\frac{2}{5}$ ב) $\frac{3}{5}$ ג) 0 ד) 1

3. א) $\frac{2}{9}$ ב) $\frac{1}{3}$ ג) $\frac{4}{9}$ ד) $\frac{7}{9}$ ה) $\frac{2}{3}$ ו) $\frac{5}{9}$

4. א) $\frac{1}{10}$ ב) $\frac{1}{2}$ ג) $\frac{3}{10}$ ד) $\frac{1}{5}$ ה) $\frac{1}{5}$ ו) $\frac{2}{5}$

5. א) $\frac{1}{10}$ ב) $\frac{1}{9}$

6. א) $\frac{1}{50}$ ב) $\frac{1}{10}$ ג) $\frac{3}{25}$ ד) $\frac{22}{25}$

7. $\frac{22}{25}$

8. א) $\frac{8}{27}$ ב) $\frac{4}{9}$ ג) $\frac{2}{9}$ ד) $\frac{1}{27}$

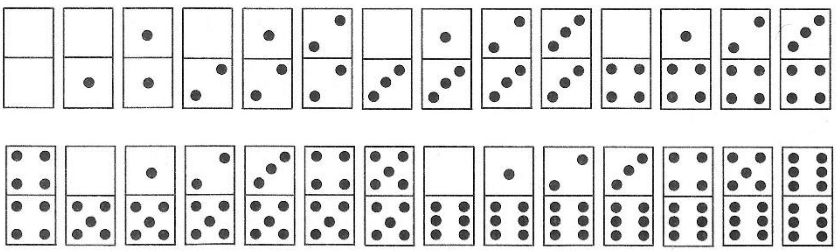
11. א) 0.97 ב) $\frac{119}{121}$

12. 33.3%

13. $\frac{5}{6}$

14. **הדרכה**: בחנו את כל המערכת של אבני הדומינו ומצאו, כמה "דַבֶּלים" יש ביניהן.

תשובה: $\frac{3}{4}$



15. **הדרכה**: חַשבו תחילה את ההסתברות של מאורע משלים.

א) $\frac{3}{4}$ ב) $\frac{2}{3}$ ג) $\frac{7}{12}$

16. אף פגיעה.

17. א) $\frac{1}{36}$ ב) $\frac{1}{36}$ ג) $\frac{1}{18}$

18. א) $\frac{1}{18}$ ב) $\frac{1}{36}$ ג) $\frac{1}{36}$

19. א) $\frac{1}{16}$ ב) $\frac{9}{16}$

ג) **הדרכה**: יש שתי אפשרויות: הופעה בפעם הראשונה ואי-הופעה בפעם שנייה, ולהפך. **תשובה**: $\frac{3}{8}$

ד) **הדרכה**: חַשבו מה ההסתברות שהאות לא תופיע ולו פעם אחת?

תשובה: $\frac{7}{16}$

21. **הדרכה**: תחילה מְצאו מה הצירופים האפשריים לקיום התנאי, אַחר-כך חַשבו כמה פעמים יכולים להופיע צירופים אלה ב- 3 הטלות. **תשובה**: $\frac{1}{36}$

22. לא ישפיע.

23. 0.64

24. א) 1.6 ב) 7.12

25. ב) **הדרכה**: בדקו האם כל הצירופים הם שווי-סיכוי? למשל, האם הופעת הצירוף (3, 3, 4) היא בעלת אותו סיכוי כמו (3, 3, 3)? **תשובה**: לא.

26. $\frac{1}{6}$

27. א) $\frac{1}{531441}$ ב) $\frac{531440}{531441}$ ג) 0.99812 ד) 0.00188

28. א) **הדרכה**: חַפשו (בעמוד 235) את המושג **איחוד מאורעות בלתי-תלויים.**

תשובה: $\frac{1}{400}$

ב) **הדרכה**: חַשבו מה המאורעות המתוארים בסעיף זה? האם הם תלויים או בלתי תלויים? מהו מאורע משלים למאורע "ירד גשם"? **תשובה**: 1%.

ג) **הדרכה**: חַשבו מה המאורע **המשלים** למאורע "לפחות פעם אחת ירד גשם"? הלוא זה "גשם לא ירד אף פעם"? **תשובה**: $\frac{399}{400}$.

29. **הדרכה**: סמנו את המאורעות ב- A, B, C (הפעלת המתקנים), והמאורעות המשלימים (אי-הפעלה) ב- $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$. המאורע "לפחות שניים יפעלו" הוא איחוד

המאורעות האלה: כל שלושת המתקנים יפעלו יחד, **או** ששניים יפעלו והשלישי לא יפעל (שלוש אפשרויות כאלה). ההסתברות שווה ל-

$P = P(A,B,C) + P(\overline{A},B,C) + P(A,\overline{B},C) + P(A,B,\overline{C})$ **תשובה**: 0.931

30. א) **רמז**: מה ההסתברויות שהקלעים לא יפגעו במטרה? **תשובה**: 0.016.

ב) **רמז**: מה המאורע המשלים למתואר? **תשובה**: 0.984.

31. א) **הדרכה**: מנו את כל הצירופים האפשריים של השלושה (לדוגמה: גבר-אישה-גבר). **תשובה**: 0.444.

ב) **הדרכה**: מנו את כל הצירופים האפשריים של השלושה (לדוגמה: אישה-אישה-אישה). **תשובה**: 0.282.

32. א) **הדרכה**: היעזרו בהגדרת ההסתברות, וחַשבו את מספר הכדורים הכתומים; יתר הכדורים יהיו לבנים ושחורים.

תשובה: 5 כתומים, 15 לבנים ושחורים יחד, למשל: 7 לבנים ו- 8 שחורים.

ב) 4 כתומים, 10 לבנים ו- 6 שחורים.

ג) **הדרכה**: המאורע המתואר הוא מאורע מורכב דו-שלבי. בנו את עץ האפשרויות ובחרו בו את הענפים הרצויים.

תשובה: 0.225.

33. $\frac{2}{3}$

34. $\frac{80}{153}$

35. $\frac{49}{256}$

36. 0.88

37. $\frac{92}{95}$

38. 0.86 39. $2p - p^2$

40. 0.6 41. א) $\frac{14}{145}$ ב) $\frac{22}{145}$