אינדוקציה מתמטית

כל הטענות אפשר לחלק לטענות כלליות ופרטיות. לדוגמה, הטענה "אלכסונים בכל מקבילית נפגשים בנקודת האמצע של כל אלכסון" היא טענה כללית, כיוון שהיא מתייחסת לכל סוגי המקביליות, ואילו הטענה "במקבילית ABCD האלכסונים נפגשים בנקודת האמצע של כל האלכסון" היא טענה פרטית, כיוון שהיא מתייחסת למקבילית מסוימת.

בהתבסס בטענות פרטיות מגיעים מסקנות (השערות) על נכונות של טענה איזושהי כללית. לעיתים השערה כזו מתגלה כנכונה, לפעמים שגויה.

המעבר מטענה פרטית לכללית מכונה אינדוקציה (מהמילה הלועזית *induction* – הכוונה). לדוגמה, המתמטיקאי הצרפתי שחי במאה XVII פייר פֶּרְמַאַ בדק ומצא כי המספרים

$$2^{2^0}+1=3,\ 2^{2^1}+1=5,\ 2^{2^2}+1=17,\ 2^{2^3}+1=257,\ \ 2^{2^4}+1=65537$$

הם מספרים ראשוניים; לפי אינדוקציה הוא העלה את ההשערה כי עבור כל מספרים טבעיים $n = 1, 2, \ldots$, המספרים מהצורה $2^{2^n}+1$ הם מספרים ראשוניים.

אולם, הסתבר כי ההשערה אינה נכונה, כיוון שבמאה XVIII לאונרד אוילֶר מצא כי המספר $2^{2^5}+1 = 4{,}294{,}967{,}297 = 641 \cdot 6{,}700{,}417$ אינו ראשוני.

כפי הנראה, אינדוקציה אינה מהווה שיטה להוכחה, אלא עוזרת לנסח טענה בצורה של השערה, אותה יש להוכיח.

השערות הנדרשות לבדיקה מנוסחות כטענות בעלות משתנה שערכיו - כל המספרים הטבעיים. בדיקה עקבית של טענה כזאת עבור כל מספר טבעי n החל מ- 1 היא, כמובן, בלתי אפשרית, אם מתכוונים לכל המספרים הטבעיים. אולם הרעיון של מעבר ממספר טבעי n למספר הבא אחריו $n + 1$ ניתן לביצוע והוא מהווה את הבסיס לאחת השיטות החשובות של הוכחה במתמטיקה המכונה **אינדוקציה מתמטית**.

העיקרון של אינדוקציה מתמטית מבוסס על מסקנה לוגית הטוענת כי הטענה $P(n)$ נכונה עבור כל מספר טבעי n אם מתקיימים שני תנאים:

א. היא נכונה עבור $n = 1$;

ב.   מההנחה כי הטענה מתקיימת עבור מספר טבעי איזשהו $n = k$ נובע כי היא נכונה גם עבור המספר העוקב $n = k+1$.

ברם, מהעובדה כי הטענה מתקיימת עבור $n = 1$ נובע (מהתנאי השני) כי היא מתקיימת גם עבור $n = 1 + 1 = 2$. אולם אז היא תתקיים גם עבור $n = 2 + 1 = 3$, $n = 3 + 1 = 4$ וכו'. ברור, כי לבסוף נגיע לכל מספר טבעי שהוא.

משתמשים בשיטה זו למציאת נוסחאות סכום של סדרת איברים שמספרם תלוי ב- n, להוכחת זהויות ואי-שוויונות בהן אגף אחד או שניהם תלויים ב- n, למציאת תנאיי התחלקות של מספרים טבעיים ועוד.

דוגמה 1

נתונה סדרה של n מספרים טבעיים. מצאו את הנוסחה לסכום של n איבריה הראשונים של הסדרה: $S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

פתרון

נתבונן ב- $S(1)$, $S(2)$, $S(3)$, $S(4)$:

$$S(1) = 1,$$

$$S(2) = 1 + 2 = 3,$$

$$S(3) = 1 + 2 + 3 = 6,$$

$$S(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$$

רואים כי את המספרים שהתקבלו אפשר לרשום בצורה:

$$1 = \frac{1\cdot 2}{2},\ 3 = \frac{2\cdot 3}{2},\ 6 = \frac{3\cdot 4}{2},\ 10 = \frac{4\cdot 5}{2}$$

מכאן אפשר <u>להניח</u> כי מתקיים:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \qquad (1)$$

כעת נשתמש בעיקרון של אינדוקציה מתמטית כדי להוכיח את הנוסחה (1).

שלב א (שלב הבסיס):

הנוסחה מתקיימת עבור $n = 1$, כיוון ש- $S(1) = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = 1$

שלב ב (שלב הצעד):

נניח כי הנוסחה מתקיימת עבור $n = k > 1$, כלומר מתקיים השוויון

$$S(k) = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$$

נבדוק אם הנוסחה מתקיימת גם עבור המספר העוקב $n = k+1$.

נרשום:

$$S(k+1) = 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = S(k) + (k+1) =$$
$$= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k+1) = (k+1)\cdot\left(\frac{k}{2} + 1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} =$$
$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}.$$

כלומר, מקיום הנוסחה (1) עבור $n = k$ נובע את קיומה עבור $n = k + 1$.

עפ"י העיקרון של אינדוקציה מתמטית מכאן נובע כי הנוסחה מתקיימת עבור כל הערכים הטבעיים של n.

דוגמה 2

מצאו סכום של n מספרים אי-זוגיים ראשונים.

פתרון

נסמן את הסכום הנדרש ב- S_n, כלומר:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

אומנם במתמטיקה קיימת נוסחה לפתרון בעיה מסוג זה (הרי הסדרה היא סדרה חשבונית), אולם נראה את דרך הפתרון ללא שימוש בנוסחה מוכנה.

לצורך כך יש לגבש את ההשערה, כלומר לנחש את התשובה.

נחשב את הערכים של S_n עבור n שונים, עד שנצבור מספיק נתונים לבניית ההשערה המתאימה. לאחר מכן נבדוק את ההשערה באמצעות אינדוקציה מתמטית.

נקבל:

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 4, \quad S_3 = 9,$$
$$S_4 = 16, \quad S_5 = 25, \quad S_6 = 36.$$

כעת הכל תלוי ביכולתו של התלמיד לגלות את החוקיות עפ"י כמה נתונים.

במקרה זה קל לראות כי

$$S_1 = 1^2, S_2 = 2^2, S_3 = 3^2, S_4 = 4^2, \ S_5 = 5^2, \ S_6 = 6^2$$

אפשר לנחש שבמקרה כללי יתקיים: $S_n = n^2$

נוכיח כי ההשערה נכונה.

שלב הבסיס $S_1 = 1^2 = 1$ ✓

שלב הצעד נניח כי ההשערה נכונה עבור $n = k$, כלומר $S_k = k^2$. נוכיח כי אז היא תתקיים גם עבור $n = k + 1$, כלומר $S_{k+1} = (k + 1)^2$.

בודקים: $S_{k+1} = S_k + (2k + 1)$

עפ״י ההנחה: $S_k = k^2$, לכן:

$$S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$$ **מ.ש.ל.**

דוגמה 3

נתבונן בסדרת ריבועים של מספרים טבעיים (n^2).

נוכיח את הנוסחה לסכום של n האיברים הראשונים של הסדרה:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

פתרון

נסמן: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = S(1)$

שלב הבסיס נבדוק את הנוסחה עבור $n = 1$:

$$\frac{1(1 + 1)(2\cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 = 1$$

שלב הצעד נניח כי מתקיים:

$$S(k) = 1^2+2^2+3^2+... + k^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6}$$

נבדוק את הטענה עבור $n = k + 1$:

$$S(k+1) = 1^2+2^2+3^2+... + k^2 + (k + 1)^2 = \frac{k(k + 1)(2k + 1)}{6} + (k + 1)^2 =$$

$$= \frac{k(k + 1)(2k + 1) + 6(k + 1)^2}{6} = \frac{(k + 1)\left(2k^2 + k + 6k + 6\right)}{6} =$$

$$= \frac{(k + 1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} = \frac{(k + 1)(k + 2)(k + 3)}{6}.$$

לכן, עפ״י העיקרון של אינדוקציה מתמטית הנוסחה מתקיימת עבור כל n.

הנוסחאות שהוכחנו מעלה יכולות להיות בסיס לפיתוח נוסחאות חדשות.

דוגמה 4

תהיה נתונה סדרת חזקות 3 של מספרים טבעיים (n^3). נפתח נוסחה לחישוב סכום של n איברים ראשונים של הסדרה: $S(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$.

פתרון

בדומה לדוגמה 1, נרכיב סכומים חלקיים $S(1), S(2), S(3), S(4)$:

$$S(1) = 1,$$
$$S(2) = 1^3 + 2^3 = 9,$$
$$S(3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36,$$
$$S(4) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100.$$

אפשר לראות כי מתקיימות שוויונות:

$$1 = 1^2,\ \ 9 = 3^2 = (1+2)^2,\ \ 36 = 6^2 = (1+2+3)^2,$$
$$100 = 10^2 = (1+2+3+4)^2$$

לכן אפשר להביע את ההשערה, כי

$$S(n) = (1+2+3+\ldots+n)^2$$

מהדוגמה 1 אנו יודעים כי

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

לכן מקבלים את הנוסחה (שנצטרך להוכיח אותה):

$$S(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$$

שלב הבסיס בודקים את הנוסחה עבור $n = 1$: $\left(\frac{1\cdot(1+1)}{2}\right)^2 = 1 = S(1)$

שלב הצעד מניחים כי הנוסחה מתקיימת עבור $n = k$, ובודקים האם אז היא תתקיים עבור $n = k+1$:

$$S(k+1) = S(k) + (k+1)^3 = \left(\frac{k\cdot(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$
$$= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} = \frac{(k+1)^2\cdot(k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}\right)^2$$

לכן, עפ"י העיקרון של אינדוקציה מתמטית הנוסחה מתקיימת עבור כל n.

אומנם אינדוקציה מתמטית אינה נותנת דרך לפתרון או אפילו להעלאת ההשערות, היא כן מאפשרת במקרים רבים להוכיח את ההשערה.

תרגילים אינטראקטיביים

ChatGPT

שאילתות מפתח

תרגיל 1. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$1^4+2^4+3^4+\ldots+n^4=\frac{1}{30}\cdot n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)$$

תרגיל 2. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

תרגיל 3. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=n^2\left(2n^2-1\right)$$

תרגיל 4. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$2^2+6^2+\ldots+(4n-2)^2=\frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

תרגיל 5. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

תרגיל 6. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

תרגיל 7. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n)$$

תרגיל 8. חישבו את הסכום:

$$1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)$$

תרגיל 9. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n$$

שיעורי בית אינטראקטיביים (עם הערכה)

שאלה 1. חישבו את הסכום:

$$1^4+2^4+3^4+\dots+18^4$$

שאלה 2. חישבו את הסכום:

$$1^2+3^2+5^2+\dots+47^2$$

שאלה 3. חישבו את הסכום:

$$1^3+3^3+5^3+\dots+53^3$$

שאלה 4. חישבו את הסכום:

$$2^2+6^2+10^2+14^2+\dots+50^2$$

שאלה 5. חישבו את הסכום:

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\dots+17\cdot18$$

שאלה 6. חישבו את הסכום:

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\dots+16\cdot17\cdot18$$

שאלה 8. חישבו את הסכום:

$$1\cdot2+2\cdot5+3\cdot8+\dots+22\cdot65$$

בעיות התחלקות

פתרון בעיות ההתחלקות של מספרים טבעיים מהווה שלב חשוב בפתרון הבעיה של מציאת מספרים ראשוניים. נוסחאות רבות לחישוב מספרים ראשוניים הומצאו בעבר, רבות מהן התבססו על ניחוש של הממציא, וכדי לאושש או להפריך אותן אפשר להשתמש באינדוקציה מתמטית.

דוגמה 5

הוכיחו כי המספר $4^n + 15n - 1$ מתחלק ב- 9 ללא שארית.

שלב הבסיס בדיקה עבור $n = 1$: $4 + 15 - 1 = 18$ ✓

שלב הצעד נניח כי המספר $4^k + 15k - 1$ מקיים את ההשערה עבור k איזשהו.

נרשום את המספר הבא:

$$4^{k+1} + 15(k + 1) - 1 = 4\cdot 4^k + 15k + 15 - 1 =$$
$$= 4\cdot(4k + 15k - 1) - 45k + 3 + 15 =$$
$$= 4\cdot(4k + 15k - 1) + (18 - 45k).$$

שני הביטויים שבסוגריים מתחלקים ב- 9. ההשערה אומתה.

הערה

יש מקרים בהם הטענה אינה נכונה עבור $n = 1, 2, \dots, p\text{-}1$, ונכונה עבור $n = p$.

אם נוכל להוכיח כי בהנחה שהטענה נכונה עבור $n = k > p$ היא תהיה נכונה גם עבור המספר העוקב $(k + 1)$, אזי נוכל להסיק כי הטענה נכונה עבור כל המספרים $n \geqslant p$.

דוגמה 6 הוכיחו כי המספר $7^n + 8^{2n-3}$ מתחלק ללא שארית ב- 19 עבור כל מספר טבעי $n \geqslant 3$.

פתרון כאשר $n = 3$ נקבל: $7^3 + 8^3 = 343 + 512 = 855 = 45\cdot 19$

כלומר, הטענה נכונה עבור $n = 3$. ✓

נניח כי הטענה נכונה עבור מספר k איזשהו: $7^k + 8^{2k-3} = 19m$, כאשר m – מספר שלם. נבדוק את הטענה עבור המספר העוקב k+1.

מההנחה מקבלים: $8^{2k-3} = 19m - 7^k$.

לכן: $7^{k+1} + 8^{2(k+1)-3} = 7^{k+1} + 64\cdot \underline{8^{2k-3}} = 7^{k+1} + 64\cdot \underline{(19m - 7^k)} =$

$$= 7^k\cdot(7 - 64) + 64\cdot 19m = 64\cdot 19m - 57\cdot 7^k = 19\cdot(64m - 3\cdot 7^k)$$ ✓

כלומר, הביטוי שהתקבל מכיל את 19 ככופל.

ובכן, הוכחנו כי הטענה מתקיימת עבור $n = 3$, ומההנחה כי היא מתקיימת עבור $n = k > 3$ נובע כי היא מתקיימת עבור $n = k+1$.

ל כן מסיקים כי הטענה נכונה עבור כל מספר $n > 3$.

תרגילים אינטראקטיביים

שאילתות מפתח

ChatGPT

תרגיל 10. הוכיחו כי המספר $n^3 - 3$ מתחלק ב- 3 ללא שארית עבור כל מספר טבעי n.

תרגיל 11. הוכיחו כי סכום חזקות 3 של שלושה מספרים טבעיים עוקבים מתחלק ב- 9 ללא שארית.

תרגיל 12. הוכיחו כי המספר $20^n + 16^n - 3^n - 1$ מתחלק ב- 323 ללא שארית עבור כל מספר n זוגי.

תרגיל 13. הוכיחו כי המספר $5^n + 2\cdot 3^n + 5$ מתחלק ב- 7 ללא שארית עבור כל מספר טבעי n.

תרגיל 14. הוכיחו כי המספר $15^n + 6$ מתחלק ב- 3 ללא שארית עבור כל מספר טבעי n.

תרגיל 15. הוכיחו כי עבור כל מספר טבעי n המספר $6^{2n-1} + 1$ מתחלק ב- 7 ללא שארית.

תרגיל 16. הוכיחו כי המספר $3^{n+2} + 2^{4n+1}$ מתחלק ב- 11 ללא שארית עבור כל מספר n טבעי.

תרגיל 17. הוכיחו כי המספר $4^n + 15n - 1$ מתחלק ב- 9 ללא שארית עבור כל מספר n טבעי.

תרגיל 18. הוכיחו כי המספר 7^{2n-1} מתחלק ב- 48
ללא שארית עבור כל מספר n טבעי.

תרגיל 19. הוכיחו כי המספר n^3+5n מתחלק ב- 6
ללא שארית עבור כל מספר n טבעי.

תרגילי חילוק נוספים

תרגיל 1+. הוכיחו כי המספרים הבאים מתחלקים ב- 4 ללא שארית
עבור כל מספר טבעי n :

א. 9^n+3 ב. 5^n-3^n+2n

תרגיל 2+. הוכיחו כי המספרים הבאים מתחלקים ב- 6 ללא שארית
עבור כל מספר טבעי n :

א. $n^3+9n^2+26n+24$ ב. n^3+11n

תרגיל 3+. הוכיחו כי המספר הבא מתחלק ב- 7 ללא שארית
עבור כל מספר טבעי n : $3^{2n+1}+2^{n+2}$

תרגיל 4+. הוכיחו כי המספר הבא מתחלק ב- 8 ללא שארית
עבור כל מספר טבעי n : $5^n+2\cdot3^n+5$.

תרגיל 5+. הוכיחו כי המספר הבא מתחלק ב- 9 ללא שארית
עבור כל מספר טבעי n : 7^n+3n-1 .

תרגיל 6+. הוכיחו כי המספר הבא מתחלק ב- 18 ללא שארית
עבור כל מספר טבעי n :

א. $7^n+12n+17$ ב. $9^{n+1}-18n-9$

תרגיל 7+. הוכיחו כי המספר הבא מתחלק ב- 19 ללא שארית
עבור כל מספר טבעי n : $5\cdot2^{3n-2}+3^{3n-1}$

תרגיל 8+. הוכיחו כי המספר הבא מתחלק ב- 24 ללא שארית
עבור כל מספר טבעי n : $7^{2n}-1$.

טורים עם שברים

דוגמה 7

מצאו את הסכום: $S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$

פתרון

לא קיימת דרך אחת למציאת סכומי הסדרות מסוג כלשהו (סכום כזה נקרא **טור**).
במקרים מסויימים כמו סדרה חשבונית או סדרה הנדסית, קיימות נוסחאות, אולם כאשר הסדרה היא מסוג אחר (כמו בדוגמה) יש לנסות דרכי פתרון אחרים.
אחת הדרכים היא להתחיל ממציאת סכום של מספר קטן של איברים, ולנסות למצאו את החוקיות. בדוגמה הנ"ל נקבל:

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}$$

אפשר להעלות <u>השערה</u> כי עבור כל n מתקיים: $S_n = \frac{n}{n+1}$

אולם השערה בלבד אינה מהווה תשובה כל עוד היא לא מוכחת!

ננסה להוכיח אותה באמצעות אינדוקציה מתמטית.

שלב הבסיס עבור $n = 1$: $S_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$ ✓

שלב הצעד נניח כי ההשערה נכונה עבור $n = k$:

$$S_k = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

עלינו להוכיח כי אז היא תתקיים גם עבור $n = k + 1$, כלומר, כי יתקיים:

נרשום את הביטוי ל- S_{k+1}: $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$

$$S_{k+1} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{k\cdot(k+1)} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} =$$

= עפ"י הנחת ההשערה =

$$= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$ ✓

פתרון אלגברי

עבור הטורים מסוג זה קיים פתרון אלגברי אשר מביא לתשובה ללא צורך בניחוש והוכחה באינדוקציה.

פתרון זה מבוסס על תכונות השברים : ייצוג מכנה השבר כמכפלה מרמז על האפשרות כי השבר הוא חיבור או חיסור של שברים, וייתכן כי ייצוג כזה יאפשר לפשט את הטור.

במקרה של דוגמה 6 נקבל :

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

נציב לביטוי של S_n :

$$✓\quad S_n=\frac{1}{1}-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\ldots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

תרגילים אינטראקטיביים

שאילתות מפתח

ChatGPT

תרגיל 20. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}=\frac{n}{4(n+4)}$$

תרגיל 21. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$\frac{7}{1\cdot 8}+\frac{7}{8\cdot 15}+\frac{7}{15\cdot 22}+\ldots+\frac{7}{(7n-6)(7n+1)}=1-\frac{1}{7n+1}$$

תרגיל 22. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$\frac{1}{4\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 16}+\ldots+\frac{1}{4n(4n+4)}=\frac{1}{16}-\frac{1}{16(n+1)}$$

תרגיל 23. הוכיחו את השוויון באמצעות אינדוקציה:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

תרגיל 24. חישבו את הסכום:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

שימוש באינדוקציה בחקירת סדרות

דוגמה 8 בפרק של סדרה חשבונית הגענו לנוסחה לאיבר ה- n-י:

$$a_n = a_1 + (n – 1)d$$

כאשר a_1 הוא איבר ראשון ו- d – הפרש הסדרה, לאחר ההסתכלות בביטויים של שלושה איברים ראשונים של הסדרה, כלומר, העלינו השערה, ולא הוכחנו אותה.
אינדוקציה מתמטית מאפשר לעשות זאת:

שלב הבסיס עבור $n = 1$ הנוסחה נכונה: $a_1 = a_1 + (1 – 1)d = a_1$

שלב הצעד נניח כי הנוסחה מתקיימת עבור $n = k$: $a_k = a_1 + (k – 1)d$

עבור האיבר הבא שמספרו בסדרה $k + 1$ נקבל:

a_{k+1} = עפ"י ההגדרה של סדרה חשבונית = $a_k + d$ =

= עפ"י ההנחה = $a_1 + (k – 1)d + d = a_1 + dk$

כלומר, הנוסחה נכונה גם עבור $n = k + 1$. **מ.ש.ל.**

דוגמה 9 הוכיחו נוסחה לסכום n איברים ראשונים של סדרה חשבונית:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad (1)$$

שלב הבסיס עבור $n = 2$: לפי הגדרה של סדרה חשבונית: $a_2 = a_1 + d$

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + (a_1+d) = \frac{a_1 + (a_1+d)}{2} \cdot 2$$

שלב הצעד נניח כי הנוסחה (1) מתקיימת עבור סדרה חשבונית שבה k איברים:

$$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k \qquad (2)$$

עלינו להוכיח כי היא מתקיימת גם עבור $k+1$ איברים:

$$S_{k+1} = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} \cdot (k + 1)$$

ניעזר בהנחת האינודקציה (2) ובעובדה כי $a_{k+1} = a_k + d$, ונחשב את הפרש האגפים:

$$\frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k + (a_k + d) - \frac{a_1 + a_{k+1}}{2} \cdot (k + 1) = \ldots = 0$$

נפתח סוגריים, נכנס איברים דומים, ונוודא כי ההפרש שווה ל- 0. **מ.ש.ל.**

דוגמה 10 בפרק של סדרה הנדסית הגענו לנוסחה לאיבר ה- n-י :

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

כאשר b_1 הוא איבר ראשון ו- q – מנת הסדרה, לאחר ההסתכלות בביטויים של ארבעה איברים ראשונים של הסדרה, כלומר, העלינו השערה, ולא הוכחנו אותה.
אינדוקציה מתמטית מאפשר לעשות זאת :

שלב הבסיס עבור n = 1 הנוסחה נכונה : $b_1 = b_1 \cdot q^{1-1} = b_1$

שלב הצעד נניח כי הנוסחה מתקיימת עבור n = k : $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$

עבור האיבר הבא שמספרו בסדרה k + 1 נקבל :

$b_{k+1} =$ עפ"י ההגדרה של סדרה הנדסית $= b_k \cdot q =$

$=$ עפ"י ההנחה $= b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^k$

כלומר, הנוסחה נכונה גם עבור n = k + 1. **מ.ש.ל.**

הוכחת התלכדות סדרות המוגדרות לפי איבר n-י וכלל נסיגה

דוגמה 11

סדרה a_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה : $a_1 = 6,\ a_{n+1} = 2a_n - 3n + 2$.

הוכיחו כי $a_n = 2^n + 3n + 1$.

הוכחה

שלב הבסיס

בדיקה עבור n = 1: $a_1 = 2^1 + 3 \cdot 1 + 1 = 6$

הנחת האינדוקציה

נניח כי הטענה נכונה עבור n = k : $a_k = 2^k + 3k + 1$

שלב הצעד

נוכיח כי הטענה נכונה עבור n = k + 1:

$$a_{k+1} = 2 \cdot a_k - 3k + 2 = 2 \cdot (2^k + 3k + 1) - 3k + 2 = 2 \cdot 2^k + 6k + 2 - 3k + 2 =$$

$$= 2^{k+1} + 3k + 4 = 2^{k+1} + 3(k + 1) + 1.$$ **מ.ש.ל.**

תנאיי האינדוקציה המתמטית מתקיימים, לכן הטענה נכונה.

דוגמה 12

הוכיחו כי אם $a_1 = 3, a_2 = 5$ ולכל n טבעי מתקיים: $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$,

אזי $a_n = 2^n + 1$.

הוכחה

שלב הבסיס

בדיקה עבור $n = 1$ ו- $n = 2$: $a_1 = 2^1 + 1 = 3,\ a_2 = 2^2 + 1 = 5$ ✓

הנחת האינדוקציה

נניח כי הטענה נכונה עבור $n = k$: $a_k = 2^k + 1$, $a_{k+1} = 2^{k+1} + 1$

שלב הצעד

נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n = k + 2$.

נפתח את האיבר a_{k+2} לפי כלל נסיגה:

$$a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k =$$

נציב ביטויים של a_{k+1} ו- a_k עפ״י הנחת האינדוקציה:

$$= 3(2^{k+1} + 1) - 2(2^k + 1) = 3\cdot 2^{k+1} + 3 - 2\cdot 2^k - 2 =$$

$$= 6\cdot 2^k - 2\cdot 2^k + 1 = 4\cdot 2^k + 1 = 2\cdot 2^{k+1} + 1$$ **מ.ש.ל.**

שני תנאיי האינדוקציה המתמטית מתקיימים, לכן הטענה נכונה לסדרה הנתונה לכל ערכים טבעיים של n.

תרגילים אינטראקטיביים | שאילתות מפתח | ChatGPT

תרגיל 25. סדרה b_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה: $b_1 = 4, b_{n+1} = 3b_n - 2$

מצאו נוסחה ל- b_n כפונקציה של n.

תרגיל 26. סדרה a_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה: $a_1 = 2, a_n = 3a_{n-1} + 1$

הוכיחו כי $a_n = \frac{1}{2}(5\cdot 3^{n-1} - 1)$.

תרגיל 27. סדרה a_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה:

$$a_1=5, a_2=7, a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=0$$

מצאו ביטוי של a_n באמצעות n.

תרגיל 28. סדרה a_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה:

$$a_1=7, a_2=27, a_{n+2}=6a_{n+1}-5a_n$$

מצאו נוסחה ל- a_n כפונקציה של n.

תרגיל 29. סדרה a_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה:

$$a_1=1, a_n=4a_{n-1}+5 \quad (n>1)$$

הוכיחו כי $a_n=\frac{1}{3}\left(2\cdot 4^n-5\right)$.

תרגיל 30. סדרה a_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה:

$$a_1=1, a_{n+1}=a_n+3$$

הוכיחו כי $a_n=3n-2$.

תרגיל 31. סדרה b_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה:

$$b_1=1, b_{n+1}=\frac{1}{3}\left(b_n+2\frac{1}{3^n}\right)$$

הוכיחו כי $b_n=\frac{2n+1}{3^n}$.

תרגיל 32. סדרה a_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה:

$$a_1=2, a_2=3, a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

מצאו את האיבר a_{2010}.

תרגיל 33. סדרה a_n מוגדרת עפ"י כלל נסיגה:

$$a_1=2, a_2=3, a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}, n\geq 2$$

הוכיחו כי- $a_n=2^{n-1}+1$.

תרגיל 34. הסדרה מוגדרת עפ"י כלל נסיגה:

$$a_1 = 3, a_2 = 15, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 4a_n$$

הוכיחו כי:

א. כל איברי הסדרה מתחלקים ב- 3 ללא שארית;

ב. כל איברים זוגיים של הסדרה מתחלקים ב- 5 ללא שארית.

תרגיל 35. הוכיחו כי סכום האיברים בכל שורה של הטבלה הבאה שווה לריבוע מספר אי-זוגי.

1

2 3 4

3 4 5 6 7

4 5 6 7 8 9 10

....

נדגיש כי הוכחה לפי אינדוקציה מתמטית דורשת קיום שתי הדרישות:

א. שלב הבסיס - קיום עבור n איזשהו (בדרך כלל $n = 1$, אולם יכול להיות גם $n > 1$ – נראה את הדוגמה בהמשך), ו-

ב. שלב הצעד – הנחת קיום עבור $n = k$ איזשהו והוכחה עבור $n = k + 1$.

אי-קיום של אחת משתי הדרישות עלול לגרום למסקנה שגויה.

דוגמה 13

המתמטיקאי הדגול ממאה XVIII לֵאונרד אויילר העלה השערה כי כל המספרים מהסוג $N(n) = n^2 + n + 41$ הם מספרים ראשוניים.

הוא ביסס את ההשערה על הדוגמאות (**שלב הבסיס**):

$$N(0) = 41, N(1) = 43, N(2) = 47, N(3) = 53, N(4) = 61, N(5) = 71,$$
$$N(6) = 83, N(7) = 97.$$

לכן אוילר סבר כי הנוסחה מגדירה מספריה ראשוניים עבור כל n.

אולם, מקרה של $n = 41$, עבורו מתקיים $N(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ מפריך את ההשערה.

בדוגמה זו חסר השלב של הוכחה (**שלב הצעד**), וזה הוביל לטעות בטענה.

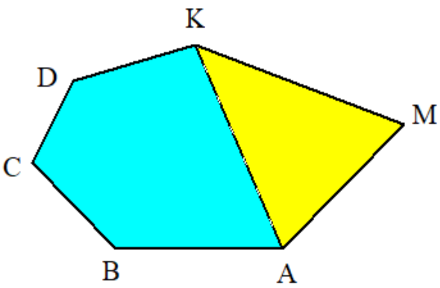
הערה: חיפוש אחר הנוסחה למספרים ראשוניים נמשך עד לימינו עקב חשיבותם של מספרים ראשונים בנושאי ההצפנה (קריפטוגרפיה).

גם העדר שלב הבסיס עלול להוביל לטענה שגויה.

דוגמה 14 (פרדוקס מתמטי)

"נוכיח" כי כל מספר שווה לעוקב לו: $n = n + 1$

"הוכחה" לפי אינדוקציה:



נניח כי השוויון מתקיים עבור מספר k איזשהו:

שלב הצעד עבור המספר העוקב $k + 1$ נקבל

"מ.ש.ל."

כמובן, הטעות ב"הוכחה" נובעת מחוסר שלב הנ

הוכחת משפטים גאיומטריים באמצעות האינדוקציה

באמצעות אינדוקציה מתמטית אפשר להוכיח גם משפטים גיאומטריים, למשל:

דוגמה 15

הוכיחו כי סכום זוויות במצולע קמור בעל n צלעות $(n \geqslant 3)$ שווה ל- $180°\cdot(n - 2)$.

הוכחה

שלב הבסיס כאשר $n = 3$ הצורה היא משולש, סכום הזוויות במשולש שווה ל- $180° = (3 - 2)\cdot180°$.

שלב הצעד נניח כי סכום הזוויות במצולע בעל k צלעות הוא:

$$S(k) = 180°\cdot(k - 2)$$

עלינו להוכיח כי במצולע בעל $k + 1$ צלעות סכום הזוויות יהיה

$$S(k+1) = 180°\cdot((k+1) - 2) = 180°\cdot(k - 1)$$

נתבונן בשרטוט:

נניח כי למצולע ABCDK היו k צלעות,

וסכום זוויותיו (עפ"י הנחת האינדוקציה) –

$S(k) = 180°\cdot(k - 2)$.

נצמיד למצולע משולש KMA. ייווצר המצולע

ABCDKM שבו שתי צלעות יותר (יתווספו

שלוש צלעות ותוסר צלע אחת KA), וסכום זוויות יוגדל ב- $180°$(סכום זוויות במשולש KMA), כלומר:

$180°\cdot(k - 2) + 180° = 180°*(k - 2 + 1) = 180°\cdot(k - 1)$ **מ.ש.ל.**

דוגמה 16

נתון אוסף ישרים במישור המחלקים אותו לאזורים שיוצרים "מפה".
צריך להוכיח שאפשר לצבוע את כל המפה בשני צבעים כך, שכל שני אזורים שיש להם גבול משותף יהיו בצבע שונה.

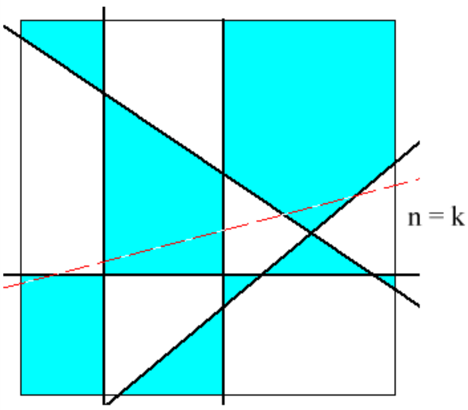
בניסוח השאלה לא מוזכר מספר טבעי n, לכן ננסח שאלה אחרת:

כל מפה שנוצרה באמצעות n ישרים אפשר לצבוע בשני צבעים כך, שכל האזורים להם יש גבול משותף יהיו בצבע שונה.

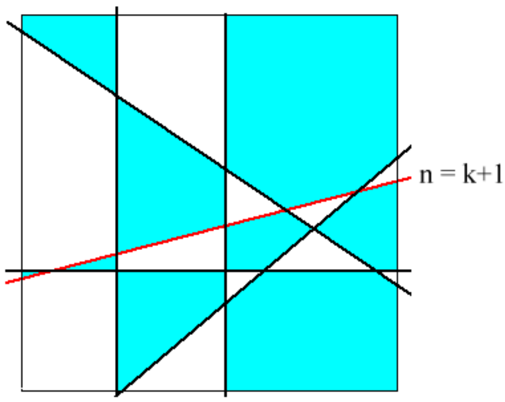
ננסה להוכיח באינדוקציה מתמטית:

שלב הבסיס כאשר $n = 1$ יש רק ישר אחד שמחלק את המישור לשני אזורים אותם אפשר לצבוע בשני צבעים.

שלב הצעד נניח כי צביעה בשני צבעים אפשרית במקרה של k ישרים (שרטוט א). הוספת ישר נוסף (שרטוט ב) ושינוי הצביעה כך שכל האזורים מעל הקו יישארו עם אותו צבע, וכל האזורים מתחתיו יישנו את הצבע – תיצור מפה שגם בה כל אזורים סמוכים צבועים בצבה שונה. **מ.ש.ל.**

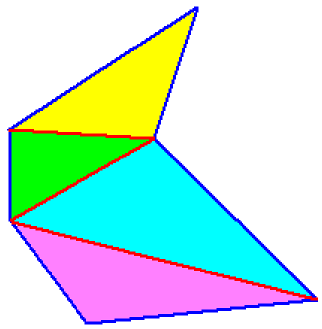


שרטוט א



שרטוט ב

תרגילים



36. לכמה משולשים אפשר לחלק מצולע בעל n צלעות
(לא בהכרח קמור) על-ידי האלכסונים הלא נחתכים?
הוכיחו את ההשערה באמצעות אינדוקציה.

37. הוכיחו כי n ישרים שונים העוברים דרך נקודה
אחת מחלקים את המישור ל- n+2 חלקים.

הוכחת אי-שוויונות באמצעות האינדוקציה (העשרה)

אינדוקציה מתמטית מאפשרת להוכיח גם אי-שוויונות בין הביטויים המכילים פרמטר טבעי. למשל:

דוגמה 17

הוכיחו כי עבור כל מספר טבעי $n > 1$ מתקיים האי-שוויון:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$$

הוכחה

נסמן את האגף המשאל של האי-שוויון ב- S_n.

שלב הבסיס. נבדוק את קיומו של האי-שוויון עבור $n = 2$:

$$S_2=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}$$

שלב הצעד. נניח כי $S_k>\frac{13}{24}$ עבור k איזשהו. נוכיח כי אז מתקיים גם $S_{k+1}>\frac{13}{24}$.

נרשום במפורש:

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$$

$$S_{k+1}=\frac{1}{(k+1)+1}+\frac{1}{(k+1)+2}+\ldots+\frac{1}{2(k+1)}=$$

$$=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k+2}$$

נשווה את שני הביטויים:

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} =$$

$$= \frac{2(k+1) + (2k+1) - 2(2k+1)}{2(2k+1)(k+1)} = \frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$$

הביטוי הסופי חיובי לכל k, לכן $S_{k+1} > S_k$.

אולם לפי הנחת אינדוקציה $S_k > \frac{13}{24}$, לכן גם $S_{k+1} > \frac{13}{24}$. **מ.ש.ל.**

דוגמה 18. (מצאו את הטעות)

הוכיחו את האי-שוויון $2^n > 2n + 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$

"הוכחה" באינדוקציה:

נניח שהאי-שוויון מתקיים עבור $n = k$: $2^k > 2k + 1$

נבדוק את האי-שוויון עבור המספר העוקב:

$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 >$ (עפ"י ההנחה) $(2k+1) \cdot 2 = 4k + 2 > 2k + 3$ (עבור $k > 1$) $=$

$= 2 \cdot (k+1) + 1.$

הוכחנו את שלב הצעד, אולם בדיקה עבור $n = 1$ ו- $n = 2$ מפריכות את הטענה:

$n = 1$: $2^n = 2$, $2n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 3$ $2 > 3$???

$n = 2$: $2^n = 4$, $2n + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ $4 > 5$???

גם בדוגמה זו לא נבדקו שני התנאים: שלב א (שלב הבסיס) לא נבדק.

נבדוק את המקרה $n = 3$: $2^n = 8$, $2n + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$, $8 > 7$

לכן מסיקים כי האי-שוויון $2^n > 2n + 1$ מתקיים עבור כל $\underline{n \geqslant 3}$.

דוגמה 19 הוכיחו את האי-שוויון:

$(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$, כאשר $\alpha \neq 0$, $\alpha > 1$ ו- n – מספר טבעי.

שלב הבסיס כאשר $n = 1$ נקבל: $1 + \alpha = 1 + \alpha$ ✓

שלב הצעד

נניח כי עבור מספר טבעי איזשהו k מתקיים $(1 + \alpha)^k \geqslant 1 + \alpha k$.

נבדוק את האיבר הבא:

$$\underline{(1+\alpha)^{k+1}} \geqslant (1+\alpha k)\cdot(1+\alpha) = 1+\alpha k+\alpha+\alpha^2 k =$$

$$= 1+\alpha(k+1)+\alpha^2 k \underline{\geqslant 1+\alpha(k+1)}$$ **מ.ש.ל.**

דוגמה 20 הוכיחו את האי-שוויון: $3^n \geqslant n^3,\ n \geqslant 3$

שלב הבסיס $n = 4$: $3^4 = 81,\ 4^3 = 64$ ✓

שלב הצעד נניח כי מתקיים: $3^k \geqslant k^3$, נבדוק אם האי-שוויון מתקיים עבור $k + 1$:

$$3^{k+1} = 3\cdot 3^k \geqslant 3k^3 \quad \text{(עפ״י הנחת האינדוקציה)} =$$

$$= k^3 + 2k^3 > k^3 + 2\cdot(3k^2) \quad (k > 3 \text{ כיוון ש-}) =$$

$$= k^3 + 3k^2 + 3k^2 > k^3 + 3k^2 + 9k = k^3 + 3k^2 + 3k + 6k >$$

$$> k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = (k+1)^3$$ ✓

הערה

הדוגמאות מעלה מראות כיצד אפשר לנסות להוכיח את ההשערות שהתקבלו בדרכים שונות: ניחוש, הגיון, ניסיון מתמטי וכ״ד. אינדוקציה מתמטית אינה מספקת כלים למציאת התשובה, אלא את אחת השיטות להוכחה; ישנם גם מקרים שאינדוקציה אינה מאפשרת להוכיח השערה נכונה.

ואולם ישנם מקרים שאינדוקציה מאפשרת להוכיח השערות בדרך קלה יותר.

ה ע ר ה ש

סדרת פיבונאצ׳י

דוגמה 21

סדרת פיבונאצ׳י מוגדרת באמצעות כלל נסיגה: $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

צריך לבדוק את הנוסחה לאיברי סדרה לפי מקום אליה הגיעו משיקולים אחרים:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right), n = 1, 2, ...$$

שלב הבסיס

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

שלב הצעד

נניח כי ההשערה מתקיימת עבור $n = k$, נבדוק אותה עבור $n = k + 1$:

$$u_{k+1} = u_k + u_{k-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right) =$$

נפתח את האיבר בסוגריים השניים:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$$

בדומה לכך:

$$n = 1: \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = 1$$

לכן לבסוף נקבל:

$$u_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right)$$

מ.ש.ל.

סיכום

למרות שאינדוקציה מתמטית אינה מאפשרת למצוא את האיבר או הביטוי ה- n-י בסדרת איברים או ביטויים ממוספרים, היא מספקת כלים לבדיקת ההשערה, שהם בדרך כלל פשוטים יותר מהפיתוח הישיר (שלעיתים אינו קיים ומהווה השערה בלבד).

הערה

לעיתים אינדוקציה מתמטית לא מאפשרת להוכיח טענה איזושהי. אין זה אומר שהטענה שגויה!

תרגילים אינטראקטיביים | שאילתות מפתח | ChatGPT

תרגיל 38. הוכיחו את האי-שוויון באמצעות אינדוקציה:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geq\sqrt{n}$$

תרגיל 39. הוכיחו את האי-שוויון באמצעות אינדוקציה:

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^n\geq\frac{n+1}{n}$$

תרגיל 40. הוכיחו את האי-שוויון באמצעות אינדוקציה:

$$3^n-2^n\geq n$$

תרגיל 41. הוכיחו את האי-שוויון באמצעות אינדוקציה:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{3n+1}>1$$

תרגיל 42. הוכיחו את האי-שוויון באמצעות אינדוקציה:

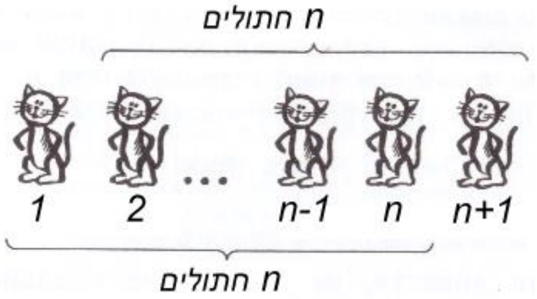
$$2^n\geq 5n-3,\ n\geq 5$$

תרגיל 43. **מצאו את הטעות:**

"נוכיח" באמצעות אינדטקציה מתמטית כי לכל חתולים עיניים באותו צבע.

שלב א עבור $n=1$ (חתול אחד) הטענה נכונה.

שלב ב נניח כי הטענה נכונה עבור קבוצה של $n = k$ חתולים כלומר, לכל חתולים בקבוצה כלשהי של k חתולים צבע עיניים זהה. נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n = k+1$.
נתבונן בקבוצה של $n+1$ חתולים ונמספר אותם. עפ״י הנחת אינדוקציה, לכל החתולים שמספרם מ- 1 עד n אותו צבע עיניים, כמו גם לכל החתולים בקבוצה המכילה חתולים מס׳ 2 עד $n+1$ (שגם בה n חתולים).
חתול מס. 2 שייך לשתי הקבוצות, לכן מסיקים כי גם לכל החתולים בקבוצה של $n+1$ חתולים אותו צבוע עיניים.



תרגיל 44. סדרה פיבונאצ׳י מוגדרת באמצעות כלל נסיגה:

$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ \ a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

הוכיחו כי מתקיים:

א. $a_{2n+2} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n+1}$

ב. $a_{2n+1} = 1 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}$

תשובות ורמזים

.4
$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n\cdot(n+1)=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+(n^2+n)=$$
$$=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\ldots+(n^2+n)=$$
$$=(1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2)+(1+2+3+\ldots+n)=\ \ldots..$$

עפ"י **דוגמה 2**:
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

בסוגריים השניים – סכום סדרה חשבונית. מציבים ומקבלים:
$$\frac{n\cdot(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=$$
$$\frac{n(n+1)}{2}\left(1+\frac{2n+1}{3}\right)=$$
$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{2n+4}{3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

.11 תיעזרו באי-שוויון:
$$\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k},\ k=1,2,\ldots$$

.12 תיעזרו באי-שוויון בדוגמה 14.

דוגמה 17: הטענה עבור $n=1$ חסרת הגיון.

.27 $n=1$: ישר אחד מחלק את המישור לשני חלקים; נניח כי k ישרים מחלקים מישור ל- $2k$ חלקים. ישר נוסף (שמספרו $k+1$) מחלק את המישור ל- $2k+2=2(k+1)$ חלקים.

.28 $S_{n+1}=S_n+2^n=2^n-1+2^n=2^{n+1}-1$

.29
$$S_{n+1}=(n+1)^3+5(n+1)=n^3+3n^2+3n+1+5n+5=$$
$$=n^3+5n+3(n^2+n)+6=S_n+3n(n+1)+6\ ,$$

$3n(n+1)+6$ מתחלק ב- 6

.30 לא מתקיים שלב א': לטענה אין הגיון עבור חתול אחד.

.50 $\dfrac{n}{2n+1}$