31. השתנות קצב השינוי של פונקציה

31.1 נגזרת שנייה

תהיה פונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $(a,\ b)$, ובכל נקודות הקטע קיימת נגזרת של הפונקציה $f'(x)$, שהיא בעצמה מהווה פונקציה של x.

לנגזרת של פונקציה $f'(x)$ קוראים *נגזרת שנייה* של פונקציה $f(x)$ ומסמנים $f''(x)$:

$$f''(x) = (f'(x))'$$

לדוגמה : נגזרת של פונקציה $y = x^3$ היא $y' = 3x^2$, ונגזרת שנייה היא

$$y'' = (3x^2)' = 6x$$

עוד **דוגמאות** : $f(x) = x^4 - 3x^2$, $f'(x) = 4x^3 - 6x$, $f''(x) = 12x^2 - 6x$ ▷

$f(x) = \sin 2x$, $f'(x) = 2\cos 2x$, $f''(x) = -4\sin 2x$ ▷

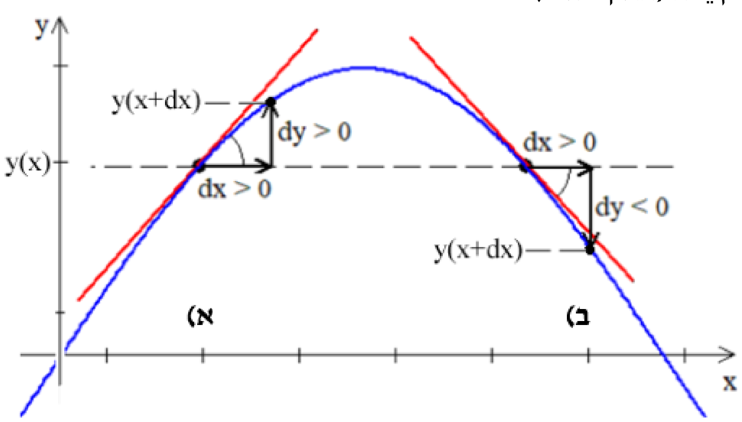
בדומה לכך אפשר לחשב נגזרות מסדר שלישי, רביעי וכו', אולם לנגזרת מסדר שני חשיבות ומשמעות גרפית מוחשית יותר.

בפרקים קודמים ראינו שמשמעות הנגזרת היא *קצב שינוי* של פונקציה, מה שמתבטא ברישום הנגזרת *כיחס של דיפרנציאלים* (תוספות קטנות) של פונקציה ומשתנה בלתי תלוי :

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

בייצוג גרפי של פונקציה, ביטוי זה מבטא טנגנס *שיפוע המשיק* לגרף הפונקציה בנקודה x. עובדה זו מאפשרת למצוא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה :

כאשר נגזרת הפונקציה חיובית הפונקציה גדֵלה (הגרף עולה), וכאשר היא שלילית, הפונקציה קטֵנה (הגרף יורד).



הוכחה

א) $\frac{dy}{dx} > 0: \ dx > 0 \ \ => \ dy > 0 \ => \ y\,(x+dx) > y(x)$

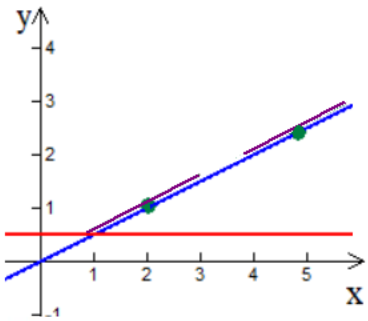
כלומר, ערך של פונקציה בנקודה $(x+dx)$ **גדול** מערכה בנקודה x.

ב) $\frac{dy}{dx} < 0: \ dx > 0 \ \ => \ dy < 0 \ => \ y\,(x+dx) < y(x)$

כלומר, ערך של פונקציה בנקודה $(x+dx)$ **קטן** מערכה בנקודה x.

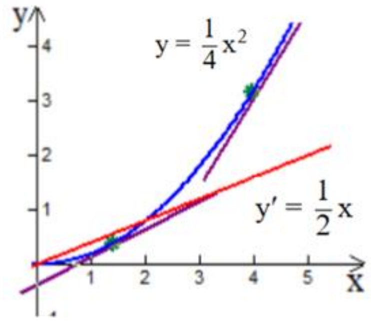
אולם, עלייה (או ירידה) מתאפיינות לא רק בסימן הנגזרת, אלא גם **בגודלה**: ערך גדול יותר משמעו תוספת גדולה יותר לערך הפונקציה, כלומר **קצב שינוי** גבוה יותר.

לדוגמה, שלושת הגרפים הבאים מתארים פונקציה עולה בקטע $(0, 5)$, אולם קצב הגידול בכל נקודה (השווה לנגזרת הפונקציה באותה הנקודה) שונה לכל פונקציה:



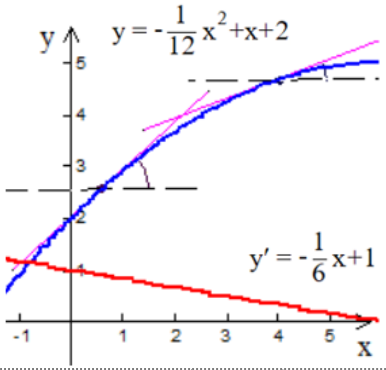
א. $y = 0.5x\ ,\ y' = \ 0.5$

בתחום $0 < x < 5$ הפונקציה y **עולה** ⇦ הנגזרת y' (השווה לקצב גידול הפונקציה) **חיובית**, ערכיה של הנגזרת קבועים ⇦ קצב גידול הנגזרת **- אפס**.



ב. $y = \frac{1}{4}x^2, y' = \frac{1}{2}x$

בתחום $0 < x < 5$ הפונקציה y **עולה** ⇦ הנגזרת y' (קצב גידול הפונקציה) **חיובית**, ערכיה של הנגזרת הולכים **וגדלים** ⇦ צורת הגרף בתחום זה – **קעור** כלפי **מעלה**.



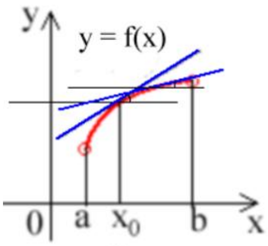
ג. $y = -\frac{1}{12}x^2 + x + 2,\ y' = -\frac{1}{6}x + 1$

בתחום $0 < x < 5$ הפונקציה y **עולה** ⇦ הנגזרת y' (קצב גידול הפונקציה) **חיובית**, אולם ערכיה של הנגזרת (קצב גידול) הולכים **וקטנים**.

צורת הגרף בתחום זה – **קעור** כלפי **מטה**.

מה קובע את צורת הגרף – האם הוא קעור כלפי מעלה או מטה?

נתבונן בשלושת הגרפים הבאים של פונקציות שונות:

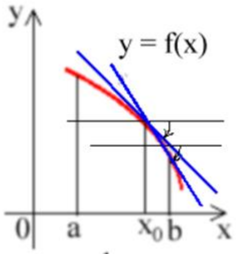


a

לכל הפונקציות בקטע $[a, b]$ קיימות נגזרות מסדר ראשון ושני. מה משותף לשלושת הפונקציות ומה השוני?

הפונקציה בגרף **a** עולה,

הפונקציה בגרף **b** – יורדת,

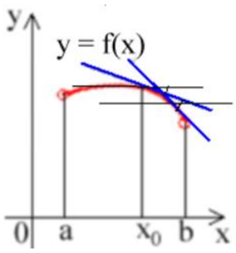


b

לפונקציה בגרף **c** יש גם קטע של עלייה וגם קטע של ירידה.

אולם לכל העקומות המתוארת בשרטוט יש תכונה משותפת:

<u>שיפוע המשיק</u> לכל עקומה *הולך וקטֵן* כאשר ערכו של x גדֵל מ- a ל- b, כלומר, נגזרת של כל הפונקציה הולכת וקטֵנה בקטע $[a, b]$, לכן הנגזרת השנייה שלילית: $f''(x) < 0$.



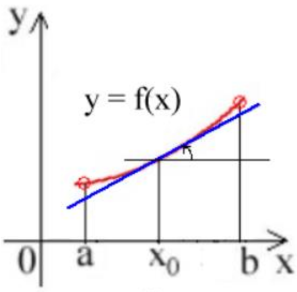
הערה: שיפוע המשיק מתבטא בגודל וסימן הזווית בין המשיק לבין ציר x. בשרטוט a זווית שיפוע המשיק בסביבת הנקודה x_0 חיובית, אולם גודלהּ הולך וקטֵן; ואילו בגרפים b ו- c גודלהּ של זווית שיפוע המשיק הולך וגדֵל, אולם סימנו שלילי;

לכן בכל שלושת המקרים שיפוע המשיק הולך וקטֵן.

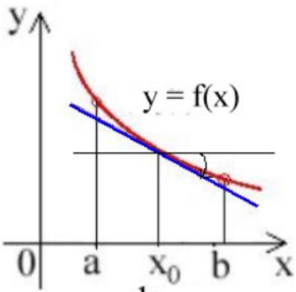
מהשרטוטים רואים, שעבור כל נקודה x_0 מהקטע (a, b), גרף הפונקציה $f(x)$ נמצא *מתחת למשיק* לעקומת הגרף בנקודה זו.

לכן לפונקציות מהסוג המתואר בשרטוט קוראים **קעורה כלפי מטה**.

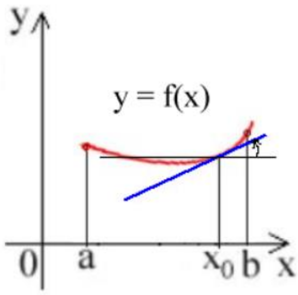
בדומה לכך, פונקציה $f(x)$ מכונה **קעורה כלפי מעלה** בקטע (a, b), אם נגזרת הפונקציה $f'(x)$ גדֵלה בקטע זה, ולכן הנגזרת השנייה חיובית: $f''(x) > 0$.



a

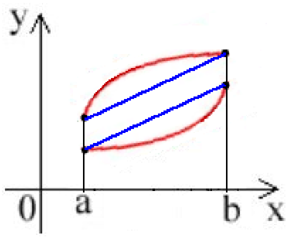


b



c

מהגרפים רואים כי עבור כל נקודה בתוך הקטע $x \in (a, b)$ <u>גרף הפונקציה הקעורה כלפי מעלה נמצא **מעל** המשיק לגרף בנקודה זו</u>.

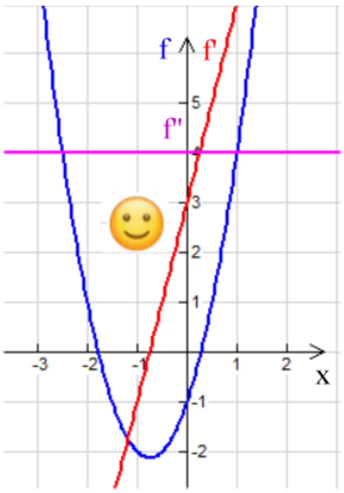


אם נעביר מיתר דרך הנקודות קצה הקטע אזי נראה כי גרף של פונקציה **קעורה כלפי מטה** בקטע מסוים $[a, b]$ נמצא **מעל** למיתר העובר דרך נקודות קצה של הגרף בתחום זה, ואילו כל נקודות הגרף של פונקציה **קעורה כלפי מעלה** בקטע מסוים $[a, b]$ נמצאות **מתחת** למיתר העובר דרך נקודות קצה הגרף.

קטעים בהם פונקציה קעורה כלפי מטה או מעלה נקראים בהתאם, תחומי הקעירות של הפונקציה.

נראה כיצד אפשר למצוא את תחומי הקעירות באמצעות הנגזרת השנייה.

נניח כי לפונקציה $f(x)$ קיימת נגזרת שנייה בכל נקודה השייכת לקטע (a, b) ; אזי אם $f''(x) < 0$ עבור כל x בקטע זה, אז הפונקציה קעורה כלפי מטה, ואם $f''(x) > 0$ בכל נקודה $x \in (a, b)$, אז הפונקציה קעורה כלפי מעלה.



דוגמה 1

מצאו את תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה לפונקציה $f(x)$:

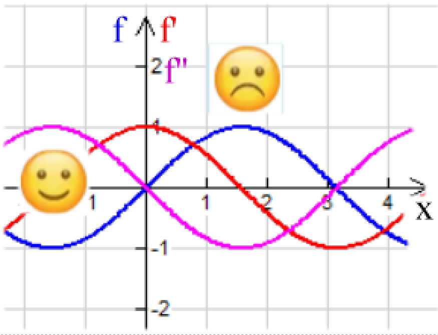
א. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$

ב. $f(x) = \sin x, -\pi < x < \pi$

ג. $f(x) = x^3$

◀ א. $f'(x) = 4x$, $f''(x) = 4$.

$f''(x) > 0$ עבור כל $x \in R$, לכן הפונקציה קעורה כלפי מעלה. ▷



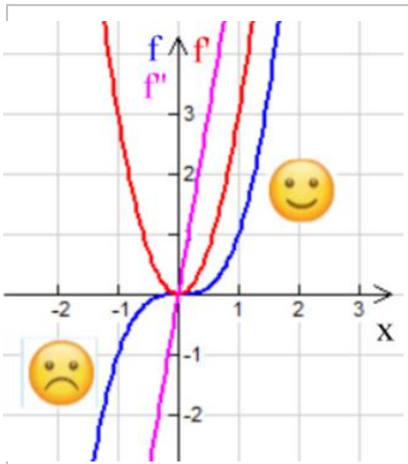
◀ ב. $f(x) = \sin x, f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x$.

בתחום $-\pi < x < 0$ פונקציית סינוס שלילית:

$\sin x < 0$, $f''(x) = -\sin x > 0$,

ומסיקים כי הפונקציה קעורה כלפי **מעלה**.

בדומה לכך, בתחום $(0, \pi)$ מתקיים $-\sin x < 0$,



כלומר הפונקציה $f(x) = \sin x$ בקטע זה קעורה כלפי **מטה**. ▷

ג. $f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x$

$6x > 0 \Rightarrow x > 0$

$6x < 0 \Rightarrow x < 0$

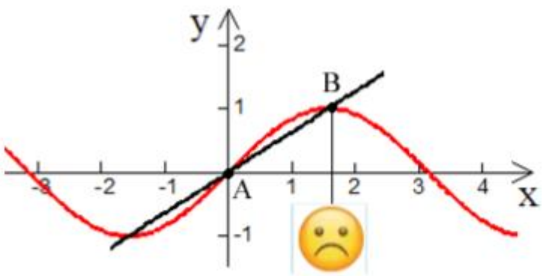
כלומר, פונקציה $f(x) = x^3$ קעורה כלפי מעלה בתחום $x > 0$, וקעורה כלפי מטה בתחום $x < 0$. ▷

דוגמה 2

הוכיחו כי בתחום $0 < x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים: $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

◀ בתחום $(0, \pi)$ פונקציה $f(x) = \sin x$ קעורה כלפי מטה בכל נקודות בתוך התחום.

נעביר מיתר דרך הנקודות A ו- B בקצות הקטע. שיפוע הישר העובר דרך הנקודות האלה הוא: $m = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$, לכן משוואת הישר היא $y = \frac{2}{\pi}x$.



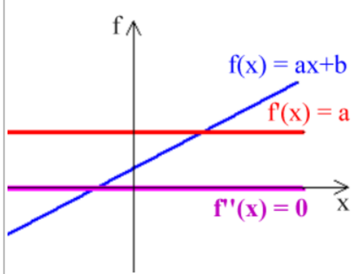
כיוון שפונקציה $f(x) = \sin x$ קעורה בתחום זה, ערכיה נמצאים מעל המיתר העובר דרך הנקודות A ו- B, לכן מקבלים: $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. **מ.ש.ל.** ▷

דוגמה 3

מצאו תחומי קעירות של פונקציה קווית $f(x) = ax + b$.

◀ נגזור את הפונקציה פעמיים: $f'(x) = a,\ f''(x) = 0$

לכן לפונקציה קווית אין תחומי קעירות בכל ציר x. ▷



דוגמה 4

א. מצאו תחומי קעירות של פונקציה ריבועית $f(x) = ax^2+bx + c\ ,\ \ a > 0$.

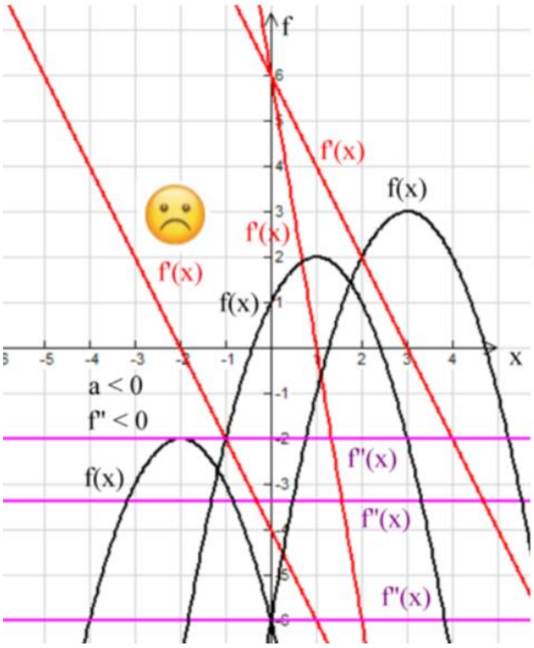
◄ נגזור את הפונקציה פעמיים: $f'(x) = 2ax + b,\ \underline{f''(x) = 2a > 0}$

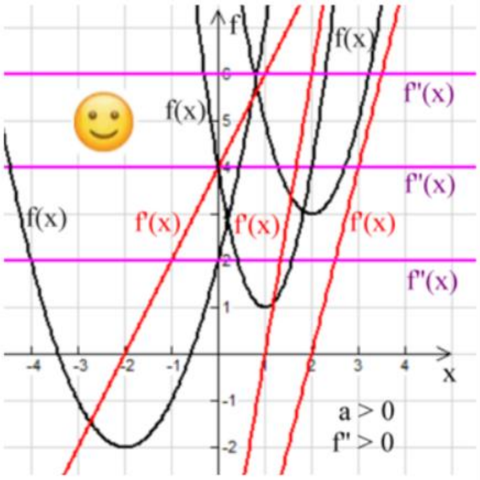
לכן פונקציה ריבועית בעלת מקדם a חיובי קעורה כלפי מעלה בכל ציר x. ▷

ב. מצאו תחומי קעירות של פונקציה ריבועית $f(x) = ax^2+bx + c\ ,\ \ a < 0$.

◄ נגזור את הפונקציה פעמיים: $f'(x) = 2ax + b,\ \underline{f''(x) = 2a < 0}$

לכן פונקציה ריבועית בעלת מקדם a שלילי קעורה כלפי מטה בכל ציר x. ▷





$f(x) = ax^2+bx + c$

דוגמה 5

מצאו תחומי קעירות של פונקציית פולינום ממעלה 3:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

◄ נגזור את הפונקציה פעמיים:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c,\quad f''(x) = 6ax + 2b$$

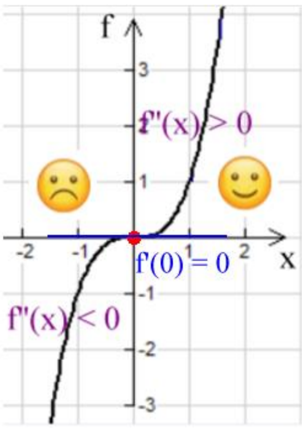
תחומי קעירות כלפי מעלה:

$$f''(x) > 0,\ 6ax + 2b > 0,\ \ x > -\frac{b}{3a}$$

תחומי קעירות כלפי מטה:

$$f''(x) < 0,\ 6ax + 2b < 0,\ \ x < -\frac{b}{3a}$$

כלומר, תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה של פונקציית פולינום ממעלה 3 תלויים בערכי וסימני המקדמים a ו- b.



לדוגמה, עבור פונקציית חזקה: $f(x) = ax^3$ בעלת המקדם a חיובי נקבל תחום קעירות כלפי מעלה: $x > 0$,

ותחום קעירות כלפי מטה: $x < 0$.

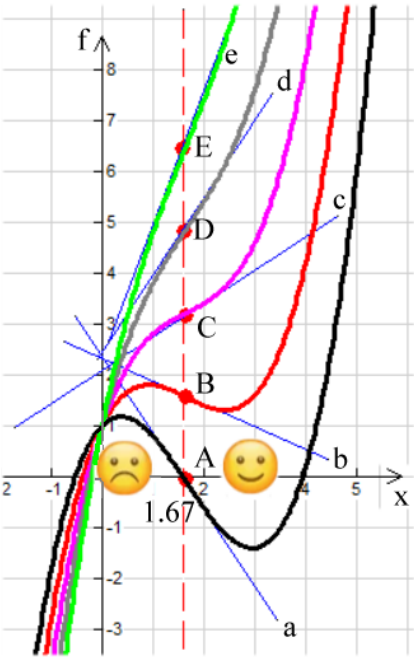
במקרה כללי של פולינום ממעלה שלישית $(b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0)$, תחומי קעירות תלויים בערכי המקדמים a ו- b, ולא תלויים במקדמים c ו- d.

לדוגמה, למשפחת פונקציות

$f(x) = 0.3x^3 - 1.5x^2 + cx - 2,\ c = 1, 2, 3, 4, 5$

תחום קעירות כלפי מעלה לכל פונקציה:

$$x > -\frac{b}{3a} = -\frac{-1.5}{3\cdot 0.3} \approx 1.67$$



תחום קעירות כלפי מעלה לכל פונקציה: $x < 1.67$.

שימו לב: בנקודות בהן כל פונקציה משנה את סוג הקעירות (A, B, C, D, E), הזוויות בין המשיקים לעקומות הגרף לציר x שונות **(ולא שוות לאפס)**, כלומר נגזרת ראשונה של כל פונקציה בנקודה בה סוג הקירות משתנה לא מתאפסת $(f'(x) \neq 0)$.

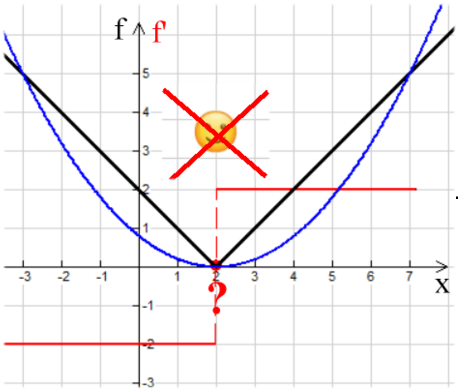
ברם, במקרה של פונקציית חזקה (בדוגמה הקודמת), נגזרת ראשונה בנקודה בה סוג הקעירות מתחלף $(x = 0)$ שווה לאפס:

$f(x) = ax^3,\ f'(x) = 3ax^2,\ f'(0) = 0$.

כלומר, בנקודות האלה (המכונות *נקודות פיתול* – ראו את הסעיף הבא) ערך של נגזרת ראשונה יכול להיות כלשהו (חיובי, שלילי, או אפס).

דוגמה 6

מצאו תחומי קעירות של פונקציית ערך מוחלט: $f(x) = |x - 2|$.



◄ תחילה נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$x \geqslant 2: f(x) = x - 2$$
$$x < 2: f(x) = 2 - x$$

כלומר, תחום ההגדרה – כל ציר x: $-\infty < x < \infty$

אולם, פונקציית נגזרת $f'(x)$ איננה מוגדרת בכל

נקודות הציר:
$$x \geqslant 2: f'(x) = - 2$$
$$x < 2: f'(x) = 2$$

כלומר, בנקודה $x = 2$ נגזרת של פונקציה <u>איננה מוגדרת</u> (ערכיה שונים כאשר x שואפת ל- 2 מימין ומשמאל לנקודה).

נחשב נגזרת שנייה:
$$x \geqslant 2: f''(x) = 0$$
$$x < 2: f''(x) = 0$$

כיוון שנגזרת ראשונה אינה מוגדרת בנקודה $x = 2$, בנקודה זאת אינה מוגדרת גם נגזרת שנייה. מכך מסיקים, כי לפונקציה $f(x) = |x - 2|$ <u>אין תחומי קעירות בכל התחום</u>.

שימו לב: למרות הדמיון החזותי בין גרף הפונקציה של ערך מוחלט ופרבולה (גרף של פונקציה ריבועית), תכונות הקעירות של שתי הפונקציות שונות: פרבולה קעורה כלפי מעלה בכל התחום של מספרים ממשיים $-\infty < x < \infty$, ואילו לפונקציה של ערך מוחלט אין תחומי קעירות באף קטע מתחום זה!

31.2 שימוש בנגזרת שנייה לקביעת סוג של נקודת קיצון

בכיתה י' למדתם שיטה לקביעת סוג של נקודת קיצון של פונקציה באמצעות בדיקת סימן של נגזרת ראשונה בשני צדדים מנקודת קיצון: אם פונקציית נגזרת $f'(x)$ משנה סימן משלילי לחיובי כאשר x גדל ועובר את נקודת הקיצון – אזי זאת נקודת מינימום, ואם הנגזרת משנה סימן מחיובי לשלילי – אזי מדובר בנקודת מינימום.

ננתח את גרף הפונקציה:

$$f(x) = 0.1(x + 3)(x - 1)(x - 4) = 0.1x^3 – 0.2x^2 – 1.1x +1.2$$

נחשב את שתי הנגזרות של הפוקנציה:

$$f'(x) = 0.3x^2 - 0.4x - 1.1,\ f''(x) = 0.6x - 0.4$$

נמצא את הנקודות החשדות לנקודות קיצון ע"י השוותה לאפס של הנגזרת הראשונה:

$$0.3x^2 - 0.4x - 1.1 = 0,\ x_1 \approx -1.36,\ x_2 \approx 2.69$$

כדי לבדוק את הסוג של נקודות קיצון, יש לחשב את סימני הנגזרת בשתי נקודות משמאל ומימין מהנקודה החשודה; עבור נקודה A, נקבל:

$$f'(x) = 0.3x^2 - 0.4x - 1.1,\ f''(x) = 0.6x - 0.4$$

$$f'(-2) = 0.3\cdot(-2)^2 - 0.4\cdot(-2) - 1.1 = 0.9 > 0$$

$$f'(-1) = 0.3\cdot(-1)^2 - 0.4\cdot(-1) - 1.1 = -0.4 < 0$$

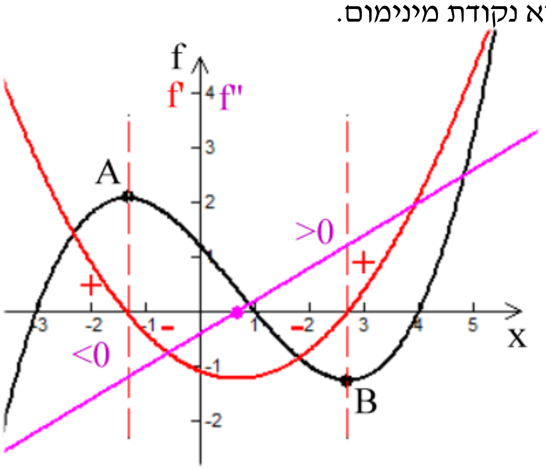
כיוון שנגזרת ראשונה מחליפה סימן מחיובי לשלילי, מסיקים כי נקודה A היא נקדות מקסימום (נגזרת חיובית ← פנקציה עולה, מגזרת שלילית ← פונקציה יורדת).

בדומה לכך נחשב את סימני הנגזרת בסביבת הנקודה B:

$$f'(2) = 0.3\cdot(2)^2 - 0.4\cdot(2) - 1.1 = -0.7 < 0$$

$$f'(3) = 0.3\cdot(3)^2 - 0.4\cdot(3) - 1.1 = 0.4 > 0$$

כלומר, נקודה B היא נקודת מינימום.



שימוש בנגזרת שנייה מאפשר לקבוע את סוג נקודת הקיצון בפעולה אחת:
הרי בקטע שבו נגזרת שנייה חיובית הפונקציה קעורה כלפי מעלה, לכן נקודת קיצון שנמצאת בתחום זה היא נקודת מינימום; בדומה לכך, נקודת קיצון שנמצאת בתחום של קעירות כלפי מטה (מגזרת שנייה שלילית) היא נקודת מקסימום.

נחשב את הנגזרת השנייה של הפוקנציה בנקודות A ו- B :

$$f''(A) = 0.6\cdot(-1.36) - 0.4 < 0$$

לכן נקודת A ($x \approx -1.36$) היא נקודת מקסימום, ואילו עבור הנקודה B נקבל:

$f''(B) = 0.6\cdot 2.69 - 0.4 > 0$ ➔ נקודת מינימום

כך מציאת סימן של נגזרת שנייה מאפשרת לקבוע את הסוג של נקודות קיצון בפעולה אחת: $f''(x) > 0$ 🡐 נקודת מינימום; $f''(x) < 0$ 🡐 נקודת מקסימום.

דוגמה 7

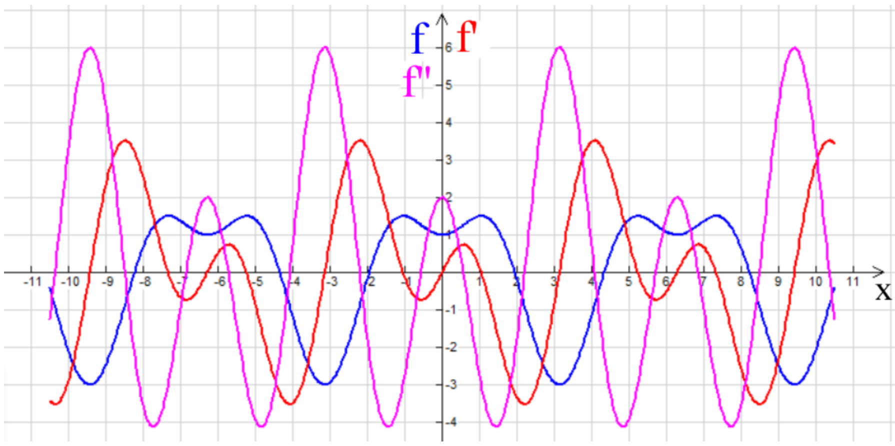
מצאו תחומי קעירות ונקודות קיצון של פונקציית $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$.

◄ תחילה נמצא את תחום ההגדרה של הפונקציה: כיוון שבפונקציה אין שברים ושורשים, מסיקים כי תחום ההגדרה הוא כל ציר x: $-\infty < x < \infty$.

נגזור את הפונקציה פעמיים:

$$f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x, \quad f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$$

למשווה $-2\cos x + 4\cos 2x = 0$ אינסוף פתרונות, לכן קיימים אינסוף קטיעם בהם $f''(x)$ היא חיובית (תחומי קעירות כלפי מעלה) או שלילית (תחומי קעירות כלפי מטה).



כדי לתאר את הגרף, נשים לב לכך, שהפונקציה ושתי נגזרותיה הן מחזוריות, כאשר המחזור המשותף הקטן ביותר הוא הכפולה המשותפת הקטנה ביותר של 2π (מחזור של sinx ו- cosx) ו- π (מחזור של sin 2x ו- cos 2x), כלומר, 2π.

פונקציה $f(x) = 2\cos x - \cos 2x$ היא זוגית, לכן אפשר לחקור אותה בקטע סימטרי

. נמצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בקטע זה: $[-\pi, \pi]$

$$f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x = 0$$

$$\sin x + 2\sin x \cdot \cos x = 0,\ \ \sin x \cdot (1 - 2\cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \ \Rightarrow\ x = 0, x = \pi$$

$$1 - 2\cos x = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{\pi}{3}$$

כדי לבדוק את סוג הנקודות - מקסימום או מינימום, וגם למצוא את תחומי הקעריות של הפונקציה - נחשב את הנגזרת השנייה:

$$f''(x) = -2\cos x + 4\cos 2x$$

$\underline{f''(0)} = -2\cos 0 + 4\cos 0 = 2 \underline{> 0} \Rightarrow f(0) = 1,$ נקודת מינימום - $x = 0$

$\underline{f''(\pi)} = -2\cos \pi + 4\cos 2\pi = 6 \underline{> 0} \Rightarrow f(\pi) = -3,$ נקודת מימינום - $x = \pi$

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3 < 0,\ \ y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow$ נקודת מקסימום - $x = \frac{\pi}{3}$

32. נקודת פיתול

בנקודה $(0, 0)$ שתי הפונקציות: $f(x) = x^3$ ו- $f(x) = \sin x$ משנות את צורתן <u>מקעורה כלפי מטה לקעורה כלפי מעלה</u>.

נקודה כזאת שמהווה בו-זמנית קצה הקטע שבו הפונקציה קעורה כלפי מטע וקצה הקטע שבו הפונקציה קעורה כלפי מעלה מכונה *נקודת פיתול*.

בנקודת פיתול נגזרת שנייה של הפונקציה <u>משנה סימן</u>.

דוגמה 1 מצאו את נקודות פיתול לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x^3$

◄ נחשב את הנגזרת השנייה: $f'(x) = 4x^3 - 6x^2,\ \ f''(x) = 12x^2 - 12x$

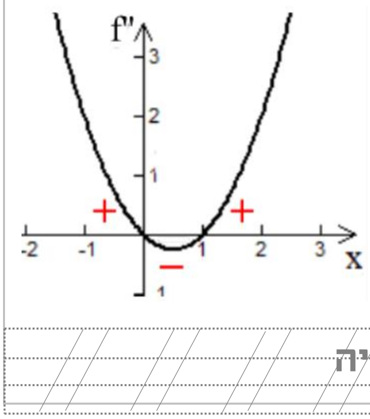
נמצא תחומי חיוביות ושליליות של הנגזרת השנייה:

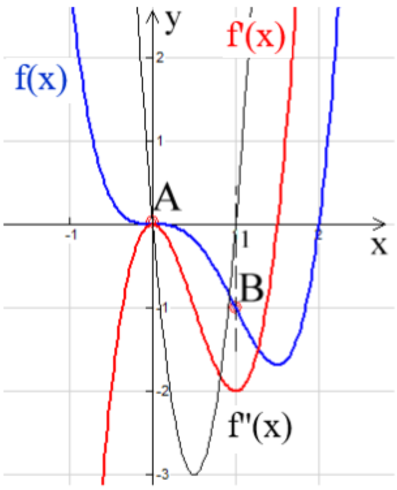
$$12x^2 - 12x > 0 \ \Rightarrow\ x(x - 1) > 0$$

$$x < 0, x > 1$$

$$12x^2 - 12x < 0 \ \Rightarrow\ x(x - 1) < 0$$

$$0 < x < 1$$





בנקודות $x = 0$ ו- $x = 1$ נגזרת שנייה מתאפסת ומחליפה סימן משני צדי הנקודות, לכן הנקודות האלה מהוות נקודות פיתול (הנקודות A ו- B בשרטוט).

שימו לב: בנקודות פיתול הנגזרת הראשונה מקבלת ערכים שונים (לאו דווקא 0):

$$f'(A) = 0,\ f'(B) = -2$$

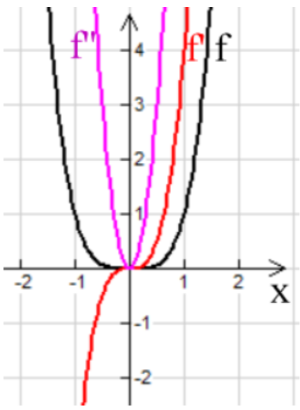
כללים למציאת נקודת פיתול

ראינו כי על-מנת שלפונקציה $f(x)$ תהיה נקודת פיתול בנקודה x_0 מסוימת, נגזרת שנייה של הפונקציה $f''(x)$ בנקודה זו חייבת לשנות סימן.

אם פונקציה $f''(x)$ רציפה באותה הנקודה (כלומר ערכיה שואפים לאותו ערך בהתקרבות ל- x_0 משני צדי הנקודה), אזי התנאי לשינוי סימן הפונקציה:

$$f''(+x_0) = -f''(-x_0)$$

($+x_0$ ו- $-x_0$ מסמנים נקודות קרובות מאוד ל- x_0 משני צדי הנקודה) יכול להתקיים אך ורק אם $f''(x_0) = 0$. ואולם, התנאי הזה הינו **הכרחי אך לא מספיק**!



לדוגמה, ננתח את הפונקציה $f(x) = x^4$:

$$f'(x) = 4x^3,\ \ f''(x) = 12x^2$$

נגזרת שנייה מתאפסת בנקודה $x = 0$:

$$f''(x) = 12x^2 = 0 \ \rightarrow\ x = 0$$

אולם, נקודה זו איננה נקודת פיתול, כיוון שערכיה של פונקציית הנגזרת השנייה $f''(x) = 12x^2$ אינם משנים סימן משני צדי הנקודה $x = 0$!

מצב דומה קורה לכל הפרבולות מסדר זוגי:

$$f(x) = x^4, x^6, x^8, \ldots, x^{2n}$$

הרי לכל הפונקציות מסוג זה נגזרת שנייה גם היא פרבולה מסדר זוגי:

$$f''(x) = x^2, x^4, x^6, \ldots, x^{2n-2}$$

ולכן ערכיה אי-שליליים בכל ציר המספרים.

סיכום הכללים למציאת מקודות פיתול:

א. מוצאים את הנקודות **ה"חשודות"** – הנקודות בהן $f''(x) = 0$.
נקודות אלה מקיימות את **התנאי ההכרחי** להיות נקודות פיתול.

ב. בודקים את סימני הנגזרת השנייה בשני צידיה של כל נקודה חשודה:
הנקודות בהן סימני הנגזרת השנייה מנוגדים מהוות נקודות פיתול,
ואילו הנקודות שבהן הסימנים זהים – אינן נקודות פיתול.

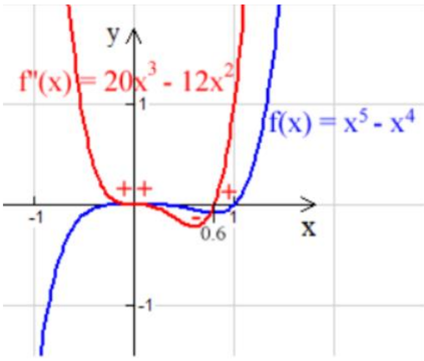
דוגמה 2 מצאו את נקודות פיתול לפונקציה $f(x) = x^5 - x^4$.

◄ נחשב את הנגזרת השנייה: $f'(x) = 5x^4 - 4x^3,\ \ f''(x) = 20x^3 - 12x^2$

נמצא את הנקודות החשודות לנקודות פיתול:

$$20x^3 - 12x^2 = 0,\ \ \ 4x^2(5x - 3) = 0,\ \ x_1 = 0,\ x_2 = 0.6$$

נמצא תחומי חיוביות ושליליות של הנגזרת השנייה:



$$4x^2(5x - 3) > 0\ \ \Rightarrow\ 5x - 3 > 0$$

$$x > 0.6$$

$$4x^2(5x - 3) < 0\ \ \Rightarrow\ 5x - 3 < 0$$

$$x < 0.6$$

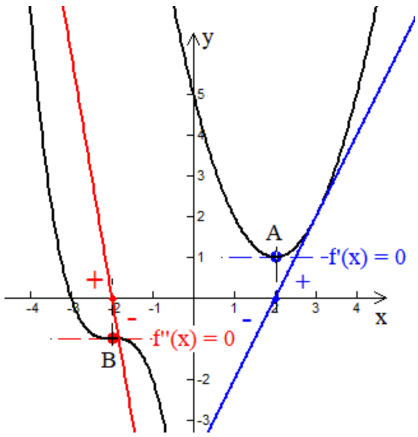
מכאן נובע כי נקודה $x_1 = 0$ נמצאת בתחום חיוביות של $f''(x)$, לכן ערכיה משני הצדדים של $x_1 = 0$ לא מחליפים סימן; מכאן מסיקים כי נקודה זו <u>איננה נקודת פיתול</u>.

לעומת זאת, הנקודה החשודה השנייה $x_2 = 0.6$ נמצאת בקצה הגבול של תחום חיוביות של פונקציית הנגזרת, לכן לערכיה משני צדי הנקודה סימנים מנוגדים; מכאן נובע כי נקודה זו היא נתקודת פיתול.

32.1 הדימיון וההבדל בין נקודות קיצון לנקודות פיתול

ניזכר בתהליך מציאת נקודות קיצון של פונקציה $f(x)$:

תחילה מוצאים את הנקודות החשודות ע"י מציאת נקודות אפס של הנגזרת $f'(x)$, כלומר פותרים משוואה $f'(x) = 0$.



תנאי זה הוא **תנאי הכרחי** לנקודות קיצון – בדומה לתנאי הכרחי לנקודות פיתול - נקודות אפס של נגזרת שנייה: $f''(x) = 0$.

כדי שנקודת האפס של נגזרת ראשונה תהיה נקודת קיצון, צריך להתקיים תנאי נוסף: סימני הנגזרת **הראשונה** משני צדי הנקודה צריכים להיות מנוגדים – בדומה לסימני הנגזרת **השנייה** מסביב לנקודת פיתול.

בדוגמה המוצגת בגרף משמאל:

נקודה A היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 7$,

המקיימת תנאי הכרחי $f'(x_A) = 2x_A - 4 = 0 \rightarrow x_A = 2$.

מוצאים את תחום החיוביות של פונקציית הנגזרת: $f'(x) = 2x - 4 > 0,\ x > 2$.

תחום השליליות: $f'(x) = 2x - 4 < 0,\ x < 2$.

לכן בנקודה x_A נגזרת **ראשונה** של הפונקציה מחליפה סימן,

משמע – הנקודה A היא נקודת **קיצון**.

הערה: כאשר x הולך וגדֵל עד ל- $x = 2$, הפונקציה יורדת, לכן הנגזרת שלילית; בנקודה $x_A = 2$ הפונקציה "עוצרת" את הירידה $(f'(x_A) = 0)$ ומתחילה לעלות $(f'(x) > 0,\ x > 2)$.

הגרף השני מבטא את הפונקציה $f(x) = -x^3 - 6x^2 - 12x - 9$.

נחשב את הנגזרות: $f'(x) = -3x^2 - 12x - 12,\ f'(x) = 0 \rightarrow x = -2$

$f''(x) = -6x - 12,\ f''(x) = 0 \rightarrow x = -2$

כלומר, בנקודה B שתי הנגזרות הראשונות של הפונקציה מתאפסות,

משמע נקודה B היא חשודה לנקודת פיתול.

נבדוק את סימני הנגזרת השנייה בשני צדי הנקודה:

תחום חיוביות של $f''(x)$ הוא: $-6x - 12 > 0,\ \underline{x < -2}$.

תחום שליליות: $-6x - 12 < 0,\ \underline{x > -2}$.

<u>נגזרת שנייה מחליפה סימן</u>, לכן הנקודה B היא נקודת **פיתול**.

תרגילים

מצאו את $f''(x)$ אם נתון:

32.1 א. $f(x) = x^2 \cos x$ ב. $f(x) = x^3 \sin x$

ג. $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + 2$ ד. $f(x) = x^4 - 3x^3 + 5x + 6$

32.2 א. $f(x) = (2x - 1)^7$ ב. $f(x) = \sin^8 x$ ג. $f(x) = \cos^7 x$

32.3 $f(x) = x \cdot \sqrt{1 + x^2}$

מצאו את תחומי קעירות כלפי מעלה ותחומי קעירות כלפי מטה לפונקציה:

32.4 א. $f(x) = (x + 1)^4$ ב. $f(x) = x^4 - 6x^2 + 4$

ג. $f(x) = -x^3 + 5x^2$ ד. $f(x) = x^4 - 2x^3$

32.5 מצאו את נקודות הפיתול של הפונקציות:

א. $f(x) = \cos x, -\pi < x < \pi$ ב. $f(x) = x^5 - 80x^2$

ג. $f(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x$ ד. $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, -\pi < x < \pi$

ה. $f(x) = \sin x, 0 < x < 2\pi$ ו. $f(x) = \frac{1}{20}x^5 + 4x^2$ ז. $f(x) = \frac{1}{10}x^5 - 8x^2$

תרגילים אינטראקטיביים עם פתרונות

מצאו תחומי קעירות כלפי מעלה ומטה ונקודות פיתול של הפונקציות:

32.6 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

32.7 $f(x) = (x^2 - 4x + 3)^2$

32.8 $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$

שאילתות מפתח

תרגילים אינטראקטיביים

ChatGPT

תרגיל 5-3-2 מצאו את תחומי הקעירות של הפונקציה:

$y = x^4 - 12x^3 + 48x^2$.

תרגיל 5-5-2 מצאו את נקודות הפיתול של הפונקציה:

$y = 3x^5 + 5x^4 - 2x + 4$

תשובות

32.1 ב) $(6x - x_3)\cdot\sin x + 6x^2\cdot\cos x$ ד) $12x^2 - 18x$

32.2 א) $168(x-1)^5$ ב) $56\sin^6 x\cdot\cos^2 x - 8\sin^8 x$ ג) $42\cos^5 x\cdot\sin^2 x - 7\cos^7 x$

32.3 $\frac{x(3+2x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$

32.4 ב) קעורה כלפי מעלה בקטעים: $x < -1$ ו- $x > 1$, קעורה כלפי מטה בקטע $-1<x<1$

ג) קעורה כלפי מעלה בתחום: $x > 1\frac{2}{3}$, קעורה כלפי מטה בתחום: $x < 1\frac{2}{3}$

ד) קעורה כלפי מעלה בתחום: $0 < x < 1$, קעורה כלפי מטה: $x < 0, x > 1$

32.5 א) $x = \frac{\pi}{2}$ ב) 2 ד) $\arccos(\frac{1}{4})$ ה) $x = \pi$ ו) $x = 2$ ז) $x = 2$

32.6 נקודות פיתול: $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

קעורה כלפי מעלה: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, קעורה כלפי מטה: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$

32.7 נקודות פיתול: $x_1 = 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}, x_2 = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$

קעורה כלפי מטה: $(2 - \frac{1}{\sqrt{3}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{3}})$,

קעורה כלפי מעלה: $(-\infty, 2 - \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (2 + \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$

32.8 נקודות פיתול: $x_1 = -1, x_2 = 1$,

קעורה כלפי מטה: $(-1, 1)$, קעורה כלפי מעלה: $(-\infty, -1) \cup (1, +3)$

העשרה

כיצד אפשר "להרגיש" נגזרת?

התופעה ממנה הגיעו למושג של נגזרת היא תנועה בקו ישר (נסמן אותו כציר x):
את מקום הגוף אפשר לקבוע כמרחק מנקודת התחלת התנועה (ראשית הציר), ולסמן אותו כשיעור x. מקומו של הגוף משתנה במהלך התנועה כפונקציה של זמן t (משתנה בלתי תלוי) – $x(t)$.

נדמיין כי הגוף הוא קרון רכבת או מטוס, ואנחנו נמצאים בתוכו. האם נרגיש הבדל בין מקום x_1 כלשהו למקום אחר x_2? אם הנוף הוא אחיד (או חלונות אטומים), לא נרגיש שינוי מקום, כלומר לא נרגיש הבדל בין $x_1 = x(t_1)$ לבין $x_2 = x(t_2)$.

האם נרגיש שונה בנסיעה איטית או מהירה? נזכירכם כי עבור תנועה שוות-מהירות מהירות שווה ליחס בין דרך לזמן: $v = \frac{x}{t}$, עבור תנועה במהירות משתנה מהירות

העשרה

ממוצעת בפרק זמן Δt שווה ליחס $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$, *המהירות רגעית* (מהירות ברגע מסוים) שווה לנגזרת של x: $v(t) = \frac{dx}{dt} = x'(t)$

דוגמה 1

מקומה של המכונית הנוסעת בקו ישר משתנה בזמן עפ"י הנוסחה: $x = 50t$,
כאשר t נמדד בשעות (h), ו- x בקילומטרים (km).
מצאו את מהירות המכונית כפונקציה של זמן.

$$v = x'(t) = (50t)' = 50$$

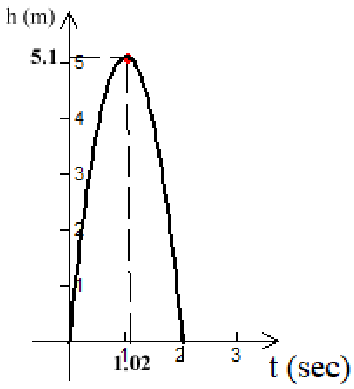
אולם, שימו לב: המהירות v היא לא מספר טהור, אלא גודל עם יחידות. מה הן?
נתבונן ברישום הנגזרת כמנה $\frac{dx}{dt}$: $v(t) = \frac{dx}{dt}$.
מכאן נובע כי יחידות המהירות הן: $[v] = \frac{[dx]}{[dt]} = \frac{km}{h}$,
לכן התשובה המלאה היא: $v = 50\ \frac{km}{h}$.

דוגמה 2

זורקים אבן כלפי מעלה במהירות התחלתית $10\ \frac{m}{sec}$.
גובה האבן h מעל הקרקע תלוי בזמן לפי הנוסחה: $h(t) = 10t - 4.9t^2$.

א. מהי התלות של מהירות האבן בזמן?

ב. לאיזה גובה מקסימלי תגיע האבן?



א. מהירות שווה לנגזרת ראשונה של מקום (גובה) בזמן
$= h'(t) = (10t - 4.9t^2)' = 10 - 2 \cdot 4.9t = \underline{10 - 9.8t}$

ב. את הגובה הקסימלי אפשר לחשב בשתי דרכים:

<u>דרך ראשונה</u>

הפונקציה $h(t)$ היא פונקציה ריבועית:

$$h(t) = 10t - 4.9t^2$$

הגרף שלה – פרבולה הפוכה, שיעורי הקדקוד:

$$h_m = 10 \cdot 1.02 - 4.9 \cdot 1.02^2 = 5.1\ (m),\quad t_m = 1.02\ sec$$

<u>דרך שנייה</u>

כדי למצוא את נקודת המקסימום של פונקציה

יש להשוות לאפס את הנגזרת $h(t) = 10t - 4.9t^2$:$h'(t) = 10 - 9.8t$

$$10 - 9.8t_m = 0,\ t_m = 1.02\ (sec)$$

נציב לביטוי של פונקציה: $h_m = 10 \cdot 1.02 - 4.9 \cdot 1.02^2 = 5.1\ (m)$ ▷

אם הרכבת נוסעת חלק, ואין לנו אפשרות להביט החוצה, לא נרגיש את מהירות התנועה. מסתבר כי אף מערכת חיישנים רגישים יהיו אשר יהיו לא "תחוש" את התנועה בקו ישר במהירות קבועה, ולא תוכל לקבוע האם הקרון נע או נייח.

טענה זו מכונה "עקרון היחסות" והיא נוסחה לראושנה על-ידי אבי המכניקה גלילאו גליליי במאה 16, ואומתה בניסויים רבים שערכו הפיסיקאים מאז.

<u>מכאן נסיק כי איננו "מרגישים" גם את הנגזרת הראשונה של מקום בזמן!</u>

ומהי המשמעות לנגזרת שנייה של המרחק בזמן $x''(t)$?

כיוון שמשעות הנגזרת הראשונה $x'(t)$ היא מהירות v (*קצב שינוי המרחק* x), נסיק כי משמעות הנגרת השנייה $x''(t)$ היא *קצב שינוי המהירות* $v'(t)$, המכונה **תאוצה**.

בדוגמה 2 ראינו כי אבן הנזרקת כלפי מעלה נעה בתאוצה.

גם מכונית *מאיצה* (נוסעת בתאוצה) בתחילת הנסיעה ומאטה (תאוצה שלילית) לפני עצירתה.

מסתבר שתנועה בתאוצה מתרחשת כאשר על גוף פועל כוח חיצוני (טענה זו נקראת *החוק השני של ניוטון*). נכונה גם טענה הפוכה (*החוק הראשון של ניוטון*):

כאשר על גוף לא פועלים כוחות חיצוניים, מהירותו נשארת קבועה (הוא נע בתנועה קצובה, או במקרה פרטי - במהירות אפס כלומר, הגוף נייח).

כאשר אנחנו נמצאים בתוך מכונית שמאיצה, אנו מרגישים דחף מגב המושב עליו אנו יושבים. גם כל הגופים האחרים בתוך המכונית "מרגישים" את התאוצה: כולם זזים או נוטים אחורה.

כיוון שמשמעות התאוצה היא *נגזרת שנייה* של מקום (x) בזמן (t) - $x''(t)$, אפשר להסיק, כי בהקשר לפונקציה של מרחק של גוף נע בזמן $x(t)$, הגוף אינו "רגיש" לערכו של x, וגם לא לערכה של נגזרת ראשונה $x'(t)$ – המהירות, וכן רגיש לערכה של נגזרת שנייה - $x''(t)$ – התאוצה.

ההסבר הפיזיקלי: תאוצה נגרמת עקב הפעלת כוח, אותו הגוף מרגיש.

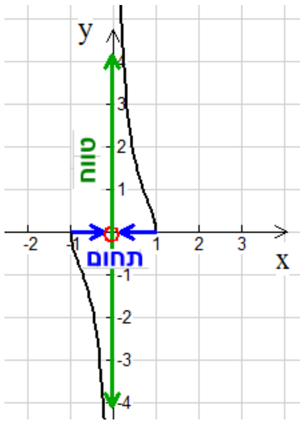
33.1 תחום הגדרה של פונקציות עם שורשים

ביטויים עם שורשים נקראים ביטויים *אי-רציונליים*. לדוגמה:

$$\sqrt[3]{3x^2+y^2},\ \sqrt{x^2+\sqrt{y^2}+\sqrt[3]{z}}$$

אם מעלת השורש זוגית (כמו: שורש ריבועי, שורש ממעלה רביעית וכדו'), אזי ערך מספרי לביטוי בתוך השורש חייב להיות אי-שלילי.

נשתמש בטכניקה אלגברית של פתרון אי-שוויונות כדי למצוא תחום הגדרה של פונקציות מורכבות יותר.



דוגמה 1 מצאו את תחום ההגדרה של פונקציה

$f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

שני תנאים צריכים להתקיים: $1-x^2\geq 0$ ו- $x\neq 0$.

פתרון האי שוויון: $x^2\leq 1$, $-1\leq x\leq 1$.

תשובה: תחום ההגדרה מכיל שני קטעים:

$0<x\leq 1$ ו- $-1\leq x<0$.

או ברישום של תורת הקבוצות:

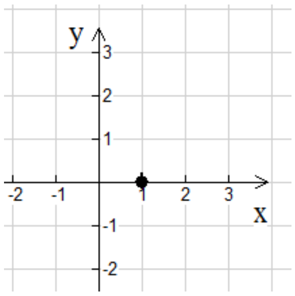
$x\in[(-1,0)\cup(0,1)]$

טווח: כאשר $x=1$: $y=0$; כאשר $0<x<1$: $0<y<\infty$;

כאשר $x<0$: $-\infty<y<0$;

לכן y יכול לקבל את כל הערכים בין $-\infty$ ל- $+\infty$: <u>$-\infty<y<\infty$.</u>

דוגמה 2 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}$.



שני תנאים צריכים להתקיים: $1-x\geq 0$ ו- $x-1\geq 0$.

מהראשון נובע: $x\leq 1$, מהשני: $x\geq 1$.

התחום המשותף: $x=1$.

תשובה: תחום ההגדרה הוא נקודה אחת $x=1$.

טווח הערכים: נקודה אחת $y(1)=0$.

דוגמה 3 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{-x}$.

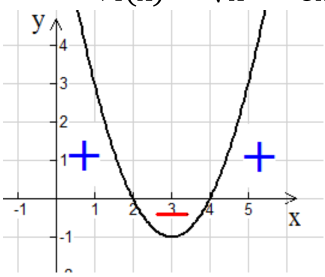
◀ שני תנאים צריכים להתקיים: $x - 1 \geq 0$ ו- $-x \geq 0$.

מהראשון מקבלים: $x \geq 1$, מהשני: $x \leq 0$. <u>למערכת אין פתרון</u>.

תחום ההגדרה וטווח הערכים הם קבוצות ריקות: $x, y \in \varnothing$.

☜ **חשבו**: כיצד נראה גרף הפונקציה?

דוגמה 4 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$.



◀ התנאי שצריך להתקיים: $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

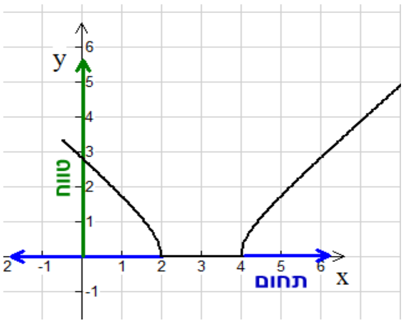
נמצא את שורשי הטרינום $x^2 - 6x + 8$:

$x_1 = 2, x_2 = 4$

ונשרטט את הפרבולה $y = x^2 - 6x + 8$:

בגרף רואים שפתרון האי שוויון הוא שני תחומים:

$x \leq 2$ ו- $x \geq 4$.



תחום ההגדרה של הפונקציה, אם כן, הוא איחוד

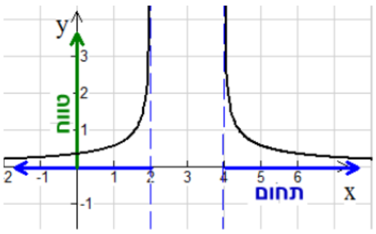
שני הקטעים: <u>$x \leq 2$ ו- $x \geq 4$</u>.

בסימנים של תורת הקבוצות:

$x \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$.

דוגמה 5 מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+8}}$$



◀ פונקציה זאת מוגדרת בכל הנקודות x שבהן המכנה

אינו מתאפס $(x^2 - 6x + 8 \neq 0)$.

והביטוי בתוך השורש אינו שלילי: $x^2 - 6x + 8 \geq 0$.

שילוב שני התנאים שקול לאי שוויון אחד: $x^2 - 6x + 8 > 0$.

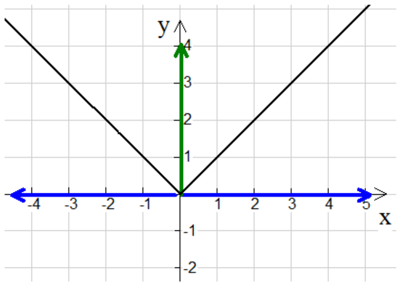
נתבונן בגרף הפרבולה שבדוגמה 4 ונרשום את הפתרון:

$x > 4$ ו- $x < -2$, או: $x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty)$; טווח הערכים: $0 < y < \infty$.

דוגמה 6. תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = |x|$

הוא כל ציר המספרים $-\infty < x < \infty$;

הטווח : כל המספרים האי-שליליים $y \geq 0$.



תרגילים

מצאו את תחום ההגדרה ואת טווח הערכים של הפונקציות :

33.1 א) $f(x) = \sqrt{x^2+13}$ ב) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

ג) $f(x) = \sqrt{x^2+24}$ ד) $f(x) = \sqrt{22+x^2}$

33.2 א) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ ב) $f(x) = \sqrt{7-x^2}$

ג) $f(x) = \sqrt{x^2-144}$ ד) $f(x) = \sqrt{20-x^2}$

33.3 א) $f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ ב) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{3}x^2-3}$

ג) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{5}x^2-5}$ ד) $f(x) = \sqrt{x^2-5x}$

33.4 א) $f(x) = \sqrt{x^2-6x+5}$ ב) $f(x) = \sqrt{-x^2+3x+4}$

ג) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$ ד) $f(x) = \sqrt{-2+x+x^2}$

תשובות

33.1 א) כל x, $f \geq \sqrt{13}$ ב) כל x, $f \geqslant 1$

ג) כל x, $f \geq 2\sqrt{6}$ ד) כל x, $f \geq \sqrt{22}$

33.2 א) $x \leqslant -3,\ x \geqslant 3,\ f \geqslant 0$ ב) $-\sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$, $0 \leq f \leq \sqrt{7}$

ג) $x \geqslant 12,\ f \geqslant 0$ ד) $-2\sqrt{5} \leq x \leq 2\sqrt{5},\ \ 0 \leqslant f \leqslant 2\sqrt{5}$

33.3 א) $0 \leqslant x \leqslant 2,\ 0 \leqslant f \leqslant 1$ ב) $-3 \leqslant x \leqslant 3,\ f \geqslant 0$

ג) $-5 \leqslant x \leqslant 5,\ f \geqslant 0$ ד) $0 \leqslant x \leqslant 5,\ f \geqslant 0$

33.4 א) $1 \leqslant x \leqslant 5,\ f \geqslant 0$ ב) $-1 \leqslant x \leqslant 4,\ 0 \leqslant f \leqslant 2.5$

ג) $2 \leqslant x \leqslant 3,\ f \geqslant 0$ ד) $-2 \leqslant x \leqslant 1,\ f \geqslant 0$

33.2 משוואה עם שורשים

משוואה שלפחות אחד מהנעלמים בה מופיע בתוך שורש נקראת משוואה **אי רציונלית** או משוואה עם שורשים.

דוגמאות: $\sqrt{x+2} = 5,\ \frac{1}{\sqrt{3-5y}} = 2y + \sqrt{y},\ 8z - 5 = \sqrt{1-z} + 2\sqrt{z-7}$

שימו לב:

אם בשורשים שמופיעים במשוואה אין נעלמים, המשוואה אינה שייכת לסוג של משוואות אי רציונליות. לדוגמה: המשוואות

$$\sqrt{2}x = 5 - 7x,\ \frac{1}{\sqrt{3}} = 2y + \sqrt{5},\ 8z - 5 = \sqrt{3} + 2\sqrt{7}z$$

<u>אינן</u> משוואות אי רציונליות.

כדי לפתור משוואה שבה נעלם מופיע בתוך שורש ריבועי, צריך לבודד את השורש, להעלות את שני אגפי המשוואה בריבוע, וכך "להיפטר" מהשורש.

דוגמה 7 פתרו את המשוואה: $\sqrt{7x-5} + 1 = x + 2$.

פתרון נבודד את השורש: $\sqrt{7x-5} = x + 1$.

נעלה בריבוע את שני האגפים: $7x - 5 = x^2 + 2x + 1$

נעביר אגפים, נכנס איברים דומים ונקבל משוואה ריבועית: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

נפתור אותה: $x_1 = 2,\ x_2 = 3$. ▷

☜ אולם העלאת אגפי המשוואה בריבוע גורמת להופעת שורשים זרים!

מדוע זה קורה? נתבונן בשתי משוואות שונות:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \qquad (A)$$

ו- $$\sqrt{f(x)} = -g(x) \qquad (B)$$

נעלה בריבוע את אגפי המשוואות בהתאמה:

$(A)^2$: $f(x) = (g(x))^2$

$(B)^2$: $f(x) = (-g(x))^2 = (g(x)^2$

כלומר קיבלנו שתי משוואות זהות!

פתרון המשוואה שהתקבלה הוא איחוד הפתרונות של שתי המשוואות (A) ו- (B), וכדי לקבל פתרון של אחת מהן יש לסנן את הפתרון של המשוואה השנייה (שבמקרה זה נקרא שורש "זר"). הדרך הפשוטה לגלות שורש זר הוא באמצעות בדיקת הפתרון.

דוגמה 8 פתרו את המשוואה: $\sqrt{7x-5}-2x=5-3x$.

פתרון נבודד את השורש: $\sqrt{7x-5}=5-x$.

נעלה בריבוע את שני האגפים: $7x-5=25-10x+x^2$

נעביר אגפים, נכנס איברים דומים ונקבל משוואה ריבועית: $x^2-17x+30=0$.

נפתור אותה: $x_1=15,\ x_2=2$.

בדיקה נציב את הפתרונות במשוואה: $x=2$:

$$\sqrt{7x-5}=\sqrt{14-5}=\sqrt{9}=3=5-2$$

נציב $x=15$: $\sqrt{7\cdot 14-5}=\sqrt{105-5}=\sqrt{100}=10\ \neq 5-3\cdot 15=\ -40$

לכן מסיקים כי <u>$x=15$ הוא שורש זר</u>.

תשובה: $x=2$. ▷

מסקנה: אם במהלך פתרון משוואה מעלים אותה בריבוע, חייבים להציב את הפתרונות במשוואה המקורית ולבדוק אותם.

במשוואה יכולים להיות כמה שורשים.

במקרה זה מפרידים שורשים שונים באגפים שונים של המשוואה, מעלים את שני האגפים בריבוע ו"מתפטרים" מהשורשים.

דוגמה 9 פתרו את המשוואה $\sqrt{2x-3}-\sqrt{6-x}=0$.

פתרון נפריד את השורשים, נעלה בריבוע ונפתור:

$$2x-3=6-x,\ 3x=9,\ x=3\sqrt{2x-3}=\sqrt{6-x},$$.

בדיקה: $\sqrt{2\cdot 3-3}=\sqrt{3},\sqrt{6-3}=\sqrt{3}$.

תשובה: $x=3$. ▷

שורשים המכילים נעלמים יכולים להופיע גם במשוואה עם שברים.

דוגמה 10 פתרו את המשוואה $\frac{2}{\sqrt{x+3}}-\frac{3}{\sqrt{2-x}}=0$

פתרון נפריד את השורשים, נעלה בריבוע ונפתור: $\frac{2}{\sqrt{x+3}}=\frac{3}{\sqrt{2-x}}$,

$$\frac{4}{x+3}=\frac{9}{2-x},4\cdot(2-x)=9\cdot(x+3),8-4x=9x+27,13x=-19,x=-\frac{19}{13}$$

בדיקה :

$$\frac{2}{\sqrt{x+3}}=\frac{2}{\sqrt{-\frac{19}{13}+3}}=\frac{2\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{39-19}}=\frac{2\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{20}}=\frac{2\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{4\cdot 5}}=\frac{2\cdot\sqrt{13}}{2\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2-x}}=\frac{2}{\sqrt{2+\frac{19}{13}}}=\frac{3\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{26+19}}=\frac{3\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{45}}=\frac{3\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{9\cdot 5}}=\frac{3\sqrt{13}}{3\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{5}}$$

לכן הפתרון שמצאנו מתאים.

תשובה : $x=-\frac{19}{13}$ ▷

תרגילים

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

33.5 א) $3x-10\sqrt{x+1}+6=0$ ב) $2\sqrt{x-1}-5=\frac{3}{\sqrt{x-1}}$

ג) $\sqrt{6-4x-x^2}=x+4$ ד) $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$

33.6 א) $\sqrt{x^2-16}=x^2-22$ ב) $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$

ג) $\sqrt{x^2+9}=x^2-11$ ד) $\sqrt{2x^2-3}-\sqrt{6-x^2}=0$

33.7 א) $\sqrt{225+x^2}=x^2-47$ ב) $\sqrt{x^2+36}=x^2-54$

ג) $\frac{x-\sqrt{x+5}}{x+\sqrt{x+5}}=\frac{1}{7}$ ד) $2x+2\sqrt{625-x^2}=70$

תשובות

33.5 א) $-\frac{8}{9}, 8$ ב) 10 ג) -1 ד) 3, -1

33.6 א) -5, 5 ב) $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ ג) 4, -4 ד) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$

33.7 א) -8, 8 ב) -8, 8 ג) 4 ד) 20, 15

שאילתות מפתח

תרגילים אינטראקטיביים

ChatGPT

תרגיל 1. פתרו את המשוואה הבאה:

$$\sqrt{2x+83}=4x-5$$

תרגיל 2. פתרו את המשוואה הבאה:

$$\sqrt{3x^2+14x-4}=2x+2$$

תרגיל 3. פתרו את המשוואה הבאה:

$$\sqrt{4x^2-3}=\sqrt{22-12x^2}$$

בתנאי ש - $4x^2-3>0$, $22-12x^2>0$

תרגיל 4. פתרו את המשוואה הבאה:

$$\sqrt{4x+10}=\sqrt{x+6}+2$$

בתנאי ש- $4x+10>0$, $x+6>0$

תרגיל 5. פתרו את המשוואה הבאה:

$$3\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}}-32\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+3}}=4$$

34. פונקציה $\frac{1}{f(x)}$

במקרים רבים ידיעת גרף הפונקציה f(x) מאפשרת לבנות גרף של פונקציה $\frac{1}{f}$, שערכיה הפוכים לערכי הפונקציה f, כלומר $\left(\frac{1}{f}\right)(x)=\frac{1}{f(x)}$. אם פונקציה f(x) מוגדרת בתחום D, אזי באותו תחום מוגדרת כם פונקציה $\frac{1}{f}$ (מלבד הנקודות שבהן פוקנציה f מתאפסת).

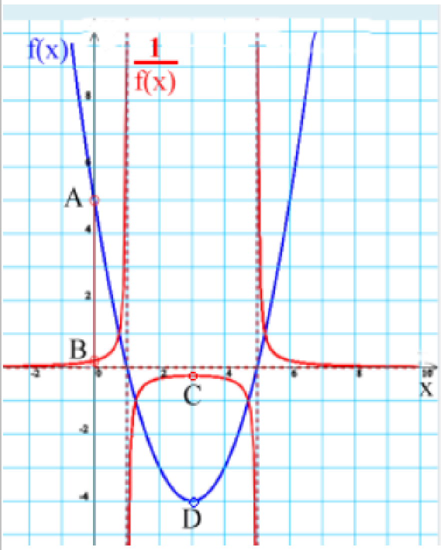
בטבלה הבאה אפשר לראות את הקשרים בין תכונות הפונקציה $\frac{1}{f}$ לתכונות הפונקציה f, ולהיעזר בה כדי לבנות גרף הפונקציה $\frac{1}{f}$:

פונקציה	תחום הגדרה	זוגיות	תחום עלייה/ירידה	סוג נקודת קיצון
f	D	f – זוגית (f – אי-זוגית)	f(x) עולה (f(x) יורדת)	x_0 – נקודת מינימום (x_0 – נקודת מקסימום)
$\frac{1}{f}$	D, מלבד הנקודות שבהן f(x) = 0	$\frac{1}{f}$ – זוגית ($\frac{1}{f}$ – אי-זוגית)	$\frac{1}{f}$ יורדת ($\frac{1}{f}$ עולה)	x_0 – נקודת מקסימום (x_0 – נקודת מינימום)

דוגמה 1 בנו גרף של פונקציה: $y(x) = \frac{1}{x^2-6x+5}$

◄ נגדיר $f(x) = x^2 - 6x + 5$. פונקציה f(x) מתאפסת בנקודות $x_1 = 1, x_2 = 5$, לכן תחום ההגדרה של פונקציה $\frac{1}{f(x)}$ מהווה שלושה קטעים: $(-\infty, 1), (1, 4), (5, +\infty)$.

הישרים x = 1 ו- x = 5 הם אסימפטוטות אנכיות (המקבילות לציר y).



נתחת גרפים של שתי הפונקציות בכל אחד מהקטעים בעזרת הטבלה:

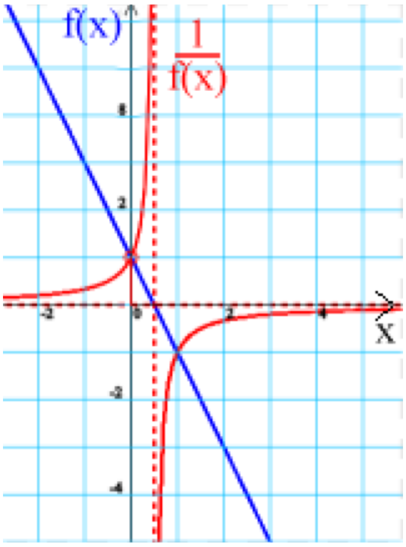
1. בתחום $(-\infty, 1)$ פונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 5$ חיובית, יורדת וגרף שלה חותך את הציר y בנקודה A(0, 5). לכן פונקציה $\frac{1}{x^2-6x+5}$ בקטע זה חיובית, עולה, וגרף שלה חותך ציר y בנקודה $B(0, \frac{1}{5})$. כאשר ערך של x גדֵל ומתקרב ל- 1, ערך של y גדֵל ושאוף לאינסוף; לכן הישר x = 1 מהווה אסימפטוטה אנכית.

.2 בקטע (1, 5) ערכי הפונקציה $f(x) = x^2 – 6x + 5$ שליליים, היא יורדת בתחום (1, 3) ועולה בקטע (3, 5), ויש לה נקודת מינימום D(3, -4); לכן בתחום זה שליליים גם ערכי הפונקציה $\frac{1}{x^2-6x+5}$, אשר עולה בתחום (1, 3) ויורדת בתחום (3, 5), ובנקודה $x = 3$ יש לה נקודת מקסימום, כאשר $y_{max} = \frac{1}{3^2-6\cdot3+5} = -\frac{1}{4}$.

כאשר x מתקרב לנקודה $x = 5$, ערכי הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ גְדֵלים עד אינסוף, כלומר הישר $x = 5$ מהווה אסימפטוטה אנחית.

.3 בתחום $(5, +\infty)$ פונקציה $f(x) = x^2 – 6x + 5$ חיובית ועולה, לכן בתחום זה הפונקציה $\frac{1}{x^2-6x+5}$ חיובית ויורדת. כאשר ערכי x גְדֵלים עד אינסוף $(x \to +\infty)$ ערכי הפונקציה הולכים ומתקרבים לאפס, לכן גרף הפונקציה $\frac{1}{f(x)}$ מתקרב לציר x, שיהווה במקרה זה אסימפטוטה אופקית $y = 0$. ▷

דוגמה 2 חקרו את גרף הפונקציה: $y(x) = \frac{1}{1-2x}$



◀ פונקציה $f(x) = 1 – 2x$ מוגדרת בכל ציר x, יורדת, ומתאפסת בנקודה $x = \frac{1}{2}$. לכן הפונקציה $\frac{1}{1-2x}$ מוגדרת בכל x מלבד $x = \frac{1}{2}$.

בנקודה זו, ערכי הפונקציה $\frac{1}{1-2x}$ שואפים לאינסוף $(y \to \infty)$, כלומר, הישר $x = \frac{1}{2}$ מהווה אסימפטוטה אנחית. בתחום $(\frac{1}{2} < x < \infty)$, כאשר x גדל עד לאינסוף $(x \to +\infty)$, ערכי הפונקציה מתקרבים לציר x, כלומר הישר $y = 0$ מהווה אסימפטוטה אופקית.

לפונקציה $f(x) = 1 – 2x$ אין נקודות קיצון, כך גם לפונקציה $y(x) = \frac{1}{1-2x}$. ▷

תרגילים

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

34. בנו וחקרו את גרף הפונקציה :

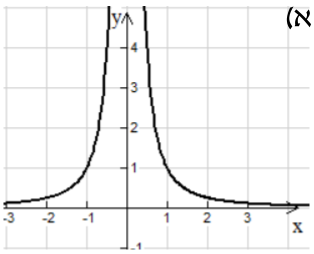
א) $y(x) = \frac{1}{x^2}$ ב) $y(x) = -\frac{3}{x^2}$ ג) $y(x) = \frac{1}{x^2-8x+15}$

ד) $y(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ ה) $y(x) = \frac{1}{x^2+4}$

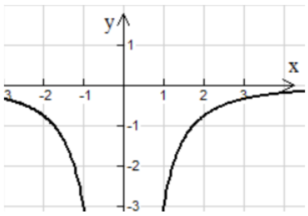
תשובות

34.

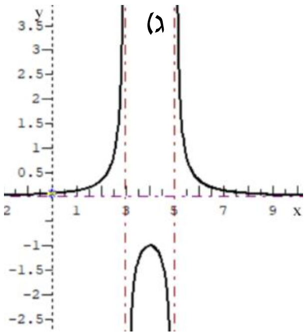
א)



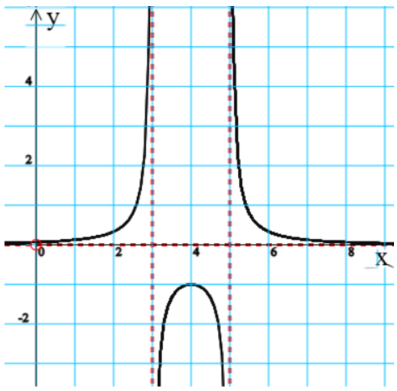
ב)



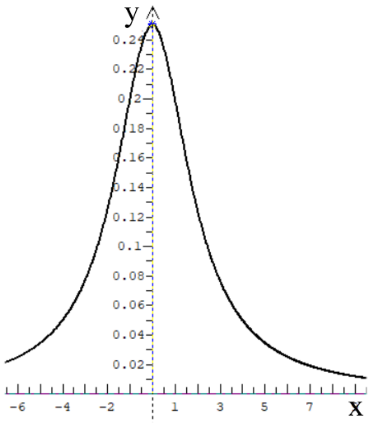
ג)



ד)



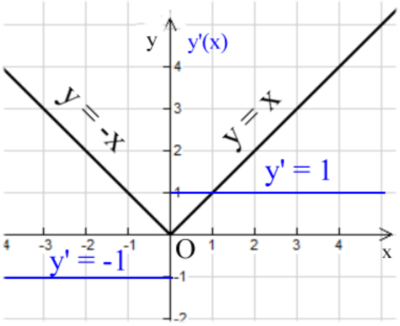
ה)



35. פונקציית שורש ריבועי וערך מוחלט

נזכירכם את ההגדרה של שורש ריבועי: $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, & a \geqslant 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$ (1)

משמעות ההגדרה הזו היא שפונקציית שורש ריבועי כוללת שני ענפים.



לדוגמה, נתבונן בגרף הפונקציה $y = \sqrt{x^2}$:

הוא מורכב משני ענפים: $y = x$ בתחום $x \geqslant 0$,

ו- $y = -x$, כאשר $x < 0$. בגרף רואים כי פונקציה

יורדת בתחום $-\infty < x < 0$, עולה בתחום $0 \leqslant x < \infty$,

ויש לה נקודת מינימום בנקודה $x = 0$.

שימו לב! נקודה זו אינה נקודת קיצון (כיוון שבנקודה זו פונקציית הנגזרת לא מוגדרת: בשאיפת (התקרבות) x לנקודה x=0 משמאל $y'(0) = -1$, ובשאיפה מימין: $y'(0) = 1$).

$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

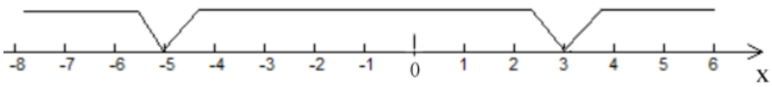
המערכת בצד ימין של (1) תואמת להגדרה של ערך מוחלט:

לכן בהמשך נשתמש ברישום: $\sqrt{x^2} = |x|$.

כדי לנתח את הפונקציה המכילה איברים עם ערך מוחלט, צריך לרשום אותה באופן מפורט (כמערכת) בהתאם להגדרת הערך המוחלט של כל איבר המכיל אותו.

לדוגמה: בנו גרף הפונקציה $y(x) = \frac{1}{|x-3|-|x+5|}$.

נרשום את הפונקציה בתחומים המאפיינים את הערכים המוחלטים:

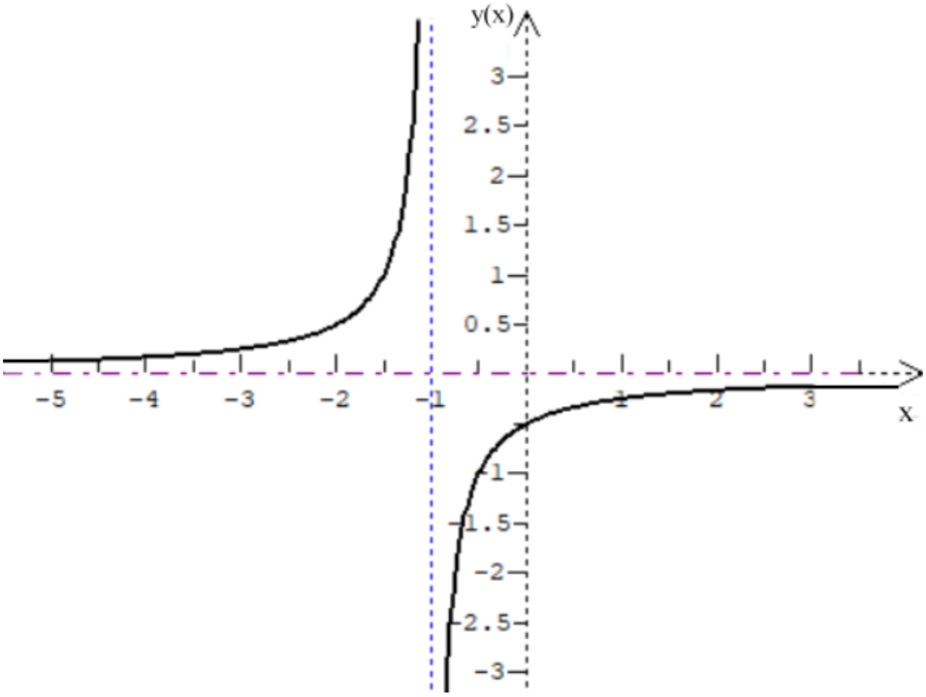


בתחום $x < -5$: $x - 3 < 0, x + 5 < 0, y(x) = \frac{1}{(3 - x) - (-x - 5)} = \frac{1}{8}$

בתחום $-5 < x < 3$: $x - 3 < 0, x + 5 > 0, y(x) = \frac{1}{(3 - x) - (x + 5)} = \frac{1}{-2x - 2}$

בתחום $3 < x < \infty$: $x - 3 > 0, x + 5 > 0. y(x) = \frac{1}{(x - 3) - (x + 5)} = -\frac{1}{8}$

נשרטט גרפים של y(x) בכל אחד משלושת התחומים, ונקבל גרף הפונקציה:



שימו לב: כאשר x שואף לאינסוף (למעשה, כבר עבור $x > 3$) גרף הפונקציה y(x) הוא ישר המבקיל לציר x, כלומר <u>אסימפטוטה אופקית</u> $y = -\frac{1}{8}$, וכאשר x שואף למינוס אינסוף (למעשה, כבר עבור $x < -5$), גרף הפונקציה y(x) הוא ישר המבקיל לציר x, כלומר <u>אסימפטוטה אופקית</u> $y = \frac{1}{8}$.

תרגילים

מחשבון אלגברי
שרטוט גרפים

35. בנו וחקרו את גרף הפונקציה הכוללת ערך מוחלט:

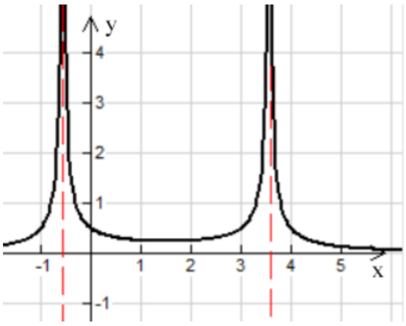
א) $y(x) = \frac{1}{|x^2-3x-2|}$ ב) $y(x) = \frac{1}{|x^2-4|}$ ג) $y(x) = \frac{1}{|x-1|-|x+2|}$

ד) $y(x) = \frac{1}{|x|}$ ה) $y(x) = \frac{1}{|x-2|-2}$ ו) $y(x) = \frac{1}{|2x+5|-|x|}$

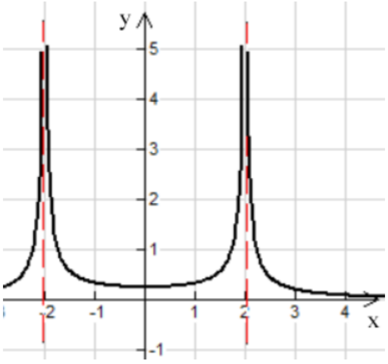
תשובות

.35

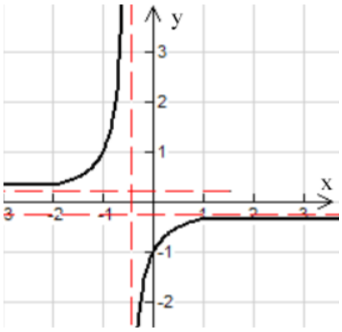
א)



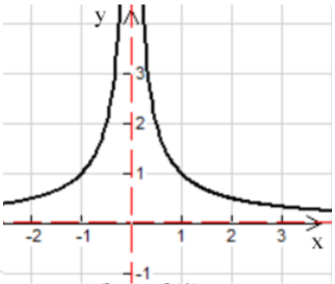
ב)



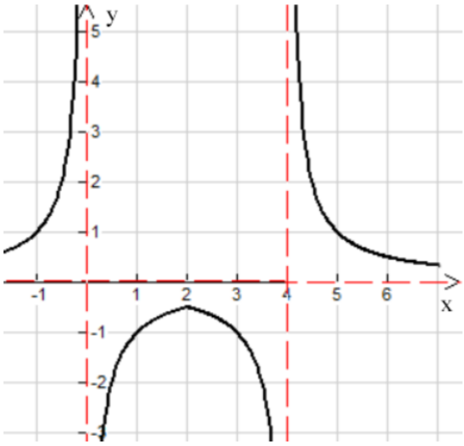
ג)



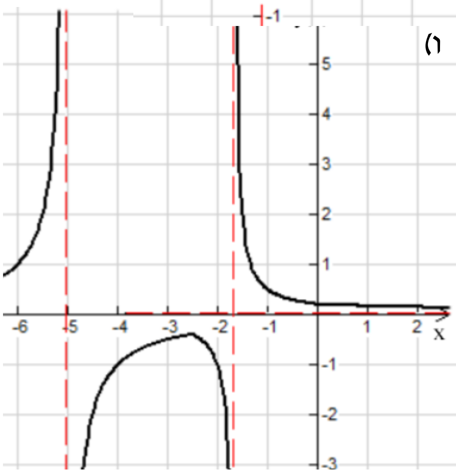
ד)



ה)



ו)



36. פונקציית שורש ואסימפטוטות

נזכירכם תנאים להופעת בגרף הפונקציה אסימפטוטות :

כאשר ערכי הפונקציה f(x) גְדֵלים עד לאינסוף בהתקרבות ערך של x לנקודה מסוימת :

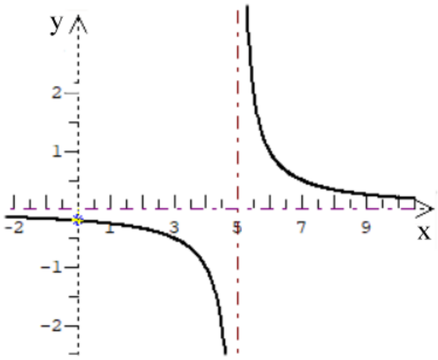
$x \to x_0 \rightarrow f(x_0) \to \infty$,

לישר $x = x_0$ קוראים *אסימפטוטה אנכית*.

דוגמאות :

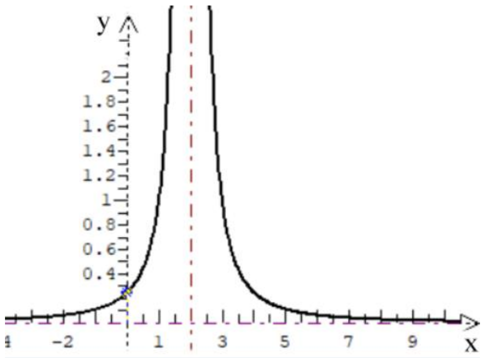
א. פונקציות בהן משתנה נמצא במכנה השבר, כאשר קיימים ערכי x המאפסים את מכנה ושאינם מאפסים את המונה :

$\frac{1}{x-5}$



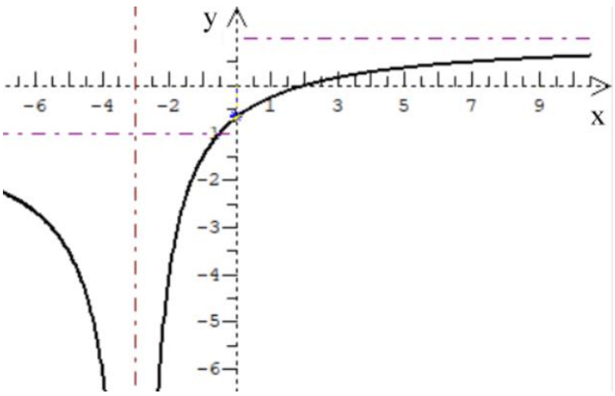
$x_0 = 5$

$\frac{1}{x^2-4x+4}$



$x_0 = 2$

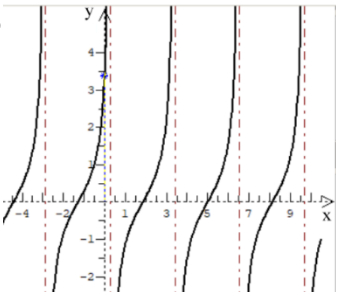
$\frac{x-2}{\sqrt{x^2+6x+9}}$



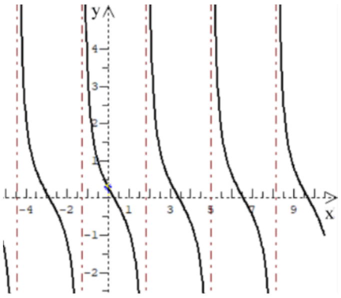
$x_0 = -3$

ב. פונקציות טריגונומטריות כמו $\tan x$ ו- $\cot x$:

tan (x-5)



cot (x-5)



אסימפטוטה אופקית היא ישר המקביל לציר x ($y = y_0$) אליו "מתקרב" גרף הפונקציה $f(x)$ כאשר ערכי x גְדלים עד אינסוף (או מינוס אינסוף). בשפה מתמטית: צריך לחשב גבול של פונקציה $f(x)$ כאשר $x \to +\infty$ או $x \to -\infty$. אם גבול זה הוא קבוע: $f(\pm\infty) = y_0$, אזי לישר $y = y_0$ קוראים אסימפטוטה אופקית של פונקציה $f(x)$.

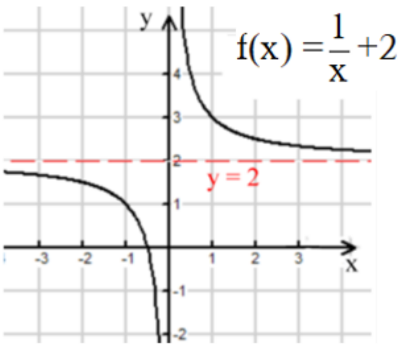
דוגמאות

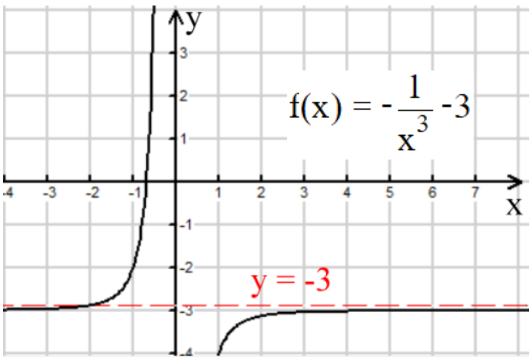
א. פונקציות מהסוג: $f(x) = \frac{1}{P(x)} + C$, $P(x)$ – פולינום מחזקה n, C – קבוע.

ברור, שכאשר $x \to \pm\infty$, גם החזקות של x שואפות לאינסוף, $\frac{1}{P(x)} \to 0$,

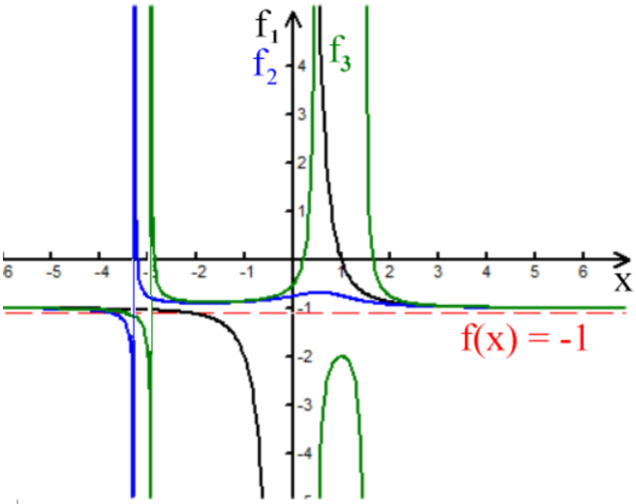
לכן $f(x) \to C$, כלומר ישר $y = C$ מהווה אסימפטוטה אופקית.

דוגמאות של פונקציות $P(x)$ – חזקה:





עבור פונקציות $P(x)$ – פולינום המכיל כמה חזקות נקבל:



$$f_1(x) = \frac{1}{x^3} - 1$$

$$f_2(x) = \frac{1}{x^3+4x^2-3x+4} - 1$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^3-3x^2+2x-6} - 1$$

מהגרפים אפשר לראות שלכל הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית $y = -1$.

גם אפשר לראות שכל הגרפים מתקרבים לגרף הפונקציה $f_1(x) = \frac{1}{x^3} - 1$ עבור ערכי x גדולים בערכם המוחלט ($x > 5$, $x < -5$). זה קורה כיוון שערכי האיברים בעלי מעריכים קטנים יותר זניחים ביחס לאיבר בעל המעריך הגבוה. לדוגמה:

$$5^3 = 125 >> 5^2 = 25 >> 5^1 = 5$$

לכן עבור ערכי x גדולים מאוד ($x \to \infty$), בביטוי של פולינום אפשר להשמיט את כל החזקות מלבד החזקה הגבוהה:

$$f_1(x) = \frac{1}{x^3} - 1,\ f_2(x) = \frac{1}{x^3+4x^2-3x+4} - 1 \approx \frac{1}{x^3} - 1,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^3-3x^2+3x-6} - 1 \approx \frac{1}{x^3} - 1$$

על-מנת לבדוק אם לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית, יש להציב בביטוי הפונקציה במקום x את ∞, ולהיעזר בכלל $\frac{\text{מספר}}{\infty^{\text{חזקה}}} = 0$.

הערה: רישום מסוג זה אינו מדויק, כיוון שלא ניתן לבצע פעולות אלגבריות על משתנה שערכו "אינסוף". הכלל הרשום מעלה מבטא את "שאיפת" הגודל לאפס, כלומר, את העובדה שהפרש בין הגודל הרשום ל- 0 יכול להיות קטן מאוד עבור ערכי x גדולים מספיק.

נציב בביטויי הפונקציות f_1, f_2, f_3 את $x = \infty$, ונקבל:

$$f_1(x) = \frac{1}{\infty^3} -1 = -1,\ f_2(x) = \frac{1}{x^3+4x^2-3x+4} -1 \approx \frac{1}{\infty^3} - 1 = -1,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^3-3x^2+3x-6} -1 \approx \frac{1}{\infty^3} - 1= -1$$

כלומר, לכל הפונקציות קיימת אסימפטוטה אופקית $y = -1$ עבור $x \to \infty$.

בדומה לכך, נציב בביטויי הפונקציות את $x = -\infty$, ניקח בחשבון כי גם $\frac{\text{מספר}}{(-\infty)^{\text{חזקה}}} = 0$

ונקבל:

$$f_1(x) = \frac{1}{(-\infty)^3} -1 = -1,\ f_2(x) = \frac{1}{x^3+4x^2-3x+4} -1 \approx \frac{1}{(-\infty)^3} - 1 = -1,$$

$$f_3(x) = \frac{1}{x^3-3x^2+3x-6} -1 \approx \frac{1}{(-\infty)^3} - 1= -1$$

כלומר, אותו הישר $y = -1$ מהווה אסימפטוטה אופקית לכל הפונקציות הנ"ל עבור ערכים שליליים של x.

ברם, לא לכל פונקציות קיימת אותה אסימפטוטה משני צדי ציר x!

דוגמה 1 מצאו אסימפטוטות אופקיות לפונקציה $\frac{x-2}{\sqrt{x^2+6x+9}}$.

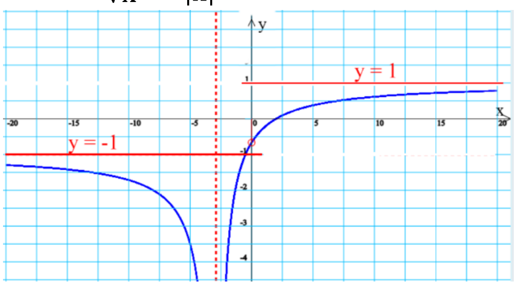
◄ א. נמצא ביטוי לפונקציה עבור $x \to +\infty$:

נשמיט את כל איברים במונה ובמכנה בעלי חזקה הנמוכה מהגבוהה ביותר:

$$f(x\to\infty) \approx \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \text{(כיוון ש-} x \text{ חיובי)} = \frac{x}{x} = 1$$

נמצא את הביחטוי לפונקציה עבור $x \to -\infty$:

$$f(x\to-\infty) \approx \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} = \text{(כיוון ש-} x \text{ שלילי)} = \frac{x}{-x} = -1$$



אסימפטוטות אופקיות שונות יכולות להופיע גם בפונקציות מסוג אחר.

דוגמה 2 מצאו אסימפטוטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{|x-5|}$.

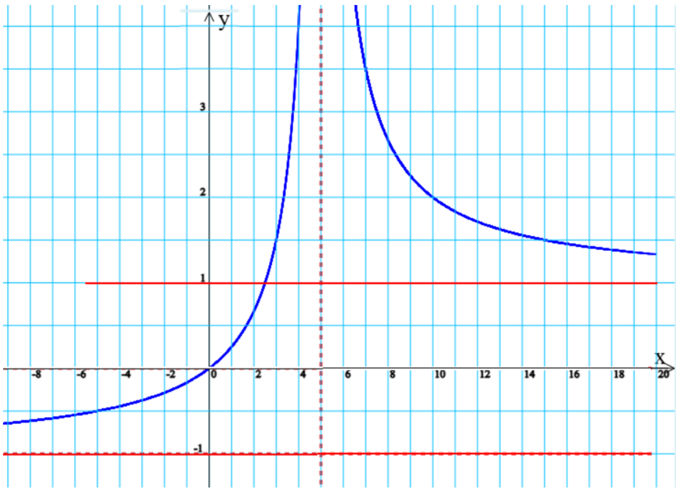
◄ אסימפטוטה אופקית:

עבור $x \geqslant 5$: $|x-5| = x-5$, $f(x\to\infty) = \frac{x}{x-5} \approx \frac{x}{x} = 1$, $y = 1$

עבור $x < 5$: $|x-5| = 5-x$, $f(x\to-\infty) = \frac{x}{5-x} \approx \frac{x}{-x} = -1$, $y = -1$

אסימפטוטה אנכית: $|x-5| = 0$, $x = 5$.

נוודא את התוצאה בגרף הפונקציה:



דוגמה 3 מצאו אסימפטוטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{4x^2-5}}{x-3}$.

◄ אסימפטוטה אנכית: $x-3 = 0$, $x = 3$;

אסימפטוטה אופקית: $f(x\to\infty) \approx \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \frac{2|x|}{x} = 2$, $y = 2$

$f(x\to-\infty) \approx \frac{\sqrt{4x^2}}{x} = \frac{2|x|}{x} = -2$, $y = -2$

תחום הגדרה: $4x^2-5 \geqslant 0$, $x^2 \geqslant \frac{5}{4}$, $x \leqslant -\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x \geqslant \frac{\sqrt{5}}{2}$

נוודא את התוצאה בגרף הפונקציה:

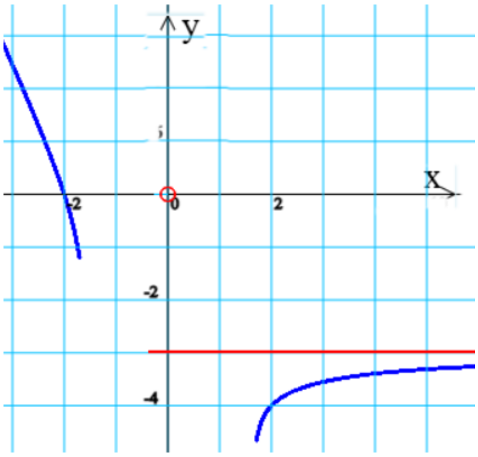
אסימפטוטות אופקיות יכולות להופיע גם בפונקציות ללא שברים.

דוגמה 4 מצאו אסימפטוטות של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3} - x - 3$.

◄ אסימפטוטה אופקית:

$f(x \to \infty) \approx$ (נשמיט -3 בתוך השורש) $= \sqrt{x^2} - x - 3 = x - x - 3 = -3$

נוודא בגרף:



שאילתות מפתח

תרגילים אינטראקטיביים

ChatGPT

תרגיל 5-3. מצאו את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה:

$$y = \frac{8x - 17}{4x^2 + 12x - 16}$$

תרגיל 5-4. מצאו את האסימפטוטה המקבילה לציר- x
(אסימפטוטה אופקית) של הפונקציה:

$$y = \frac{5x^2 - 5x - 3}{4x - 4x^2 - 2}$$

תרגיל 5-7. מצאו את האסימפטוטות של הפונקציה:

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}$$

תרגיל 4.3 מצאו את כל ערכי הפרמטר a שעבורם לפונקציה

$$y = \sqrt{16x^2 - 5x} - a \cdot x$$

קיימת אסימפטוטה אופקית כאשר $x \to \infty$, ומצאו אותה.

שאילתות מפתח | **תרגילים אינטראקטיביים** | ChatGPT

תרגול עם הסברים מפורטים – רמה א'

תרגיל 1. את המספר 32 יש להציג כסכום שני מספרים כאלה שסכום הריבועים שלהם יהיה מינימלי.

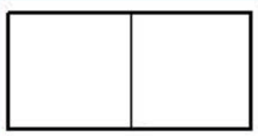
תרגיל 2. את המספר 22 יש להציג כסכום שני מספרים כאלה שסכום חזקות 3 שלהם יהיה מינימלי.

תרגיל 3. את המספר 28 יש להציג כסכום שני מספרים אי-שליליים כאלה שסכום חזקות 3 שלהם יהיה מקסימלי.

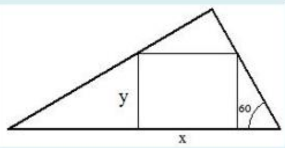
תרגיל 4. את המספר 576 יש להציג כמכפלת שני גורמים חיוביים כאלה שסכום ריבועיהם יהיה מינימלי.

תרגיל 5. את המספר 225 יש להציג כסכום של שלושה מחוברים חיוביים כאלה שיחס של שניים מהם יהיה כמו $(1:2)$, ומכפלה של שלושתם תהיה מקסימלית.

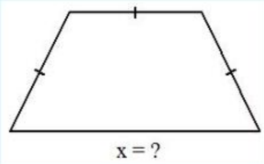
תרגיל 6. יש לגדר חלקה מלבנית ששטחה שווה ל- 2400 מ"ר, ולאחר מכן לחלק אותה לשתי חלקות באמצעות גדר. מה צריכים להיות אורך ורוחב החלקה על מנת שאורך כל הגדר יהיה מינימלי?



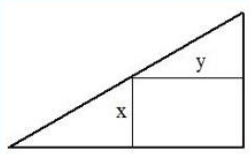
תרגיל 7. מלבן חסום במשולש ישר-זווית כך שבסיס המלבן נמצא על היתר של המשולש.
אורך היתר שווה ל- 32 ס"מ, ואחת מזוויות המשולש היא- $60°$.
מה צריכים להיות אורך ורוחב המלבן על-מנת ששטחו יהיה מקסימלי?



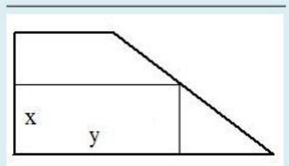
תרגיל 8. בטרפז שווה שוקיים אורך הבסיס הקטן שווה לאורך השוקיים - 34 ס"מ. מצאו את אורך הבסיס הגדול שעבורו שטח הטרפז יהיה מקסימלי.



תרגיל 9. מצאו צלעות של מלבן בעל שטח מקסימלי החסום במשולש ישר זווית בעל ניצבים של 22 ו- 12 ס"מ, וזווית ישרה משותפת עם המלבן.



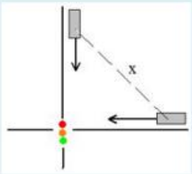
תרגיל 10. מצאו צלעות של מלבן בעל שטח מקסימלי, החסום בטרפז ישר זווית שבסיסיו 26 ו- 7 ס"מ, גובה - 14 ס"מ וזווית ישרה משותפת עם המלבן.



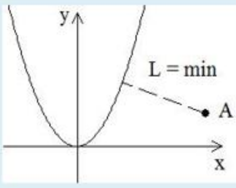
תרגול עם הסברים מפורטים – רמה ב׳

תרגיל 11. סכום אורכי האלכסונים של המקבילית שווה ל- 28 ס"מ. מצאו את הערך המינימלי של סכום הריבועים של אורכי כל צלעותיו.

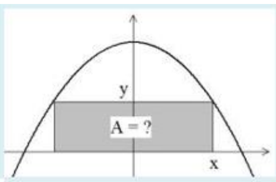
תרגיל 12. שתי מכוניות נוסעות במהירויות קבועות של- 44 ו- 67 קמ"ש ומתקרבות לצומת. ברגע מסוים המכוניות נמצאות במרחק של- 2 ו- 3 ק"מ בהתאמה מהצומת.
בהנחה שהכבישים הם ישרים ומאונכים מצאו, כעבור כמה זמן מרחק בין המכוניות יהיה מינימלי (שימו לב: הזמן שתמצאו הוא בשעות!)



תרגיל 13. מצאו שיעורי הנקודה על הפרבולה $y=3\cdot x^2$, אשר המרחק ממנה לנקודה $A\left(1,\frac{1}{6}\right)$ הוא מינימלי.

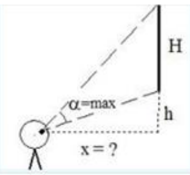


תרגיל 14. בין כל המלבנים כאלה ששניים מקודקודיו נמצאים על ציר x ושניים האחרים - על הפרבולה $y=3-x^2$ נבחר מלבן בעל שטח מקסימלי. מצאו את שטחו.



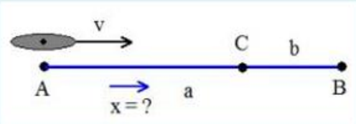
תרגיל 15. תמונה מלבנית תלויה על היקר כך שקצה התחתון של המסגרת נמצא בגובה של $h=1.8[m]$ מעיני הצופה.

גובה התמונה הוא $H=1.4[m]$. באיזה מרחק מהקיר צריך לעמוד הצופה כדי שזווית הראיה האנכית של התמונה תהיה מקסימלית ?

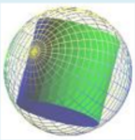


תרגיל 16. פסל שגובהו $H=3.6[m]$ מוצב על עמוד בגובה של $5.9[m]$. מאיזה מרחק יראה את הפסל צופה בעל גובה של $1.8[m]$ בזווית מקסימלית?

תרגיל 17. אונייה שטה מנמל A לנמל B הנמצא במרחק a ממנו וחוזרת לנמל C. המרחק בין הנמלים $BC=b$.
מהירות האונייה במים עומדים שווה ל- v.
המים בנהר זורמים בכיוון מ- A ל- B.
עבור איזו מהירות של זרימת המים תעבור האונייה את המסלול ABC (מ- A ל- B וחזרה ל- C) בזמן הקצר ביותר ?

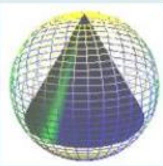


תרגיל 18. מצאו גובה של גליל בעל נפח מירבי, שניתן לחסום אותו בכדור בעל רדיוס של $R=40[cm]$.



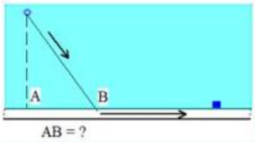
תרגיל 19. מצאו שטח פנים הקטן ביותר של הגליל בעל נפח של $V=230[cm^3]$.

תרגיל 20. מצאו גובה החרוט בעל נפח הגדול ביותר החסום בכדור בעל רדיוס $R=120[cm]$.

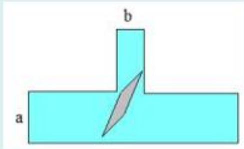


בעיות קיצון – תרגול רמה ג'

תרגיל 31. מאסדת קידוח הנמצאת במרחק של 6 ק"מ מחוף הים יש להעביר דוגמית נפט למעבדה הנמצאת 19 ק"מ מהנקודה על החוף הקרובה ביותר לאסדה.
את הדוגמית מעבירים תחילה לחוף באופנוע ים שמהירותו 56 קמ"ש ומשם למעבדה באופנוע שמהירותו 72 קמ"ש. לאיזה מקום על החוף צריך להגיע (בקו ישר) רוכב האופנוע-ים על מנת שהזמן הכולל של הנסיעה ביום ובכביש יהיה קצר ביותר?



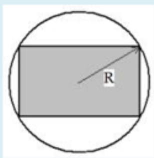
תרגיל 32. לנהר שרוחבו $230[m]$ חיברו בניצב אליו תעלה שרוחבה $49[m]$. מהו האורך המירבי של האונייה שיכולה לעבור את התעלה?



תרגיל 33. שטח של טקסט מודפס על דף אחד צריך להיות 420 סמ"ר,
כאשר רוחב שולי הצד צריך להיות שווה ל- 2 ס"מ והשוליים ועליונים והתחתונים - 3 ס"מ כל אחד.
מה צריכים להיות גובה ורוחב הדף כדי ששטחו יהיה מינימלי?

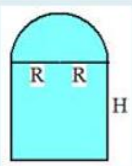
תרגיל 33. שטח של טקסט מודפס על דף אחד צריך להיות 420 סמ"ר,
כאשר רוחב שולי הצד צריך להיות שווה ל- 2 ס"מ והשוליים ועליונים והתחתונים - 3 ס"מ כל אחד.
מה צריכים להיות גובה ורוחב הדף כדי ששטחו יהיה מינימלי?

תרגיל 34. מצאו רדיוס המעגל שבו אפשר לחסום מלבן בעל היקף של 52 ס"מ ושטח מקסימלי.

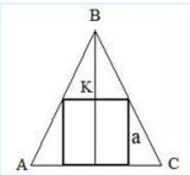


תרגיל 35. מצאו את גובה החרוט בעל נפח מינימלי שחוסם כדור בעל רדיוס R.

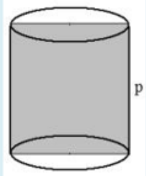
תרגיל 36. לחלון צורה של מלבן המושלם בחצי עיגול מלמעלה.
היקף החלון - $4.8[m]$.
מצאו את מידות החלון: גובה H ורדיוס העיגול R שעבורן שטח החלון יהיה מקסימלי.



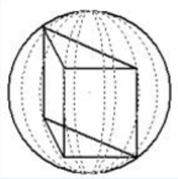
תרגיל 37. ריבוע בעל צלע $a = 25[cm]$ חסום במשולש שווה שוקיים כך, שצלע אחת של הריבוע נמצאת על בסיס המשולש.
מצאו את אורך הקטע BK כזה, שעבורו שטח המשולש יהיה מינימלי.



תרגיל 38. מכל הגלילים בעלי היקף של חתך מרכזי p
נבחר הגליל בעל נפח מירבי.
מצאו את הנפח הזה.



תרגיל 39. בכדור בעל רדיוס R חסומה מנסרה משולשת ישרה
שבבסיסה משולש שווה צלעות.
מה צריך להיות גובה המנסרה על-מנת שהנפח שלה יהיה מקסימלי?



תרגיל 40. מכל המלבנים החסומים בחצי-מעגל בעל רדיוס $R = 20\,[cm]$ כך,
שצלע אחת נמצאת על הקוטר, בחרו מלבן בעל שטח מקסימלי.
מצאו את השטח הזה.