סדרות

1. מהי סדרה?

בחיי היום יום נוהגים אנו לְמַסְפֵּר עצמים שונים כדי לציין את מקומם ואת סדר הופעתם, לדוגמה מספור בתים ברחוב, כסאות בתאטרון, תור לקופה, תעודות זיהוי וכד'.

כך על פי מספר החשבון בבנק אפשר לבדוק כמה כסף בחשבון זה.

נניח שבחשבון מס' 1 סך של a_1 ₪, בחשבון מס. 2 סך של a_2 ₪, וכך הלאה.

נרשום את הסכומים ונקבל **סדרת מספרים**:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_N$,

כאשר N הוא מספר כל החשבונות בבנק.

כל N המספרים הרשומים בתור, מהווים סדרה מספרית שאורכה N.

לכל n מ- 1 עד N מתאים המספר a_n, <u>הנמצא במקומו n-י מתחילת הסדרה</u>.

מספר a_1 נקרא **האיבר הראשון** של הסדרה, מספר a_2- **האיבר השני**, מספר a_3- **האיבר השלישי** וכך הלאה.

שימו לב: בין המספרים יכולים להופיע מספרים זהים!

הביטוי שמגדיר את האיבר a_n על פי מקומו בסדרה, נקרא **נוסחת האיבר לפי מקומו** בסדרה (או **נוסחת האיבר ה-n-י**), והמספר הטבעי n **מסמן את מקומו של האיבר** בסדרה.

לדוגמה, בסדרת ריבועים של מספרים טבעיים:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, (n+1)^2, \ldots$$

האיבר הראשון הוא $a_1 = 1$, האיבר השני $a_2 = 4$, השלישי $a_3 = 9$, ..., האיבר ה-n-י הוא $a_n = n^2$, והאיבר שמקומו בסדרה (n + 1) הוא $a_{n+1} = (n+1)^2$.

☜ **שימו לב!** ערך האיבר a_n לאו דווקא שווה למספר המסמן את מקומו בסדרה (n).

☜ במתמטיקה עוסקים גם **בסדרות אינסופיות**: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

לדוגמה, נרשום מספרים זוגיים זה אחר זה:

$$2, 4, 6, 8, 10, \ldots$$

סדרה

כיוון שיש אינסוף מספרים כאלה, לא נסיים לעולם, אולם במוקדם או במאוחר, כל מספר זוגי יופיע בסדרה.

למשל, במקומו 1,000,000 יופיע המספר 2,000,000, לכן $a_{1000000} = 2{,}000{,}000$.

סדרה מספרית מוגדרת, אם קיים כלל המתאים לכל n את ערך האיבר ה- n-י בסדרה, כלומר אם ידועה נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה.

הגדרת סדרה היא בעצם הגדרת פונקציה של משתנה n מתחום המספרים הטבעיים, כלומר לכל מספר טבעי n (הקובע את מקומו של איבר בסדרה) יתאים האיבר a_n.

הגדרה: סדרה מספרית היא פונקציה f המוגדרת בתחום המספרים הטבעיים

עבור סדרה מספרית מקובל לרשום a_n במקומו של $f(n)$ ולסמן את הסדרה כ- (a_n).

לדוגמה, את סדרת המספרים הזוגיים: 2, 4, 6, 8, ... נסמן: $(a_n = 2n)$.

אם ידועה **נוסחת האיבר לפי מקומו**, אפשר לחשב את כל איברי הסדרה.

לדוגמה, הנוסחה $a_n = \frac{1}{n}\ (n = 1, 2, 3, ...)$ מגדירה את הסדרה (הנקראת סדרה הרמונית):

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

דוגמה 1 סדרת מספרים מוגדרת באמצעות נוסחת האיבר ה- n-י:

$$a_n = n(n-2)$$

מִצאו את האיבר מספר 100 של הסדרה.

◄ נציב בנוסחת האיבר לפי מקומו $n = 100$:

$$a_{100} = 100(100-2) = 100\cdot 98 = 9800 \quad \triangleright$$

שימו לב! אפשר לסמן את איברי הסדרה גם באותיות אחרות, כפי שאפשר לראות דוגמאות שלהלן:

דוגמה 2 סדרת מספרים מוגדרת באמצעות נוסחת האיבר ה- n-י: $x_n = 2n + 3$

מצאו בסדרה את מקומו של האיבר שערכו: א) 43 ב) 50

◄ א) על פי הנתון: $x_n = 2n + 3 = 43$, מכאן נחלץ n: $2n = 40$, $\underline{n = 20}$.

ב) על פי הנתון: $x_n = 2n + 3 = 50$, מכאן נחלץ n: $2n = 47$, $\underline{n = 23.5}$.

n הוא מספר סידורי של האיבר, ולכן הוא חייב להיות שלם.

אי לכך, בסדרה הנתונה לא נמצא איבר השווה ל- 50. ▷

דוגמה 3

מצאו את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה המוגדרת באמצעות נוסחת האיבר ה- n-י: $y_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

◄ נציב $n = 1, 2, 3, 4$ ונקבל בהתאמה:

$$y_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1} = -1$$

$$y_2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_3 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$$y_4 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

....

כלומר, מקבלים סדרה: $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ..., (-1)^n \frac{1}{n}, ...$

איברי הסדרה יכולים להיות זהים; במקרה זה הפונקציה המבטאת את נוסחת האיבר לפי מקומו היא פונקציה קבועה: $f(n) = a_n = C$.

כלומר, הסדרה היא: $C, C, C, C, \ldots C, \ldots$

דוגמה 4 רשמו כמה איברים ראשונים בסדרה שבה $a_n = 2^n$.

◄ נציב $n = 1, 2, 3, 4$ ונקבל בהתאמה: $2,\ 2^2= 4,\ 2^3= 8,\ 2^4= 16, \ldots, 2^n, \ldots,$

כאשר נוסחת האיבר לפי מקומו ידועה, אפשר לחשב את כל איברי הסדרה.

קשה יותר לפתור **בעיה הפוכה**: לנחש את הנוסחה לאיבר ה- n-י של בסדרה שבה ידועים כמה איברים ראשונים. לדוגמה:

דוגמה 5 מצאו את כלל הסדרה: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$

◄ זוהי סדרת המספרים <u>האי זוגיים</u>: $a_n = 2n - 1$

דוגמה 6 מצאו את כלל הסדרה: $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$

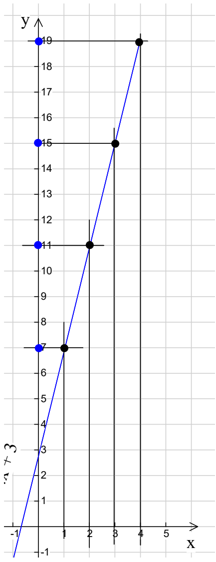
◄ זוהי סדרת המספרים <u>הזוגיים</u>: $a_n = 2n$

דוגמה 7 מצאו את כלל הסדרה: $4, 8, 12, 16, 20, \ldots$

◄ זוהי סדרת כפולות של 4: $a_n = 4n$

בדיקה: $n = 1: a_1 = 4\cdot1 = 4;\quad n = 2: a_2 = 4\cdot2 = 8;\ n = 3: a_3 = 4\cdot3 = 12; \ldots$

דוגמה 8 מצאו את נוסחת האיבר ה- n-י בסדרה: $7, 11, 15, 19, 23, \ldots$



◄ בסדרה זו כל איבר גדול ב- 3 מהאיבר המתאים בדוגמה הקודמת.

לכן: $a_n = 4n + 3$

משמאל גרף הפונקציה $y = 4x + 3$.

איברי הסדרה הם שיעורי y של הנקודות ששיעורי x שלהן

הם מספרים טבעיים: $x \in N$.

דוגמה 9 מצאו את כלל הסדרה: $\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}$

◄ כאן: $a_n = \frac{n+1}{n^2}$ (בדקו זאת בעצמכם)

תרגילים

1. נתונה סדרת ריבועים של מספרים טבעיים:

$$1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, (n+1)^2, \ldots$$

א) מנו את האיברים השלישי, השישי והאיבר ה-n-י (איבר שמקומו n) של הסדרה;

ב) מנו את מיקום האיבר בסדרה: 4, 25, n^2, $(n+1)^2$.

2. חִשבו את שלושת האיברים הראשונים של הסדרה, בעזרת הנוסחה לאיבר לפי מקומו:

א) $a_n = 2n + 3$ ב) $a_n = 1 + 3n$ ג) $a_n = 100 - 10n^2$

ד) $a_n = \frac{n-2}{3}$ ה) $a_n = \frac{1}{n}$ ו) $a_n = -n^3$

3. נתונה סדרה המוגדרת בנוסחה $a_n = n^2$. מה מקומו בסדרה של האיבר השווה ל:

א) 100 ב) 144 ג) 225?

האם בין איברי הסדרה נמצאים המספרים:

ד) 48 ה) 49 ו) 169?

4. נתונה סדרה המוגדרת בנוסחה $a_n = n^2 - 2n - 6$.

האם בין איברי הסדרה נמצאים המספרים: א) -3 ב) 2 ג) 3 ד) 9?

5. מצאו את ארבעת האיברים הראשונים של סדרת מספרים טבעיים שהם כפולות של 5. מנו את האיברים במקומות 6, 9, 21, n.

6. סדרת מספרים מוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו: $a_n = (n-1)(n+4)$.
מִצאו את n אם ידוע: א) $a_n = 150$ ב) $a_n = 104$.

7. מצאו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרת המספרים הטבעיים שהם כפולות של 7.
מנו את האיברים במקומות 8, 10, 37, n.

8. מצאו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרת המספרים הטבעיים שהם כפולות של 5.
מנו את האיברים במקומות 6, 9, 21, n.

9. נתון כי (a_n) היא סדרת חזקות 3 של מספרים טבעיים.
מצאו את a_1, a_2, a_3, a_4, a_n.

10. נתון כי (c_n) היא סדרת חזקות של מספר 2.
מצאו את c_1, c_2, c_3, c_4, c_n.

רשמו את הנוסחה לאיבר לפי מקומו בסדרה שבה נתונים חמשת איבריה הראשונים:

11. א) $1, 2, 3, 4, 5,\dots$ ב) $6, 7, 8, 9, 10,\dots$
ג) $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ד) $-1, -2, -3, -4, -5, \dots$

12. א) $1, 3, 5, 7, 9,\dots$ ב) $3, 6, 9, 12, 15,\dots$
ג) $4, 6, 8, 10, 12,\dots$ ד) $4, 8, 12, 16, 20, \dots$

13. א) $1, 4, 9, 16, 25,\dots$ ב) $4, 9, 16, 25, 36,\dots$
ג) $2, 5, 10, 17, 26,\dots$ ד) $1, 8, 27, 64, 125,\dots$

14. על פי הנוסחה לאיבר ה- n-י, רשמו את חמשת האיברים הראשונים בסדרה:
א) $a_n = (-2)^n$ ב) $b_n = 2\cdot(-3)^{n-1}$
ג) $c_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n$ ד) $d_n = (-2)^n + (-2)^{n-1}$

15. הסדרה מוגדרת על פי נוסחת האיבר לפי מקומו.
רשמו את שלושת האיברים הראשונים במקומות הזוגיים בסדרה:

א) $x_n = (-1)^n + (-2)^{n+1}$ ב) $y_n = (-2)^{n+1} - (-2)^{n-1}$

ג) $z_n = (-2)^n - (-2)^{n+1}$ ד) $w_n = (-1)^{n+1} - (-2)^n$

16. הסדרה מוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו.
רשמו את שלושת האיברים הראשונים במקומות אי זוגיים בסדרה:

א) $a_n = (-1)^n + 2^n$ ב) $b_n = (-2)^n + 16$

ג) $x_n = (-2)^n + 4n$ ד) $y_n = (-1)^n - 1$

17. רשמו כמה נוסחאות אפשריות לאיבר ה- n-י בסדרה שבה נתונים חמשת איבריה הראשונים:

א) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$ ב) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$

ג) $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$ ד) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \frac{1}{5\cdot 6}, \dots$

18. א) $-\frac{2}{2}, \frac{4}{5}, -\frac{6}{8}, \frac{8}{11}, -\frac{10}{14}, \dots$ ב) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \frac{7}{4}, \frac{9}{4\sqrt{2}}, \dots$

ג) $\frac{2}{5}, -\frac{4}{10}, \frac{8}{15}, -\frac{16}{20}, \frac{32}{25}, \dots$

ד) $-\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}, \frac{4}{\sqrt{2\cdot 3}}, -\frac{9}{\sqrt{3\cdot 4}}, \frac{16}{\sqrt{4\cdot 5}}, -\frac{25}{\sqrt{5\cdot 6}}, \dots$

19. מצאו את מקומו של איבר בסדרה המוגדרת בנוסחת האיבר ה- n-י $a_n = \frac{n+1}{3n+2}$, שערכו הוא:

א) $\frac{5}{14}$ ב) $\frac{14}{41}$ ג) $\frac{6}{17}$ ד) $\frac{8}{23}$

20. סדרה מוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו: $a_n = (2n - 1)(3n + 2)$.
האם המספר הזה הוא איבר בסדרה?

א) 0 ב) 24 ג) 153 ד) -2

21. בנו את גרף הסדרה (ראו דוגמה 8):

א) $y_n = \frac{3-n}{2}$ ב) $y_n = \frac{1}{n+1}$ ג) $y_n = n^2 - 4$ ד) $y_n = \frac{3n}{2}$

2. כלל הנסיגה

שיטת ההגדרה של סדרה באמצעות הנוסחה לאיבר לפי מקומו מאפשרת לחשב את כל איברי הסדרה ללא קושי מיוחד, אולם לעיתים רחוקות יודעים אנו את הנוסחה מראש.

במקרים רבים, כאשר אי אפשר לחשב את האיבר a_n בעזרת מקומו בסדרה (n),

אפשר לחשב אותו אם האיבר שלפניו (a_{n-1}) ידוע.

למשל, אפשר לחשב את מהירותה בכל שנייה של אבן שנזרקה מגג בניין, אם ידוע שמהירות הזריקה הייתה 5 מטר/שנייה ובכל שנייה מהירותה גדלה ב- 10 מ׳/ש׳:

$$v_1 = 5 + 10 = 15 \quad (\text{מ׳/ש׳})$$
$$v_2 = 15 + 10 = 25 \quad (\text{מ׳/ש׳})$$
$$v_3 = 25 + 10 = 35 \quad (\text{מ׳/ש׳})$$
.....

קשה (ולעתים בלתי אפשרי) לפתח נוסחה שתאפשר לחשב את המהירות v_n בכל רגע נתון n.

שיטת החישוב שהדגמנו חשובה במיוחד ליישומים; היא מאפשרת להגדיר סדרה באמצעות <u>כלל המאפשר לחשב את האיבר ה-n-י באמצעות איבר קודם או כמה איברים קודמים</u>.

על פי שיטה זו, אנו חוזרים אחורה ובודקים מהם האיברים הקודמים. שיטה זו של הגדרת הסדרה נקרא **כלל נסיגה** (או **רקורסיה** – מהמילה הלטינית *recurrere* - לחזור). הגדרת איברי הסדרה במקרים אלה נעשית באמצעות הנוסחה המבטאת את האיבר ה-n-י בעזרת קודמיו, ובעזרת איבר או כמה איברים ראשונים של הסדרה.

דוגמה 11

נתונים: $a_1 = 3,\ a_n = a_{n-1} + 4$. מצאו את שלושת האיברים הבאים של הסדרה.

◄ נציב את נתוני הבעיה בכלל הנסיגה, ונחשב את האיברים העוקבים החל מ- a_2:

$$a_1 = 3;$$
$$a_2 = a_1 + 4 = 3 + 4 = 7;$$
$$a_3 = a_2 + 4 = 7 + 4 = 11;$$
$$a_4 = a_3 + 4 = 11 + 4 = 15.$$

הסדרה היא, אם כן: $3, 7, 11, 15, \ldots$

שימו לב: אפשר להגדיר את הסדרה שהתקבלה גם באמצעות נוסחת האיבר לפי מקומו: $a_n = 4n - 1$.

עבור $n = 1$ נקבל: $a_1 = 4\cdot1 - 1 = 3$, עבור $n = 2$: $a_2 = 4\cdot2 - 1 = 7$ וכך הלאה.

דוגמה 12

נתונים: $a_1 = 3,\ \ a_n = 2a_{n-1}$. כל איבר הוא מכפלת האיבר הקודם ב- 2.

מצאו שלושת האיברים הבאים של הסדרה.

◄ נציב את נתוני הבעיה בכלל הנסיגה, ונחשב את האיברים העוקבים החל מ- a_2:

$$a_1 = 3;$$

$$a_2 = 2a_1 = 2\cdot3 = 6;$$

$$a_3 = 2a_2 = 2\cdot6 = 12;$$

$$a_4 = 2a_3 = 2\cdot12 = 24, \ldots$$

הסדרה היא: $3, 6, 12, 24, \ldots$

שימו לב: אפשר להגדיר את הסדרה שהתקבלה גם באמצעות נוסחת האיבר לפי מקומו: $a_n = 3\cdot2^{n-1}$ (בדקו זאת!).

דוגמה 13 סדרת מספרים מוגדרת באמצעות כלל הנסיגה: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

והאיברים $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. מִצאו את ארבעת האיברים הבאים של הסדרה.

◄ נציב את נתוני הבעיה בכלל הנסיגה, ונחשב את האיברים העוקבים האלה:

$$F_1 = 1;$$

$$F_2 = 1;$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2;$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3;$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5;$$

$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8, \ldots$$

הסדרה שקיבלנו: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55\ \ldots$ נקראת **סדרת פיבונצ'י**, על שמו של מתמטיקאי איטלקי מהמאה ה- 13. הוא הגיע לנוסחה זו כאשר חישב את מספר הארנבות שייוולדו מזוג ארנבות אחד בשנה.

גם לסדרה זו יש נוסחת האיבר לפי מקומו:

גם לסדרה זו יש נוסחת האיבר לפי מקומו:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

קשה לפתח אותה, וקשה להשתמש בה. נסו לדוגמה, לחשב בעזרתה את האיבר השישי: $F_6 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^6\right) =$??????.

לעומת זאת, נוכחנו שקל לחשב את F_6 באמצעות כלל נסיגה:

$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$$

אולם <u>כלל הנסיגה בלבד אינו מאפשר לחשב את איברי הסדרה</u>.

לדוגמה, נתון כלל הנסיגה: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. מצאו את a_3.

◄ נציב $n = 3$: $a_3 = 2a_2 + a_1$.

אילו ידענו את a_2 ו- a_1 אפשר, היה לחשבאת כל האיברים הבאים.

שאם לא כן, הסדרה אינה מוגדרת.

המסקנה: כדי למצוא את איברי הסדרה יש לדעת, מלבדאת כלל נהסיגה, גם את האיברים הראשונים a_1 ו- a_2.

איברים אלה נקראים **איברים התחלתיים** של הסדרה המוגדרת על ידי כלל נסיגה.

בדוגמה 13, האיברים ההתחלתיים הם $F_1 = 1$, $F_2 = 1$.

<u>אם נשנה את ערכם של איברים התחלתיים, גם הסדרה תשתנה.</u>

דוגמה 14 מצאו את ששת האיברים הראשונים של הסדרה שבה כל איבר החל מהשלישי שווה לסכום שני איברים קודמים, כלומר: $L_n = L_{n-2} + L_{n-1}$ (כמו בסדרת פיבונצ׳י), ושני איבריה הראשונים הם $L_1 = 1, L_2 = 3$.

◄ נציב בכלל הנסיגה את ערכי האיברים הראשונים ונקבל:

$$L_3 = L_1 + L_2 = 1 + 3 = 4,\ \ L_4 = L_2 + L_3 = 3 + 4 = 7,$$

$$L_5 = L_3 + L_4 = 4 + 7 = 11,\ L_6 = L_4 + L_5 = 7 + 11 = 18.$$

הסדרה $1, 3, 4, 7, 11, 18, \ldots$ מוגדרת באמצעות כלל נסיגה <u>הזהה לכלל הנסיגה של סדרת פיבונצ׳י</u>, אולם <u>ערכי שני האיברים הראשונים שונים</u>.

סדרה זו נקראת סדרת **לוקה**, על שמו של מתמטיקאי צרפתי מהמאה 19 פרנסוה לוקה.
אף שכלל הנסיגה של סדרה זו זהה לכלל הנסיגה של סדרת פיבונצ׳י, סדרה זו מתארת תופעות אחרות, ואיבריה שונים מאיברי סדרת פיבונצ׳י.

כמות האיברים ההתחלתיים של סדרה מוגדרת בצורתו של כלל הנסיגה.

אם a_n מוגדרת באמצעות a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_{n-k}, אזי יש להגדיר k איברים התחלתיים.

לדוגמה, אם סדרה מוגדרת באמצעות כלל נסיגה $a_n = a_{n-3} - a_{n-2} + a_{n-1}^2$,

אזי צריך לדעת מהם שלושת האיברים התחלתיים: a_1, a_2 ו- a_3.

נניח ש- $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 4$. נציב בכלל הנסיגה את $n = 4$ ונמצא:

$$a_4 = a_1 - a_2 + a_3^2 = 2 - 5 + 16 = 13$$

באותו אופן נמצא את a_5 ואת האיברים הבאים.

בשיטת הנסיגה משתמשים, בין היתר, לחישוב מקורב של שורשים.

דוגמה 15 במאה 17 פיתח ניוטון שיטת חישוב מקורב של שורש משוואה ריבועית מהסוג $x^2 = a$, כאשר a איננו ריבוע שלם. שיטה זו מאפשרת לחשב בדיוק הרצוי שורש ריבועי של כל מספר. שיטה זו מוכרת כשיטת ניוטון-רפסון או ככלל ניוטון.

על פי השיטה, בוחרים ערך התחלתי x_1 (בדרך כלל, מספר שלם הקרוב ביותר לשורש ריבועי של a) ובונים סדרת מספרים x_1, x_2, ..., x_n,... על פי כלל נסיגה:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

אם רוצים לחשב את $\sqrt{2}$ בידוק של 0.001, מציבים בכלל הנסיגה את $a = 2$ ו-

$x_1 = 1$ (הערך השלם הקרוב ביותר ל- $\sqrt{2}$), ומקבלים:

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_3 = \frac{1}{2}\left(1.5 + \frac{2}{1.5}\right) = 1.417$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\left(1.417 + \frac{2}{1.417}\right) = 1.414$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\left(1.414 + \frac{2}{1.414}\right) = 1.414 \ldots$$

רואים שבדיוק של 0.001 מתקבל שוויון $x_4 = x_5$, לכן $\sqrt{2} \approx 1.414$.

במקרים רבים (כמו בסדרת תוצאות של מדידות) נתונה סדרה אינסופית שבה ידועים איבריה הראשונים, ורוצים לדעת את הנוסחה של איבר לפי מקומו.

לדוגמה, נתונים ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}, \ldots$$

ננסה לרשום את נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה.

על פי המידע שברשותנו, ערכי המונה הם מספרים טבעיים עוקבים, והמכנה הוא חזקות של 2, לכן אחת מהאפשרויות היא: $a_n = \frac{n}{2^n}$.

אולם ישן אפשרויות נוספות, למשל:

$$a_n = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+n}{2^n}$$

עבור $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ ו- $n = 4$ מקבלים את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה (עבור $n = 5$ הנוסחה כבר אינה נכונה. בדקו זאת.).

ככלל, לכל סדרה אינסופית המוגדרת באמצעות כמה איברים ראשונים, אפשר להתאים אינסוף נוסחאות של האיבר ה-n-י!

תרגילים

.22 מצאו את ארבעת האיברים הראשונים של סדרה המוגדרת באמצעות האיבר הראשון $a_1 = 2$ וכלל הנסיגה:

א) $a_{n+1} = 3a_n + 1$ ב) $a_{n+1} = 5 - 2a_n$

רשמו את ששת האיברים הראשונים של סדרה (b_n) המוגדרת באמצעות כלל נסיגה:

.23 א) $b_1 = 1, b_n = -b_{n-1} + 5 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

ב) $b_1 = -5, b_n = b_{n-1} + 10 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

ג) $b_1 = 1, b_n = 2 + b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

ד) $b_1 = -3, b_n = -b_{n-1} - 2 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

.24 א) $b_1 = 1, b_n = n \cdot b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

ב) $b_1 = -3, b_n = -b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$

ג) $b_1 = -512,\ b_n = 0.5\cdot b_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$

ד) $b_1 = 1,\ b_n = b_{n-1}:0.1 \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$

25. מְצאו את ארבעת האיברים הראשונים של הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ והאיבר הראשון: $a_1 = 256$.

26. רשמו את ששת האיברים הראשונים של סדרה (a_n) שבהּ נתון: $a_1 = -3,\ a_2 = -2$ וכל איבר, החל מהשלישי, שווה לסכום הכפול של שני איברים קודמים.
רשמו את כלל הנסיגה עבור סדרה זו.

27. רשמו את כלל הנסיגה ואת האיברים ההתחלתיים של הסדרה:

א) $2, 2, 2, 2, 2, \dots$ ב) $2, 4, 6, 8, 10, \dots$

ג) $9, 7, 5, 3, 1, \dots$ ד) $5, -5, 5, -5, 5, \dots$

28. א) $2, 6, 18, 54, 162, \dots$ ב) $1, 8, 15, 22, 29, \dots$

ג) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots$ ד) $3, -9, 27, -81, 243, \dots$

29. הסדרות שלהלן מוגדרות באמצעות כלל נסיגה.
רשמו את הביטוי האלגברי לאיבר ה-n-י בכל סדרה:

א) $b_1 = 3,\ b_n = b_{n-1} + 5 \ (n = 2, 3, 4, \dots)$

ב) $b_1 = 2,\ b_n = 3\cdot b_{n-1} \quad n = 2, 3, 4, \dots)$

ג) $b_1 = 11,\ b_n = b_{n-1} - 4 \ (n = 2, 3, 4, \dots)$

ד) $b_1 = 3,\ \ b_n = \frac{b_{n-1}}{2} \ \ (n = 2, 3, 4, \dots)$

30. חשבו על פי השיטה לחישוב שורש ריבועי (דוגמה 15) את ערכי השורשים בדיוק של 0.01:

א) $\sqrt{3}$ ב) $\sqrt{10}$ ג) $\sqrt{26}$ ד) $\sqrt{89}$

את התוצאה השוו עם ערך השורש המחושב באמצעות המחשבון.

31. הסדרה מוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+2} = a_n^2 - a_{n+1}$ והאיברים $a_1 = 2$, $a_2 = 3$.
מְצאו את האיבר החמישי בסדרה.

32. הסדרה מוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו. רִשמו את האיברים שמספרם בסדרה הוא $(n + 1)$, $(n - 1)$ ו- $(n + 5)$:

א) $a_n = -5n + 4$ ב) $a_n = 2(n - 10)$

ג) $a_n = 2^{3n+1}$ ד) $a_n = 7\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

33. כל אחד מהמספרים בסדרה שווה לסכום שני קודמיו. ידוע שהמספר התשיעי והעשירי הוא 1. מצאו את המספר הראשון ואת השני.

34. האם הנוסחה $a_n = n^3 + 3n + 1$ מגדירה סדרה של מספרים ראשוניים?

35. מצאו נוסחה לאיבר ה-n-י של הסדרה המוגדרת באמצעות כמה איברים ראשונים:

א) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ ב) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$

ג) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ ד) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

ה) $1, 7, 31, 127, 511, \ldots$ ו) $\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{4}{11}, \frac{5}{14}, \frac{6}{17}, \frac{7}{20}, \frac{8}{23}, \ldots$

הערה לשאלה יש כמה תשובות, ציינו אחת בלבד.

36. הוכיחו שהסדרה (a_n) המוגדרת בנוסחת האיבר לפי מקומו $a_n = 3^n + 5\cdot2^n$ מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ ואת תנאי ההתחלה $a_1 = 13, a_2 = 29$.

37. בסדרה נתון: $b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_n}{2}$, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$.
הביעו את a_n ו- b_n באמצעות a_1, b_1 ו- n.

3. סדרה עולה וסדרה יורדת

ראינו בדוגמאות קודמות שישנן סדרות שאיבריהן הולכים וגְדֵלים על פי מקומם בסדרה, לדוגמה: $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$ או $-20, -18, -16, -14, -12, \ldots$;

או קְטֵנים: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$ או $-1, -4, -9, -16, -25\ldots$;

איברי הסדרה יכולים להיות זהים $(3, 3, 3, 3, 3, \ldots)$, או יכולים לשנות את מגמתם מאיבר לאיבר, כמו בסדרה:

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \searrow \\ 1, & -3, & 5, & -7, & 9, & -11, & 13\ \ldots \end{array}$$

לסדרה (a_n) קוראים סדרה **עולה** כאשר איבריה הולכים וגדלים (עבור כל מספר טבעי n מתקיים אי שוויון $a_{n+1} > a_n$),

ואילו לסדרה (a_n) שאיבריה הולכים וקטנים (עבור כל מספר טבעי n מתקיים אי שוויון $a_{n+1} > a$) קוראים סדרה **יורדת**.

דוגמה 6

א) הסדרה $1, 8, 27, 125, \ldots, n^3, \ldots$ עולה, כיוון שלכל n טבעי מתקיים אי שוויון $(n+1)^3 > n^3$, כלומר $a_{n+1} > a_n$.

ב) הסדרה $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$ יורדת, כיוון שלכל n טבעי מתקיים אי שוויון $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}$, כלומר $a_{n+1} > a_n$.

אם בין איברי הסדרה יש ערכים גדולים מהקודמים וגם ערכים קטנים מהקודמים, אזי הסדרה אינה עולה ואינה יורדת.

לדוגמה: הסדרה $1, -2, 3, -4, 5, -6$.

דוגמה 7 האם הסדרה שהאיבר ה-n-י שלה הוא $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$ היא עולה או יורדת?

◀ נבדוק האם ההפרש $a_{n+1} - a_n$ חיובי או שלילי:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2n+3}{n+3} - \frac{2n+1}{n+2} =$$

$$= \frac{2n^2 + 7n + 6 - 2n^2 - 7n - 3}{(n+2)(n+3)} = \frac{3}{(n+2)(n+3)} > 0$$

כיוון ש- $a_{n+1} - a_n > 0$, כלומר $a_{n+1} > a_n$ עבור כל $n = 1, 2, 3, \ldots$ מסיקים כי הסדרה עולה.

לפעמים נוח יותר לבדוק את היחס בין שני איברים עוקבים $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

אם איברי הסדרה חיוביים והיחס גדול מ- 1, הסדרה עולה.

אם היחס קטן מ- 1, הסדרה יורדת.

דוגמה 8 האם הסדרה (a_n) שהאיבר ה- n-י שלה הוא $a_n = \frac{n^2}{5^n}$ עולה או יורדת?

◀ נבדוק את המנה $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}} : \frac{n^2}{5^n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 5^n}{5^{n+1} \cdot n^2} = \frac{(n+1)^2}{5n^2} = \frac{1}{5}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{4}{5}$$

אי שוויון $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ מתקיים לכל $n = 1, 2, 3, \ldots$.

כיוון ש- $a_n > 0$ עבור כל n, מסיקים, כי $a_{n+1} < a_n$ לכל $n = 1, 2, 3, \ldots$, לכן הסדרה יורדת.

תרגילים

.38 הוכיחו שהסדרה עולה:

א) $a_n = 3n + 4$ ב) $b_n = 5n - 3$

ג) $y_n = 7n - 2$ ד) $x_n = 4n - 1$

.39 הוכיחו שהסדרה יורדת:

א) $a_n = -2n - 3$ ב) $b_n = -3n + 4$

ג) $y_n = -n + 8$ ד) $x_n = 4 - 5n$

.40 הוכיחו שהסדרה עולה:

א) $a_n = \frac{n - 1}{n}$ ב) $b_n = 1 - \frac{1}{2n}$

ג) $b_n = 1 - \frac{1}{2^n}$ ד) $d_n = \frac{5n}{n + 1}$

.41 הוכיחו שהסדרה יורדת:

א) $a_n = \frac{1}{2n}$ ב) $b_n = 1 + \frac{1}{3n}$

ג) $c_n = \frac{n + 1}{n}$ ד) $d_n = \frac{1}{3^n}$

.42 האיבר ה-n-י של הסדרה הוא $a_n = \frac{n^2}{n^2 + 4}$. הוכיחו שהסדרה עולה.

.43 האיבר ה-n-י של הסדרה הוא $a_n = \frac{1}{n^2 + 1}$. הוכיחו שהסדרה יורדת.

.44 בדקו אם הסדרה (a_n) עולה או יורדת:

א) $a_n = \frac{1}{n^3 + n}$ ב) $a_n = \sqrt{n + 1} - \sqrt{n}$ ג) $a_n = n^3 - n^2$

ד) $a_n = |3 - 2n|$ ה) $a_n = \frac{2n + 1}{6n + 2}$ ו) $a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{6n + 2}$

תרגילים אינטראקטיביים

תרגיל 4.1 נוסחת האיבר לפי מקום בסדרה היא: $a_n=4\cdot n^2-44\cdot n$.
מצאו, עבור אילו ערכים של n הסדרה עולה ? 4.1

תרגיל 4.2 מצאו מספר טבעי n שעבורו מתקיים: $(-1)^n\cdot(6\cdot n-87)=9$ 4.2

תרגיל 4.3 נתונים ארבעה איברים ראשונים של סדרה:
$9\ ,\ \frac{17}{4}\ ,\ \frac{25}{16}\ ,\ \frac{33}{64}\ ,\ \ldots$
מצאו את נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה. 4.3

תרגיל 4.4 נתונים חמישה איברים ראשונים של סדרה:
$-2\ ,\ 1\ ,\ 6\ ,\ 13\ ,\ 22\ ,\ldots$
מצאו את נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה. 4.4

תרגיל 4.5 נתונים חמישה איברים ראשונים של סדרה:
$3\ ,\ 7\ ,\ 19\ ,\ 55\ ,\ 163\ ,\ldots$
מצאו את נוסחת האיבר לפי מקומו בסדרה. 4.5

תרגיל 4.6 מצאו את חמשת האיברים הראשונים בסדרה המקיימת את כלל הנסיגה הבא:
$a_1=9\ ,\ a_{n+1}=a_n+6\cdot n^2-4$ 4.6

תרגיל 4.7 רשמו כלל נסיגה לסדרה שבה הנוסחה לאיבר לפי מקום היא: $a_n=8\cdot n^2+3\cdot n$ 4.7

תרגיל 4.8 הגדירו את הסדרה הבאה באמצעות כלל נסיגה:
$2\ ,\ 3\ ,\ 7\ ,\ 14\ ,\ 24\ ,\ldots$ 4.8

תרגיל 4.9 מצאו את נוסחת האיבר לפי מקום עפ"י כלל הנסיגה:
$a_1=8\ ,\ a_{n+1}=a_n+6\cdot n+3$ 4.9

תרגיל 4.10 הסדרה מוגדרת ע"י כלל נסיגה: $a_1=4\ ,\ a_{n+1}=2\cdot a_n+6$
מצאו את שני האיברים הסמוכים בסדרה שסכומם הוא $s=948$. 4.10