§107 פונקציה קדומה. אינטגרל לא מסוים

נתבונן במכונית שמתחילה לנוע לאחר שעצרה ברמזור. את מהירותה בכל רגע ניתן לראות במד-המהירות ולרשום אותה בטבלה:

t זמן (שניות)	v מהירות (מטרים/שנייה)	s מרחק (מטרים)
1	3	?
2	6	?
3	9	?
4	12	?
5	15	?

כיצד לדעת, איזה מרחק עברה המכונית לאחר 5 שניות נסיעתה? או איפה היא תהיה כעבור 10 שניות, אם תמשיך לנסוע באותה תאוצה?

אילו הייתה נוסעת במהירות קבועה, יכולנו לכתוב: $s = v\cdot t$. אולם המכונית נוסעת בתאוצה, והנוסחה אינה נכונה. נסמן את תלות המרחק s בזמן הנסיעה t כפונקציה $s(t)$. ראינו קודם, שמהירות המכונית בכל רגע שווה לנגזרת: $v(t) = s'(t)$.

כלומר, אם ידוע כיצד מרחק משתנה בזמן $s(t)$, אפשר לחשב כיצד משתנה בזמן המהירות v. כעת לפנינו **בעיה הפוכה**: ידוע לנו כיצד משתנה בזמן הנגזרת $v(t)$, ואלינו למצוא את הפונקציה $s(t)$ שנגזרתה $v(t)$ ידועה.

◄ **הגדרה**: פונקציה $s(t)$ כזאת ש- $s'(t) = v(t)$ מכונה **פונקציה קדומה** לפונקציה $v(t)$.

לדוגמה: אם נתון $v(t) = 2t$ אז ברור שהפונקציה $s(t) = t^2$ היא פונקציה קדומה של $v(t)$, מכיוון ש- $s'(t) = (t^2)' = 2t$.

אם $f(x) = x^3$, אז הפונקציה הקדומה היא $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ מכיוון ש-

$$F'(x) = \frac{1}{4}\cdot 4x^3 = x^3$$

ובכלל: אם $f(x) = x^n$ אז $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ מכיוון ש-

$$F'(x) = \frac{1}{n+1}\cdot(x^{n+1})' = \frac{(n+1)\cdot x^n}{n+1} = x^n$$

דוגמה: $f(x) = x^2 \quad (n = 2)$:

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$$

בעיה 1 הוכיחו שכל הפונקציות:

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3}, \ F_2(x) = \frac{x^3}{3} + 1, \ F_3(x) = \frac{x^3}{3} - 4$$

הן פונקציות קדומות לפונקציה $f(x) = x^2$.

פתרון

$$F_1'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$$

$$F_2'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' + (1)' = x^2$$

$$F_3'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - 4\right)' = \left(\frac{x^3}{3}\right)' - (4)' = x^2$$

כלומר: <u>כל אחת מהפונקציות הנ"ל היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$</u>.

מאופן ההוכחה ברור, **שכל פונקציה** מהסוג $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = x^2$. זה נובע מהעובדה שנגזרת של קבוע שווה לאפס.

אוסף של כל פונקציות קדומות לפונקציה $f(x)$ נתונה מכונה אינטגרל לא מסוים של הפונקציה $f(x)$, מסמנים את האינטגרל הלא מסוים בצורה הבאה: $\int f(x)dx$.

על-פי הגדרתו של אינטגרל לא מסוים, אפשר לרשום:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

כאשר C הוא מספר קבוע כלשהו, המכונה **קבוע אינטגרציה**.

◄ כלומר: <u>אינטגרל לא מסוים שווה לפונקציה קדומה + קבוע אינטגרציה</u>.

דוגמאות:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C, \ \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C, \ \int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

בדיקה:

$$\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x, \ \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2, \ \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C\right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

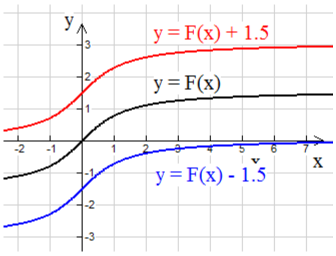
אם $F_1(x)$ ו- $F_2(x)$ הן פונקציות קדומות לפונקציה $f(x)$:

$F_1'(x) = f(x)$ ו- $F_2'(x) = f(x)$ אז $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$

לפי כללי הגזירה: $F_1'(x) - F_2'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = 0$

אם נגזרת של פונקציה שווה לאפס, אזי הפונקציה היא קבועה:

$F_1(x) - F_2(x) = C, \quad F_1(x) = F_2(x) + C$



כלומר: אם $F(x)$ – פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$,
אז כל פונקציה קדומה אחרת נוצרת מחיבור של $F(x)$
וקבוע איזשהו C.

גרף הפונקציה $F(x) + C$ מתקבל מהגרף של $F(x)$
על-ידי העתקה מקבילה לאורך ציר- y למרחק C:

על-ידי הבחירה של הקבוע C אפשר למצוא פונקציה קדומה כזאת שהגרף שלה יעבור דרך נקודה נתונה.

דוגמה 2

לפונקציה $f(x) = x$ מצאו פונקציה קדומה כזאת שהגרף שלה יעבור דרך הנקודה $(2, 5)$.

פתרון

נחשב אינטגרל לא מסוים של הפונקציה $f(x) = x$: $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

נמצא מספר C כזה, שגרף הפונקציה $F(x) = \frac{x^2}{2} + C$ יעבור דרך הנקודה $(2,5)$; נציב: $x = 2$, $F(2) = 5$: $5 = \frac{2^2}{2} + C,\ \ 5 = 2 + C,\ \ C = 3$

<u>תשובה סופית</u>: $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3$

דוגמה 3

מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2}$ בקטע $(0, \infty)$, כאשר ידוע שערכה בנקודה $x = 1$ שווה ל- 1.

פתרון

נחשב אינטגרל הלא מסוים של הפונקציה: $\int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} + C$

נציב את הנתון ונמצא את C: $1 = -\frac{1}{1} + C, C = 2$

<u>תשובה סופית</u>: $F(x) = -\frac{1}{x} + 2$

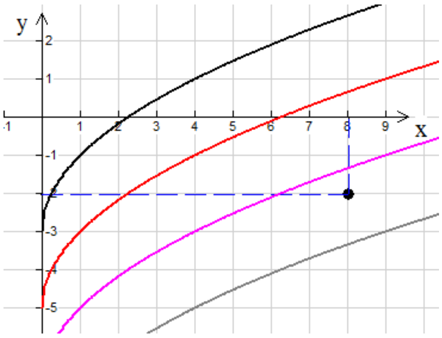
דוגמה 4

מצאו פונקציה קדומה לפונקציה $F(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, כאשר ידוע שהגרף שלה עובר דרך הנקודה $(9, -2)$.

פתרון

נחשב אינטגרל הלא-מסוים של הפונקציה:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$$



את הגרפים של כמה פונקציות קדומות (המתאימות לערכי C שונים) אפשר לראות בשרטוט משמאל:

שיעורי הנקודה שדרכה אמור לעבור גרף של פונקציה קדומה הם: $x = 9, y = -2$.

נציב בביטוי הפונקציה:

$$-2 = 2\cdot\sqrt{9} + C, \quad C = -8$$

התשובה: $F(x) = 2\sqrt{x} - 8$

אינטגרלים מיידיים

מהנוסחה לפונקציה קדומה של פונקציית החזקה $f(x) = x^n$: $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

נקבל ביטויים לאינטגרלים לא-מסוימים של כמה פונקציות בסיסיות:

$n = 0$: $f(x) = 1$, $\int 1\, dx = x + C$

$n = 1$: $f(x) = x$, $\int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$

$n = 2$: $f(x) = x^2$, $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C \quad ,f(x) = \sqrt{x} \quad :n = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + C \quad ,f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad :n = -\frac{1}{2}$$

תרגילים

1. הוכיחו שפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ בכל ציר המספרים:

א) $f(x) = x^5$, $F(x) = \frac{x^6}{6}$ ב) $f(x) = x^4$, $F(x) = \frac{x^5}{5} + 1$

2. הוכיחו שפונקציה $F(x)$ היא פונקציה קדומה לפונקציה $f(x)$ עבור $0 < x$:

א) $f(x) = -\frac{2}{x^2}$, $F(x) = \frac{2}{x}$ ב) $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $F(x) = 1 + \sqrt{x}$

3. מצאו אינטגרל לא מסוים של הפונקציה:

א) x^4 ב) x^3 ג) x^{-3} ד) $x^{-\frac{1}{2}}$

4. לפונקציה $f(x)$ מצאו פונקציה קדומה כזאת שהגרף שלה עובר דרך הנקודה M:

א) $f(x) = x,\ M(-1, 3)$ ב) $f(x) = \sqrt{x},\ M(9, 10)$

5. לפונקציה $f(x)$ מצאו פונקציה קדומה $F(x)$, כאשר נתון ערכה בנקודה נתונה:

א) $f(x) = \frac{1}{x^2},\ F\left(\frac{1}{2}\right) = -12$ ב) $f(x) = x^3,\ F(-1) = 2$

3 כללים לחישוב האינטגרלים הלא-מיידיים

1. אם F היא פונקציה קדומה ל- f, ו- G – פונקציה קדומה ל- g, אז $F \pm G$ היא פונקציה קדומה ל- $f \pm g$.

הוכחה. נתון: $F' = f,\ G' = g$. על-פי כלל של נגזרת הסכום או ההפרש:

$$(F \pm G)' = F' \pm G' = f \pm g$$

את כלל הסכום או ההפרש של פונקציות קדומות אפשר לרשום בצורה של אינטגרלים לא-מסוימים:

$$\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx + C$$

כלומר:

אינטגרל לא מסוים של הפונקציה השווה לסכום (או הפרש) של פונקציות אחרות, שווה לסכום (או הפרש) האינטגרלים של אותן הפונקציות.

2. אם F היא פונקציה קדומה ל- f, ו- k – קבוע, אז הפונקציה kF היא פונקציה קדומה ל- kf.

הוכחה. נתון: $F' = f$. על-פי חוקי הגזרה: $(kF)' = kF' = kf$

בצורה של אינטגרל לא מסוים:

$$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx + C$$

3. אם $F(x)$ היא פונקציה קדומה ל- $f(x)$, ו- k ו- b הם קבועים ($k \neq 0$), אז $\frac{1}{k}F(kx + b)$ היא פונקציה קדומה ל- $f(kx + b)$.

הוכחה: על-פי כללי הגזרה של פונקציה מורכבת:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx + b)\cdot(kx+b)' = \frac{1}{k}\cdot F'(kx+b)\cdot k = f(kx+b)$$

בצורה של אינטגרל לא מסוים:

$$\int f(kx + b)\, dx = \frac{1}{k}\cdot F(kx + b) + C$$

בעזרת הכללים הנ"ל אפשר לחשב אינטגרל לא מסוים כל פונקציית פולינום או פונקציה רציונלית.

דוגמה 1

מצאו אינטגרל לא מסוים $\int \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

פתרון

על-פי כלל 1:

$$\int \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \int x^3\, dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C$$

דוגמה 2

מצאו אינטגרל לא מסוים $\int \frac{1}{(7-3x)^5}\, dx$

פתרון

על-פי כלל 3 : $f(x) = \frac{1}{x^5}$, $k = -3$, $b = 7$,

$$\int \frac{1}{(7-3x)^5}\, dx = \frac{1}{-3} \cdot \frac{-1}{4(7-3x)^4} + C = \frac{1}{12(7-3x)^4} + C$$

הערה

אינטגרל לא מסוים של מכפלה או מנה של פונקציות **לא שווה** למכפלה או מנת האינטגרלים של הפונקציות!

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx \neq \frac{\int f(x)\, dx}{\int g(x)\, dx}$$

תרגילים

1. מצאו אינטגרל לא מסוים של הפונקציה :

א) $2x^5 - 3x^2$ ב) $5x^4 + 2x^3$ ג) $6x^2 - 4x + 3$

2. מצאו אינטגרל לא מסוים של הפונקציה :

א) $\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ ב) $\frac{2}{x^3} - \frac{3}{x}$ ג) $4\sqrt[3]{x} - 6\sqrt{x}$

3. מצאו אינטגרל לא מסוים של הפונקציה :

א) $\frac{3}{2x-5} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}}$ ב) $\frac{2x^4 - 4x^3 + x}{3}$ ג) $\frac{6x^3 - 3x + 2}{5}$

ד) $(1+2x)(x-3)$ ה) $(2x-3)(2+3x)$ ו) $(2x+1)\sqrt{x}$

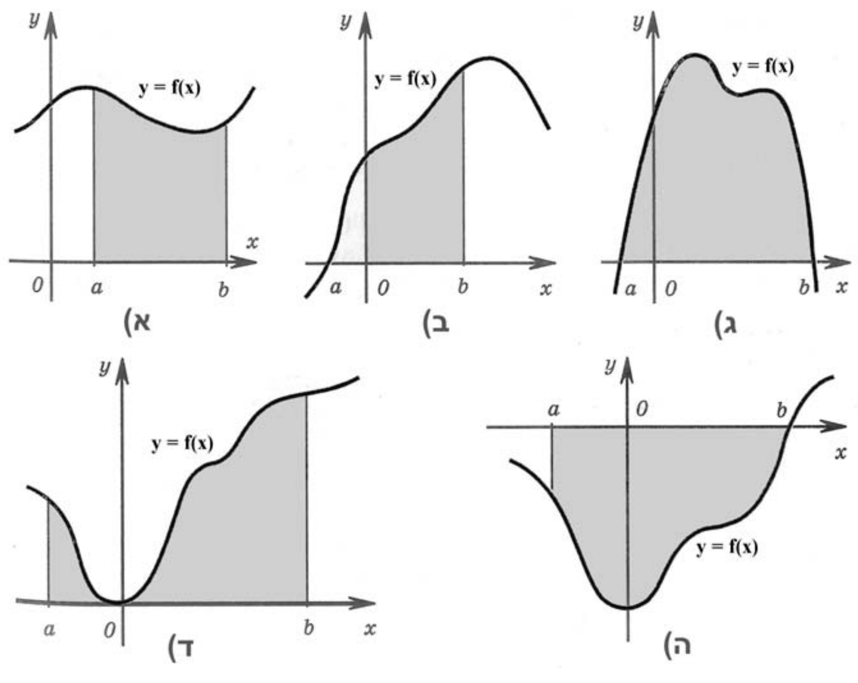
4. מצאו אינטגרל לא מסוים של הפונקציה:

א) $(x + 1)^4$ ב) $(x - 2)^3$ ג) $\frac{2}{\sqrt{x - 2}}$ ד) $\frac{3}{\sqrt{x + 3}}$

במקרים רבים נתקלים בצורך לחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y= f(x)$ בקטע מסוים $[a; b]$, ציר ה- x ואנכים לציר x בקצות הקטע $x = a$ ו- $x = b$. צורה זו מזכירה טרפז שאחד מבסיסיו הוא קו הגרף.

בשרטוט הבא נראים מקרים שונים של מיקום הקטע $[a; b]$ על הציר וצורת הגרף.

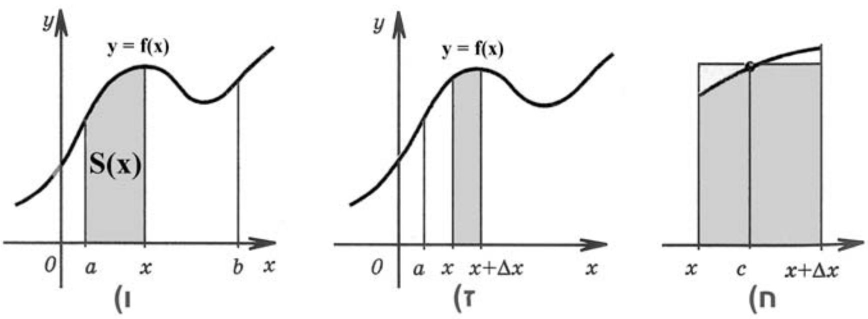
חשוב לציין שגם כאשר חלק מתחום ההגדרה נמצא באזור של $x < 0$ (גרפים ג), ד) ו- ה)), או ערכי הפונקציה הם שליליים (גרף ה)), השטח הוא חיובי.



נסמן את השטח ב- S ; ברור ש-S הוא פונקציה של x : $S = S(x)$.

בגרף ו) מסומן שטח בין האנך $x = a$ לבין האנך בנקודה x כלשהי. נחשב, בכמה יגדל השטח אם שיעור ה- x יגדל ב- Δx, כלומר נחשב את הביטוי $S(x+\Delta) – S(x)$.

בגרף ח) רואים בהגדלה את הרצועה שהתווספה לטרפז מימין.



מכיוון שהיא מאוד צרה (Δx הוא קטן), צורתה קרובה למלבן, שרוחבו Δx, וגובהו שווה לערך הפונקציה $f(x)$ בנקודה c בתוך הקטע $[x;\ x+\Delta x]$.
שטח המלבן שהתווסף שווה איפוא ל-

$$\Delta S = S(x+\Delta) - S(x) = f(x)\cdot\Delta x.$$

ביטוי זה מאפשר לבטא את הפונקציה $f(x)$ באמצעות S:

$$f(x) = \frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}$$

ככל ש- Δx יהיה קטן יותר ($\Delta x \to 0$), דיוק החישוב יהיה טוב יותר, והביטוי באגף ימין יהפוך לנגזרת של $S(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{S(x+\Delta x) - S(x)}{\Delta x}\right) = S'(x)$$

אולם, אם הנגזרת של $S(x)$ שווה ל- $f(x)$, אז לפי ההגדרה **$S(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$**: $S(x) = F(x) + C$.

כדי למצוא את קבוע האינטגרציה C, נציב $x = a$. נקבל:

$$S(a) = 0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a)$$

הבהרה: כאשר $x = a$ הטרפז הופך לישר $x = a$, אשר שטחו שווה לאפס.

$$S(x) = F(x) - F(a) \qquad (1)$$

$$\underline{S(b)} = F(x)|_{x=b} - F(a) = \underline{F(b) - F(a)}$$

ובכן, חישוב השטח הופך למציאה של פונקציה קדומה $F(x)$ לפונקציה $f(x)$.

להפרש $F(b) - F(a)$ קוראים **אינטגרל מסוים** של פונקציה $f(x)$ בקטע $[a;b]$,

ומסמנים כך: $\int_a^b f(x)\,dx$ (מבטאים: אינטגרל מ- a ל- b של $f(x)$ דֶה- איקס)

לכן אפשר לרשום: $$S = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (2)$$

ובמקום הנוסחה (1) אפשר לכתוב,

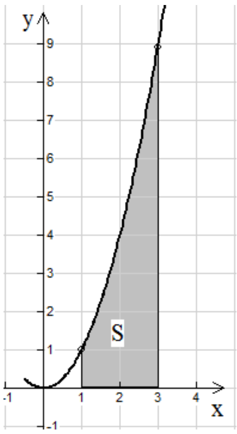
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (3)$$

לנוסחה זו קוראים **נוסחת ניוטון-לייבניץ**, לכבוד אבות החשבון הדיפרנציאלי ואינטגרלי.

הערה: לצורך נוחיות, רושמים את ההפרש $F(b) - F(a)$ (תוספת לפונקציה בקטע $[a; b]$) בצורה: $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$,

אז אפשר לרשום את הנוסחה (3) כך:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b \qquad (4)$$



דוגמה 1

מצאו שטח בין גרף של פרבולה $y = x^2$ לבין ציר ה- x בגבולות $[1; 3]$.

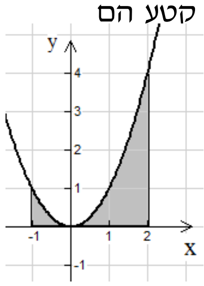
פתרון

על-פי הנוסחה (2): $$S = \int_1^3 x^2\,dx$$

על-פי הנוסחה (4):

$$S = \int_1^3 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{26}{3}$$

שימו לב! נוסחה (4) מתקיימת גם כאשר אחד או שני הגבולות קטע הם שליליים.



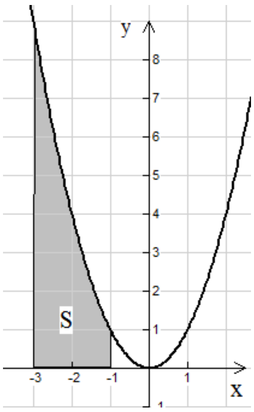
דוגמה 2

מצאו שטח בין גרף הפרבולה לבין ציר ה- x בגבולות $[-1; 2]$.

פתרון

$$S = \int_{-1}^2 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3$$

דוגמה 3



מצאו שטח בין גרף הפרבולה לבין ציר ה- x בגבולות [-3; -1].

$$S = \int_{-3}^{-1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-3}^{-1} = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{27}{3} = \frac{26}{3}$$

אולם, אם בקטע מסוים ערכי הפונקציה שליליים: $f(x) < 0$

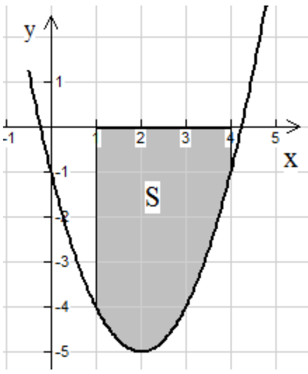
עבור $x \in [a; b]$, אז גם ערך האינטגרל יהיה שלילי:

$$\int_a^b f(x)\,dx < 0$$

מכיוון ששטח אינו יכול להיות שלילי, משתמשים בערך מוחלט:

$$S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

דוגמה 4



מצאו שטח בין גרף הפרבולה $y = x^2 - 4x - 1$ לבין ציר ה- x בגבולות [1; 4].

פתרון

$$\int_1^4 (x^2-4x-1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4\cdot\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^4 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 4\cdot\frac{4^2}{2} - 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 4\cdot\frac{1^2}{2} - 1\right) = -12$$

$$S = |-12| = 12$$

תרגילים

1. מצאו שטח הצורה הנוצרת על-ידי הישרים $x = a$, $x = b$, ציר ה- x וגרף הפונקציה $y = f(x)$, כאשר נתונים:

א) $a = 2, b = 4, f(x) = x^3$ ב) $a = 3, b = 4, f(x) = x^2$

ג) $a = -2, b = 1, f(x) = x^2 + 1$ ד) $a = 0, b = 2, f(x) = x^3 + 1$

2. מצאו שטח הצורה הכלואה בין הציר Ox ופרבולה:

א) $y = 4 - x^2$ ב) $y = 1 - x^2$ ג) $y = -x^2 + 4x - 3$

3. מצאו שטח בין גרף הפונקציה $y = f(x)$ והישרים $x = a$ ו- $x = b$:

א) $a = 1, b = 8, f(x) = \sqrt[3]{x}$ ב) $a = 4, b = 9, f(x) = \sqrt{x}$

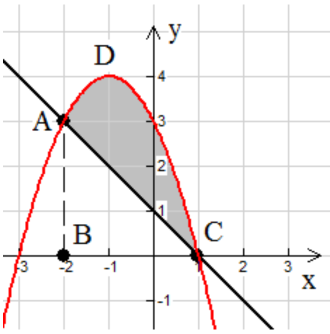
4. מצאו שטח הצורה הכלואה בין הישר $x = b$, ציר Ox וגרף הפונקציה $y = f(x)$:

א) $b = 2,\ f(x) = 5x - x^2,\ 2 \le x \le 5$ ב) $b = 3,\ f(x) = x^2 + 2x$

ג) $b = 2,\ \ f(x) = 1 - \frac{1}{x}$

§109 שטח בין גרפים של שתי פונקציות

נוסחת ניוטון-לייבניץ מאפשרת גם למצוא שטח של צורות המורכבות מגרפים של פונקציות וצירי הקואורדינאטות.



דוגמה 1

מצאו שטח הצורה החסומה על-ידי הפרבולה $y_1 = 3 - 2x - x^2$ והישר $y_2 = 1 - x$.

פתרון

נשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות; מהשרטוט רואים שהשטח הנדרש שווה להפרש השטחים שמתחת לגרפים של שתי הפונקציות: $S = S_{BADC} - S_{\Delta BAC}$

בקטע BC. כדי למצוא את שיעורי הנקודות B ו- C, נשווה את ערכי הפונקציות:

$$1 - x = 3 - 2x - x^2,\ x^2 + x - 2 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = -2$$

נשתמש בנוסחת ניוטון-לייבניץ, כאשר גבולות האינטגרציה הם 2- ו- 1:

$$S_{BADC} = \int_{-2}^{1} (3-2x-x^2)\ dx = \left(3x - x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{1} =$$

$$= \left(3 - 1 - \frac{1}{3}\right) - \left(3\cdot(-2) - (-2)^2 - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 9$$

$$S_{\Delta BAC} = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = \frac{9}{2}$$

השטח הנדרש שווה איפוא ל- $S = S_{BADC} - S_{\Delta BAC} = 9 - \frac{9}{2} = 4.5$

מכיוון ש- $S_{BADC} = \int_{-2}^{1} y_1(x)\ dx\ ,\ \ S_{\Delta BAC} = \int_{-2}^{1} y_2(x)\ dx$

ברור שהשטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות שווה ל-

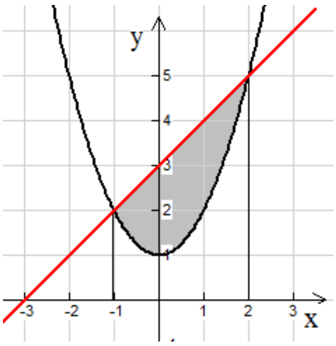
$$S = S_{BADC} - S_{\Delta BAC} = \int_{-2}^{1} (y_1(x) - y_2(x))\,dx \qquad (5)$$

זו מסקנה כללית, המתקיימת עבור כל פונקציות שהן.

דוגמה 2

מצאו שטח הכלוא בין הפרבולה $y = x^2 + 1$ והישר $y = x + 3$.

פתרון



א) נמצא שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של שתי הפונקציות:

$$x^2 + 1 = x + 3,\ x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

ב) נשתמש בנוסחה (5):

$$\int_{-1}^{2} ((x^2+1) - (x+3))\,dx = \int_{-1}^{2} (x^2-x-2)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = -4.5$$

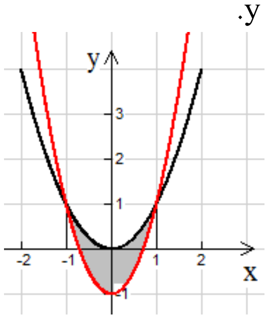
מכיוון ששטח הוא חיובי, נרשום: $S = |-4.5| = 4.5$

הערה: מהשרטוט רואים ששטח מתחת לישר הוא גדול משטח שמתחת לפרבולה; לכן, אילו היינו מחשבים את האינטגרל המתאים: $\int_{-1}^{2} ((x+3)-(x^2+1))\,dx$ היינו מיד מקבלים תוצאה חיובית.

דוגמה 3

מצאו שטח הכלוא בין שתי הפרבולות $y = x^2$ ו- $y = 2x^2 - 1$.

פתרון



ג) נמצא שיעורי נקודת החיתוך של הגרפים של שתי הפונקציות:

$$x^2 = 2x^2 - 1,\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1$$

ד) נשתמש בנוסחה (5):

$$S = \int_{-1}^{1}\left(x^2 - \left(2x^2-1\right)\right) dx = \int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

תרגילים

1. מצאו שטח הצורה החסומה על-ידי העקומות הבאות:

א. פרבולה $y = (x + 1)^2$, ישר $y = 1 – x$ וציר Ox;

ב. פרבולה $y = 4 - x^2$, ישר $y = x + 2$ וציר Ox;

ג. פרבולה $y = 4x - x^2$, ישר $y = 4 – x$ וציר Ox;

ד. פרבולה $y = 3x^2$, ישר $y = 1.5x + 4.5$ וציר Ox.

2. א. גרפים של הפונקציות $y = \sqrt{x}$, $y = (x - 1)^2$ וציר Ox;

ב. גרפים של הפונקציות $y = x^3$, $y = 2x - x^2$ וציר Ox.

3. א. פרבולה $y = x^2 + 3x$ וציר Ox;

ב. פרבולה $y = x^2 - 4x +3$ וציר Ox.

4. א. פרבולה $y = x^2 + 1$ וישר $y = 3 – x$;

ב. פרבולה $y = (x + 2)^2$ וישר $y = x + 2$;

ג. גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$ וישר $y = x$.

5. א. שתי הפרבולות $y = 6x^2$, $y = (x – 3)(x – 4)$ וציר Ox;

ב. שתי הפרבולות $y = 4 - x^2$, $y = (x – 2)^2$ וציר Ox.

6. א. פרבולה $y = 6x - x^2$ וישר $y = x + 4$;

ב. פרבולה $y = 4 - x^2$ וישר $y = x + 2$.

7. א. פרבולה $y = 2 - x^2$ וישר $y = -x$;

ב. פרבולה $y = - x^2$ וישר $y = -2$;

ג. גרף הפונקציה $y = x^3$ וישרים $y = 1$, $x = -2$.