§24 המושגים הבסיסיים בהסתברות (חזרה)

דוגמאות	הגדרות
הופעת מספר 5 על דופן עליון של קוביית-משחק ; הופעת סמל על פני המטבע המוטל ; לידת 5 בנים ברצף במחלקת יולדות ; ליקוי חמה ; ירידות המניות בבורסה.	**מְאוֹרָע** מקרה, מעשה, התרחשות, אירוע שקרה, או יכול לקרות ויכול שלא לקרות. תוצאות הניסויים, תצפיות ומדידות גם הן נחשבות למאורעות.
א) לאחר יום ה׳ הופיע יום ו׳ ב) בהטלת הקובייה הופיע מספר הקטן מ- 7. א) בהטלת קוביית-משחק הופיע מספר 7 ב) המים בנחל קפאו בטמפרטורה 25 °C א) בהטלת קוביית-משחק הופיע מספר 2 ב) ביום ב׳ התלמיד הלך לבית-ספר א) יורד גשם ומניות בבורסה עולות ב) בהטלת קוביית-משחק הופיע מספר 7, בהטלה הבאה הופיע 2.	המאורע יכול להיות **ודאי**, **בלתי-אפשרי ואקראי**. **מאורע ודאי** – המאורע שיתרחש בוודאות בתנאים הקיימים. **מאורע בלתי-אפשרי – המאורע שאינו יכול להתרחש בתנאים הקיימים.** **מאורע אקראי** – המאורע שבתנאים הקיימים יכול להתרחש ויכול שלא להתרחש. **מאורעות בלתי-תלויים** מאורעות שהתרחשות של כל אחד מהם אינה מושפעת מעובדת ההתרחשות או אי-התרחשות של האחר.

מאורעות זרים המאורעות שאינם יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת.	א) השחר עלה, על השמים הופיעו כוכבים; ב) בהטלת קוביית-משחק פעמיים, הופיע מספר 1 וסכום המספרים בשתי ההטלות הוא 12.
מאורעות משלימים המאורע $\overline{A}$ מכונה **משלים** למאורע A, אם הוא מתרחש בוודאות כאשר המאורע A אינו מתרחש.	א) זכייה ואי-זכייה בהגרלה; ב) ניצחון והפסד במשחק; ג) הופעת מספר זוגי והופעת מספר אי-זוגי בהטלת קוביית-משחק.
מאורע חד-שלבי מאורע יחיד, המבטא התרחשות או תוצאה בודדת.	א) הופעת מספר 2 על-גבי קוביית- משחק בהטלה בודדת; ב) קַלָּע לא פוגע במטרה בניסיון ירי ראשון.
מאורע דו-שלבי מאורע שמורכב משני מאורעות חד-שלביים. **מאורע רב-שלבי** מאורע שמורכב ממספר מאורעות חד-שלביים (עוקבים או מתרחשים בו-זמנית).	א) סכום המספרים המופיעים על-פני שתי קוביות-משחק (לאחר שתי הטלות) שווה ל- 7. ב) שני הקלעים פגעו במטרה בניסיון ירי ראשון.
מאורעות שווי-סיכוי מאורעות שונים שסיכויי התרחשותם שווים.	א) הופעות של מספרים שונים בהטלת קוביית- משחק; ב) הופעת סמל או מספר על פני המטבע שנזרק.

מאורעות שווי-סיכוי

הערה:
לעתים קרובות אפשר להסיק לגבי שוויון סיכויי ההתרחשות משיקולי *סימטריה* או אי-מתן עדיפות למאורע מסוים משיקולים אחרים.

מאורעות שאינם שווי-סיכוי:

א) נפילת כריך עם חמאה על צד מסוים (מרכז הכובד של הכריך נמצא קרוב יותר לצד המרוח);

ב) משיכת קוביית-דומינו בעלת מספרים שווים (דַּבֶּל) ומשיכת קובייה בעלת מספרים שונים (סך הכול ישנן 7 קוביות דַּבֶּל ו- 21 קוביות אחרות).

בחיי יום-יום המושג **מאורע** מסמן אירוע משמעותי; במתמטיקה הוא מסמן כל תוצאה אפשרית של המצב הנדון. המתמטיקאים הצרפתיים בְּלֶז פַּסְקָל ופייר פֶּרְמַה היו הראשונים שהשתמשו במושג זה בניתוח משחקי מזל כבר במאה – 17. חוקי המאורעות האקראיים שולטים בין היתר גם בתהליך יצירת מולקולות ה- DNA, הנושאות את המידע הגנטי של האדם.

הסתברות היא מדד הסיכוי להתרחשות מאורע מסוים.

הסתברות P שווה ליחס שבין מספר הופעות המאורע הנדון A (**המאורע הרצוי**) למספר כל האפשרויות.

ערכי ההסתברות נמצאים בתחום שבין 0 ל-1: $0 \le P(A) \le 1$.

מאורע בלתי אפשרי הוא בעל הסתברות 0, ומאורע ודאי הוא בעל הסתברות 1.

א) הסתברות ההופעה של מספר 2 על-גבי קוביית-משחק שווה ל-

$$P(A) = \frac{1}{6}$$

(מספר כל התוצאות האפשריות הוא 6, ומספר הופעות הספרה 2 הוא 1).

ב) הסתברות הזכייה בלוטו של האדם שלא קנה כרטיס שווה ל- 0.

ג) הסתברות ההופעה של מספר **או** סמל על פני המטבע שנזרק שווה ל- 1.

הסתברות של מאורע משלים סכום ההסתברויות של מאורע ומאורע משלים שווה ל- 1: $P(A) + P(\overline{A}) = 1$ ההסתברות של מאורע משלים היא: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	הסתברות הפגיעה של הקַלָּע במטרה נעה היא $P(A) = 0.8$. (A מסמן את אירוע הפגיעה) הסתברות ההחטאה היא: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = 0.2$

דוגמה 1 מצאו זוגות של מאורעות בלתי תלויים ומאורעות זרים בין המאורעות הקשורים <u>בהטלה יחידה</u> של קוביית משחק:

א) הופיע מספר 2; ב) הופיע מספר 5;
ג) הופיע מספר גדול מ- 2; ד) הופיע מספר זוגי.

◄ מספר כל זוגות המאורעות האפשריים הוא 6:

1) א) + ב) 2) א) + ג) 3) א) + ד)
4) ב) + ג) 5) ב) + ד) 6) ג) + ד)

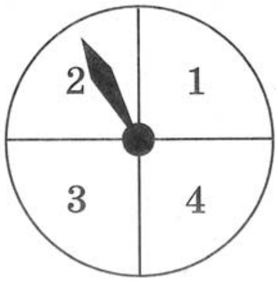
בין אלה <u>בלתי תלויים</u> (כלומר מאורעות שיכולים להתרחש יחד) הם:
א) + ד) (מספר 2 הוא זוגי), ב) + ג) (מספר 5 הוא גדול מ- 2),
ג) + ד) (למשל, הופיע מספר 4)
מאורעות <u>זרים</u> (כלומר, אלה שלא יכולים להתרחש יחד) הם:
א) + ב) (לא יכולים להופיע שני מספרים בהטלה אחת),
א) + ג) (לא יכול להופיע מספר הגדול מ- 2 יחד עם המספר 2);
ב) + ד) (מספר 5 אינו מספר זוגי).

דוגמה 2 10 תלמידים עורכים הגרלה באמצעות משיכת פתק מתוך כובע המכיל 10 פתקים; על פתק הזכייה כתוב "זכית!", על האחרים: "בוז!".

א) מה ההסתברות שבמשיכה הראשונה נמשוך את פתק הזכייה?
ב) מה ההסתברות שבמשיכה הראשונה נמשוך פתק "בוז!"?

◄ א) המאורע הרצוי – משיכת הפתק "זכית!". סה"כ מספר כל המשיכות האפשריות הוא 10; מספר המאורעות הרצויים – 1 (משיכת הפתק "זכית!").
לכן הסתברות הזכייה היא: 1/10. ▷

ב) המאורע הרצוי – משיכת הפתק "בוז!" (ברור, שזה לא *רצוי*, אבל אנחנו מעוניינים לדעת מה הסיכוי שזה עלול לקרות). כמו במקרה הקודם, מספר כל המשיכות האפשריות הוא 10; מספר המאורעות הרצויים – 9 (ישנם 9 פתקי"בוז!"). לכן הסתברות ההפסד היא: 9/10. ▷



דוגמה 3 גלגל הרולטה מחולק לארבעה חלקים שווים.
מה ההסתברות שהמחוג המסתובב יעצור בגזרה 2?

◄ מכיוון ששטחי הגזרות של גלגל הרולטה שווים, אזי קיימות סך הכול 4 מאורעות שווי-סיכוי: המחוג יעצור:
א) בגזרה 1 ב) בגזרה 2 ג) בגזרה 3 ד) בגזרה 4.

מתוך אלה, מספר המאורעות הרצויים הוא אחד: המחוג יעצור בגזרה 2. לכן, על-פי הגדרת ההסתברות, מקבלים: $P(A) = \frac{1}{4}$

מלבד המאורעות **הבסיסיים**, המוגדרים בדרך ישירה (כמו בדוגמאות הנ"ל: "הופיעה ספרה 6" או "המחוג נעצר בגזרה 2"), קיימים מאורעות מורכבים יותר, שבהם נדרש לקבוע האם המאורע משתייך למאורע רצוי או לאו.

לדוגמה: "על פני הקובייה הופיע מספר אי-זוגי" או "מחוג הרולטה נעצר לא בגזרה 2" וכד'.

ננתח את המאורע A: " לאחר הטלה אחת הופיע מספר זוגי על פני הקובייה ".
מאורע זה מתקיים ב- 3 מקרים (התוצאות הרצויות) – כאשר מופיעים המספרים: 2, 4 או 6.

הסתברות המאורע A שווה אפוא:

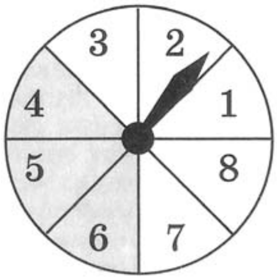
$$P(A) = \frac{\text{המאורעות הרצויים}}{\text{כל המאורעות}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

דוגמה 4 מטילים פעם אחת קוביית משחק. מה ההסתברות של הופעת המספר הגדול מ- 4 על הדופן העליון?

◄ מתוך 6 האפשרויות, המאורעות הרצויים הם שניים: הופעת 5 והופעת 6. לכן:

$$P(A) = \frac{\text{המאורעות הרצויים}}{\text{כל המאורעות}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$ ▷

דוגמה 5 גלגל הרולטה מחולק ל- 8 גזרות שוות.



מצאו את ההסתברות של הימצאות המחוג בשטח כהה של הגלגל לאחר עצירת הגלגל.

◄ קיימות 8 תוצאות שוות-סיכוי: המחוג יימצא בגזרה 1, בגזרה 2, ..., בגזרה 8. מספר המאורעות הרצויים הוא 3 (הגזרות 4, 5 או 6).

לכן ההסתברות שווה ל-

$$P(A) = \frac{\text{המאורעות הרצויים}}{\text{כל המאורעות}} = \frac{3}{8}$$

☜ כאשר המאורע A הוא ודאי (כלומר הוא יתרחש בהכרח), כל מאורע הוא רצוי; מספר המאורעות הרצויים שווה למספר המאורעות האפשריים, וההסתברות $P(A) = 1$.

דוגמה 6 מטילים קוביית משחק; מה ההסתברות שעל פניה יופיע מספר הקטן מ- 7?

◄ מספר כל המאורעות האפשריים הוא 6; כל מספר שעשוי להופיע הוא קטן מ- 7 (1, 2, ..., 6), כלומר מספר המאורות הרצויים הוא 6; לכן ההסתברות היא

$$P(A) = \frac{6}{6} = 1$$

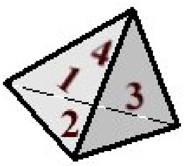
☜ כאשר המאורע A הוא בלתי אפשרי, מספר המאורעות הרצויים שווה לאפס (הרי המאורע לא יתרחש לאולם), וההסתברות $P(A) = 0$.

דוגמה 7 מטילים קוביית משחק; מה ההסתברות שעל פניה יופיע מספר הגדול מ- 6?

◄ המאורע הרצוי הוא בלתי-אפשרי; לכן ההסתברות שווה לאפס. ▷

תרגילים

1. מנו את כל המאורעות הבסיסיים ושווי-הסיכוי אשר עשויים לקרות כתוצאה של:



א) הטלת מטבע;

ב) הטלת קוביית משחק;

ג) הטלת ארבעון שפאותיו ממוספרות מ- 1 עד 4;

ד) סיבוב גלגל הרולטה המחולק ל- 5 גזרות המסומנות באותיות A, B, C, D ו- E.

2. בתיבה נמצאים 2 כדורים לבנים ו- 3 שחורים; מוציאים באקראי כדור אחד. מה ההסתברות שהוצאנו:

א) כדור לבן ב) כדור שחור

ג) כדור אדום ד) כדור לבן **או** כדור שחור?

3. בתיבה נמצאים 2 כדורים לבנים, 3 שחורים ו- 4 אדומים; מוציאים באקראי כדור אחד. מה ההסתברות שהוצאנו:

א) כדור לבן ב) כדור שחור ג) כדור אדום

ד) **לא** כדור לבן ה) **לא** כדור שחור ו) **לא** כדור אדום?

4. על קלפים זהים רשומים המספרים 1 עד 10 (על כל קלף מספר אחד). הניחו את הקלפים על השולחן, הפכו אותם עם המספרים כלפי מטה וערבבו. מושכים באקראי קלף אחד. מה ההסתברות שעל הקלף יהיה רשום:

א) מספר 7 ב) מספר זוגי ג) כפולה של 3

ד) כפולה של 4 ה) מספר המתחלק ב- 5 ו) מספר ראשוני?

5. נאור שכח ספרה אחרונה של מספר הטלפון של חברה לכיתה. הוא מחייג אותה באקראי.

א) מה ההסתברות שנאור ניחש נכון?

ב) מה ההסתברות שינחש נכון אם הוא בטוח שזו איננה הספרה 0?

6. להגרלה הנפיקו 1000 כרטיסים, ביניהם 20 כרטיסי זכייה בפרס הגדול ועוד 100 כרטיסים שזוכים בפרס ניחומים. נועה רכשה כרטיס אחד. בהנחה שההגרלה היא הוגנת, מה ההסתברות שנועה תזכה:

א) בפרס הגדול ב) בפרס ניחומים ג) בפרס כלשהו ד) בשום פרס.

7. תוכנה מחוללת בחינות בוחרת באקראי שאלה אחת למבחן בגאומטריה מתוך מאגר נתון בן 25 שאלות. תלמיד שהתכונן לבחינה פתר 22 מהשאלות. מה ההסתברות שהתלמיד יקבל במבחן שאלה מבין אלו שפתר?

8. צבעו את שש פאותיה של קוביית עץ ונסרו אותה ל- 27 = 3 x 3 x 3 קוביות קטנות ע״י שישה חתכים. בחרו אחת מהקוביות באקראי.
מה ההסתברות של כל אחד מהמאורעות הבאים :

א) A – לקובייה הקטנה 3 פאות צבועות.

ב) B – לקובייה הקטנה בדיוק 2 פאות צבועות.

ג) C – לקובייה הקטנה בדיוק פאה אחת צבועה.

ד) D – לקובייה הקטנה אין אף פאה צבועה.

9. מלאו את הטבלה:

מס. משימה	המשימה	מספר כל המאורעות הבסיסיים שווי-סיכוי	המאורע A	מספר מאורעות רצויים	הסתברות מאורע A
1	הטלת קוביית משחק		המספר שהופיע - אי-זוגי		
2	הטלת קוביית משחק		המספר שהופיע - כפולה של 3		
3	הוצאת אבן אחת מסט שלם של אבני דומינו		הוצאת האבן 6 - 2		
4	הוצאת אבן אחת מסט שלם של אבני דומינו		הוצא דאבל		
5	סיבוב גלגל הרולטה המחולק ל- 8 גזרות שוות וממוספרות		מחוג נעצר בגזרה שמספרה - כפולה של 4.		
6	סיבוב גלגל הרולטה המחולק ל- 8 גזרות שוות וממוספרות		מחוג נעצר בגזרה שמספרה לא גדול מ- 6.		

1. מאורעות משלימים

דוגמה 1 במסיבה שהשתתפו בה 100 אנשים חילקו באקראי 100 כרטיסי הגרלה, ביניהם 5 כרטיסים זוכים. כל משתתף קיבל כרטיס אחד.

מה ההסתברות שמשתתף מסוים קיבל:

א) כרטיס זכייה ב) כרטיס שלא זוכה?

◄ כל משתתף היה יכול לקבל כל אחד מ- 100 הכרטיסים, כלומר מספר כל האפשרויות עבור המשתתף המסוים שווה ל- 100.

א) מספר המאורעות הרצויים שווה למספר כרטיסי הזכייה, ששווה ל- 5.

לכן ההסתברות שווה ל-
$$P(A) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

לפעמים מבטאים את ההסתברות באחוזים, לכן אפשר לרשום $P(A) = 5\%$. ▷

ב) מספר הכרטיסים שלא זוכים שווה ל- 95, לכן למאורע ה"לא רצוי" מתאימים 95 מאורעות. ההסתברות שמשתתף מסוים יקבל כרטיס שלא זוכה שווה אפוא ל-
$$P(\overline{A}) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20} = 95\%$$

תשובה: א) 5% ב) 95%. ▷

☜ למאורע $\overline{A}$ (מבטאים "A גג" או "לא A") קוראים **המאורע המשלים** למאורע A, אם הוא מתרחש כאשר אינו מתרחש המאורע A.

דוגמאות נוספות למאורעות משלימים:

1) "זכייה" ו"לא זכייה" במשחק כלשהו (מדוע לא "זכייה" ו"הפסד"?);

2) "הופעת התמונה" ו"הופעת המספר" בהטלת מטבע;

3) "הופעת המספר 2" ו"הופעת כל מספר שאינו 2" (כלומר הופעת 1, או 3, או 4, או 5, או 6) על דופן קוביית משחק לאחר הטלה אחת;

4) "עצירת מחוג הגלגל של רולטה בגזרה 3" ו"עצירת מחוג הגלגל של רולטה בגזרה שמספרה אינו 3" (כלומר בגזרה 1, או 2, או 4) ;

5) "הופעת המספר שהוא כפולה של 3" ו" הופעת המספר שהוא אינו כפולה של 3" (כלומר הופעת 1, או 2, או 4, או 5) כתוצאה של הטלת קוביית משחק.

נניח שבניסוי איזה שהוא קיימות n תוצאות שווי-סיכוי, ביניהן ולמאורע (הרצוי) A מתאימות m_1 תוצאות, ולמאורע המש $\overline{A}$ - m_2 תוצאות.

על-פי ההגדרה של מאורע משלים מתקיים :

$$m_1 + m_2 = n \qquad (1)$$

(כלומר, סכום כל המאורעות הרצויים והבלתי רצויים שווה לסך כל האפשרויות).

על-פי ההגדרה, הסתברות המאורע A שווה ליחס המאורעות הרצויים למספר כל האפשרויות :

$$P(A) = \frac{\text{המאורעות הרצויים}}{\text{כל המאורעות}} = \frac{m_1}{n}$$

ובדומה, הסתברות המאורע המשלים שווה ל-

$$P(\overline{A}) = \frac{m_2}{n}$$

נחבר את שתי ההסתברויות :

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = \frac{m_1 + m_2}{n}$$

נשתמש בשוויון (1), ונקבל סופית :

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{n}{n} = 1$$

סכום הסתברויות של מאורעות משלימים שווה ל- 1 :

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

באמצעות נוסחה זאת אפשר לחשב הסתברות של מאורע כאשר ידועה הסתברות המאורע המשלים:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \qquad (2)$$

דוגמה 2 הסתברות הפגיעה במטרה נעה על-ידי קלע מסוים שווה ל- 0.8.
מה ההסתברות שהקלע יחטיא?

◀ נסמן את המאורע "פגיעה במטרה" באות A; אז על-פי הנתון:

$$P(A) = 0.8$$

מכיוון שההחטאה $\overline{A}$ היא מאורע משלים לפגיעה (הקלע או פוגע, או מחטיא), אפשר לרשום עבור הסתברות ההחטאה:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.8 = 0.2$$

תשובה: 0.2 ▷

נחזור ל**דוגמה 1**, שבה חישבנו (בסעיף ב') את ההסתברות שהמשתתף יקבל כרטיס שאינו זוכה. את אותה תוצאה אפשר לקבל באמצעות הנוסחה (2):
אי-זכייה היא מאורע משלים לזכייה, לכן-

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = 95\%$$

תרגילים

1. מה המאורע המשלים למאורע הנתון:
   א) בהטלת המטבע יצא מספר;
   ב) בהטלת קוביית משחק הופיע מספר 5;
   ג) בהטלת קוביית משחק הופיע מספר זוגי;
   ד) בהגרלת טוטו כרטיס של תמיר זכה;
   ה) מחוג של רולטה נעצר בגזרה 4;
   ו) מתיבה שנמצאים בה 2 כדורים לבנים ו- 3 שחורים הוציאו באקראי כדור לבן?

2. הסתברות זכייה של כרטיס אחד בהגרלה בית-ספרית שווה ל-
   א) 0.03 ב) $\frac{2}{121}$.
   מה ההסתברות של משיכת הכרטיס שאינו זוכה?

3. המאורע A מסמן הופעת המספר הקטן מ- 5 בהטלת קוביית משחק.
מה המשמעות של המאורע $\overline{A}$? מצאו את $P(\overline{A})$ המבוטא באחוזים.

4. מה ההסתברות שכתוצאה של הטלה אחת של קוביית משחק לא יופיע מספר 6?

5. מה ההסברות שאבן שתוצא מאוסף שלם של אבני דומינו לא תהיה דַּבֶּל (כפול)?

6. בתיבה נמצאים 3 כדורים לבנים, 4 שחורים ו- 5 אדומים.
מה ההסתברות שכדור שיוצא באקראי יהיה:
א) לא לבן ב) לא שחור ג) לא אדום ?

7. המאורע B מסמן פגיעה במטרה של לפחות קליע אחד.
מה המשמעות של המאורע $\overline{B}$?

2. איחוד מאורעות זרים (חיבור של הסתברויות)

אם A ו- B הם מאורעות שאינם יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת (כלומר, A ו- B הם *מאורעות זרים*), אז הסתברות ההתרחשות של **אחד משני המאורעות (איחוד המאורעות)** – המאורע שנקרא לו C - שווה לסכום ההסתברויות של כל אחד מהמאורעות:

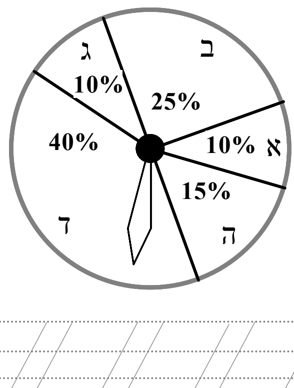
$$P(C) = P(A) + P(B)$$

דוגמה 1 מטילים קוביית משחק. מה ההסתברות שהמספר שיופיע יהיה 5 **או** 2?

◄ שני המאורעות – הופעת המספר 5 (מאורע A) והופעת המספר 2 (מאורע B) אינם יכולים להתרחש יחד (יכול להופיע או 5, או 2), לכן הם מאורעות זרים, והסתברות ההתרחשות של **אחד מהם** שווה לסכום ההסתברויות של כל אחד מהם.

מכיוון ש- $P(A) = \frac{1}{6}$ ו- $P(B) = \frac{1}{6}$ נקבל: $P(C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$. ▷

דוגמה 2 גלגל הרולטה מחולק ל- 5 גזרות א׳ – ה׳ בעלות שטח שונה, כפי שמסומן באיור. מה ההסתברות שלאחר סיבוב, מחוג הגלגל יעצור בגזרה א׳ או גזרה ב׳ או גזרה ג׳?



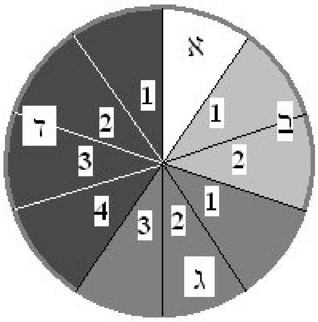
◄ הסתברות הימצאותו של המחוג בגזרה מסוימת נמצאת ביחס ישר לשטח הגזרה.

מכיוון שהמחוג יכול להימצא בגזרה אחת בלבד, הימצאותו בגזרה א׳ או בגזרה ב׳ או בגזרה ג׳ הינן מאורעות זרים (שלא יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת), אז ההסתברות המבוקשת שווה לסכום ההסתברויות:

▷ $P(C) = 10\% + 25\% + 10\% = 45\% = 0.45$

3. חיתוך מאורעות בלתי תלויים (מכפלה של הסתברויות)

דוגמה 1 גלגל רולטה מחולק ל- 4 אזורים (א׳- ד׳);



כל אזור מחולק לגזרות ממוספרות. כל הגזרות בעיגול שוות.

מה ההסתברות שמחוג הגלגל יעצור בגזרה מס. 2 של אזור ד׳?

◄ דרך א. מכיוון ששטחי כל הגזרות שווים, שווה גם הסתברות ההימצאות של המחוג בכל אחת מהגזרות.
סך הכול קיימות 10 אפשרויות, מתוכן אחת היא רצויה,

▷ לכן ההסתברות שווה ל- $P = \frac{1}{10}$.

דרך ב. תחילה נחשב את הסתברות ההימצאות המחוג באזור ד׳.

מכיוון ששטח האזור שווה ל- $\frac{4}{10}$ משטח העיגול (4 גזרות מתוך 10 גזרות סה״כ),
גם הסתברות זו שווה ל- $P_{ד} = \frac{4}{10}$.

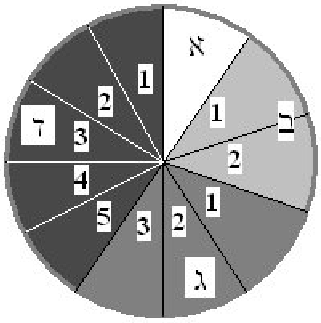
בתוך האזור המחוג יכול לעצור בכל אחת מ- 4 גזרות, מתוכן אחת (גזרה מס. 2) היא רצויה.
לכן, הסתברות העצירה בגזרה 2 **כאשר המחוג נמצא באזור ד׳** שווה ל- $P_2 = \frac{1}{4}$.

מהשוואה של $P_{ד}$ ו- P_2 עם התוצאה שהתקבלה בדרך I אפשר להסיק:

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10} \quad ⇨ \quad P = P_{ד} \cdot P_2$$

אם המאורעות A ו- B הם *בלתי-תלויים* (כלומר: התרחשות של אחד מהם אינה משפיעה על הופעת השני), ההסתברות $P(C)$ של המאורע C, ששני המאורעות יתרחשו בעת ובעונה אחת **(חיתוך המאורעות)**, שווה למכפלת ההסתברויות של כל אחד מהם:

$$P(C) = P(A) \times P(B)$$



דוגמה 2 גלגל רולטה מחולק ל- 4 אזורים (א׳- ד׳), ששטחם הכולל כמו בדוגמה 1; כל אזור מחולק לגזרות שוות וממוספרות. הגזרות באזורים א׳, ב׳ ו- ג׳ שוות לגזרות בדוגמה 1, שטח הגזרות באזור ד׳ שונה (בדוגמה זו האזור מחולק ל- 5 גזרות, ולא ל- 4).

מה ההסתברות שמחוג הגלגל יעצור בגזרה מס. 2 של אזור ד׳?

◄ מכיוון ששטחי הגזרות באזור ד׳ שונים מאזורים אחרים, הסיכוי להימצאות המחוג באחת הגזרות של האזור ד׳ שונה מסיכוי להימצא בכל גזרה של אזורים אחרים; לכן המאורעות הם <u>אינם שווי-סיכוי</u>, ואי-אפשר לחשב את ההסתברות כיחס של מספר המאורעות הרצויים. אי-לכך, <u>דרך א׳ אינה מתאימה</u>.

נתייחס למאורע הנדון כ**מאורע דו-שלבי**: השלב הראשון – הימצאות המחוג באזור ד׳. הסתברות המאורע הזה היא ביחס ישר לשטח האזור, וכמו בדוגמה 1,

$$P_{ד} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

השלב השני – הימצאות המחוג באחת הגזרות של אזור ד׳ (גזרה 2). הסתברות מאורע זה שווה ליחס המאורעות הרצויים (1) למספר כל האפשרויות (5 – על-פי מספר הגזרות):

$$P_2 = \frac{1}{5}$$

שני המאורעות – הימצאות המחוג באזור ד׳ והימצאותו בגזרה 2 בתוך אזור זה – יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת, לכן הם בלתי-תלויים, והסתברות המאורע הרצוי, שהוא - **חיתוך שני מאורעות** – שווה למכפלה:

$$\triangleright \quad P = P_{ד} \cdot P_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$$

כלל מכפלת ההסתברויות של מאורעות בלתי-תלויים מתקיים גם כאשר מספר המאורעות גדול מ- 2.

דוגמה 3 מטילים קובייה 3 פעמים.

מה ההסתברות שספרה 6 תופיע <u>לפחות</u> פעם אחת?

◄ מכיוון שהופעת כל ספרה אינה תלויה בתוצאה הקודמת, <u>המאורעות הם בלתי-תלויים</u>.

מספר כל האפשרויות הוא: 6 x 6 x 6 = 216.

אולם כיצד לחשב מספר מאורעות רצויים?

אפשר לנסות בדרך ישרה: ספרה 6 יכולה להופיע פעם אחת, 2 פעמים או 3 פעמים.

כל מאורע כזה הוא מאורע רצוי.

המאורע שבו הספרה 6 מופיעה 3 פעמים הוא יחיד: 6 – 6 – 6.

כדי לחשב מספר המאורעות שבהם הספרה 6 מופיעה פעם אחת, נכין טבלה:

הופעה אחת		
הטלה ראשונה	**הטלה שנייה**	**הטלה שלישית**
6	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)
סה"כ: 1 x 5 x 5 = **25 מאורעות רצויים**		
כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	6	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)
סה"כ: 1 x 5 x 5 = **25 מאורעות רצויים**		
כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	6
סה"כ: 1 x 5 x 5 = **25 מאורעות רצויים**		

ובכן, מספר המאורעות הרצויים שבהם מופיע 6 <u>פעם אחת</u> הוא – 75.

הספרה 6 יכולה להופיע <u>פעמיים</u> במקרים שלהלן:

2 הופעות		
הטלה ראשונה	**הטלה שנייה**	**הטלה שלישית**
6	6	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)
סה"כ: $1 \times 5 \times 5$	=	**5 מאורעות רצויים**
כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	6	6
סה"כ: $1 \times 5 \times 5$	=	**5 מאורעות רצויים**
6	כל מספר מלבד 6 (סה"כ – 5 אפשרויות)	6
סה"כ: $1 \times 5 \times 5$	=	**5 מאורעות רצויים**

מספר כל המאורעות הרצויים הוא אפוא: $75 + 15 + 1 = 91$.

נחלק במספר המאורעות הכולל ונקבל את ההסתברות הרצויה:

$$P = \frac{91}{216} \approx 0.42 \qquad \triangleright$$

הפתרון הישיר – באמצעות ספירת מספר המאורעות הרצויים הוא ארוך ומייגע... האם קיימת דרך לקצרו?

ובכן, כן: במקום לחשב את מספר הפעמים שבהן מופיעה הספרה 6, נחשב מספר פעמים, שבהן היא אינה מופיעה! כלומר: נחשב את ההסתברות של <u>המאורע המשלים</u>, כאשר הספרה 6 לא תופיע אפילו פעם אחת.

עבור זריקה בודדת הסתברות כזאת שווה ל- 5/6 (5 תוצאות "רצויות" מסך כל 6 האפשרויות). עבור 3 הטלות נקבל הסתברות של אי-הופעת הספרה 6 <u>כחיתוך המאורעות</u> (הרי המאורעות הם בלתי-תלויים):

$$P(\overline{A}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$

הסתברות המאורע המשלים שווה ל:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) =$$

$$= 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0.42$$

כמובן, קיבלנו תוצאה זהה.

§26 הטלת שתי קוביות משחק

במשחק שש-בש מטילים שתי קוביות משחק הוגנות (כלומר, כאלה שסיכויי הופעת כל אחת משש פאות הקובייה הם שווים).

כתוצאה, יכולים להופיע צירופי מספרים שונים (ראו שאלות 14 - 17 במאגר).

בסעיף זה נחשב את ההסתברויות של צירופים אופייניים שונים.

1. **הופעת צירוף המספרים הרצוי (המספרים אינם זהים)**

ניח שצריך להוציא (3: 4). מה הסיכוי לכך?

הסתברות ההופעה של מספר מסוים (3) על גבי קובייה אחת היא - $\frac{1}{6}$.

הסתברות ההופעה של מספר שני (4) על קובייה אחרת גם היא - $\frac{1}{6}$.

שני המאורעות הם <u>בלתי-תלויים</u> (כלומר יכולים להתרחש יחד),

לכן הסתברות <u>החיתוך של שניהם</u> (הופעה משותפת של שני המאורעות) שווה למכפלה:

$$\frac{1}{6} \text{x} \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \qquad (1)$$

כעת, ניקח בחשבון שסדר הופעת המספרים אינו חשוב: התוצאה תהיה זהה אם על גבי הקובייה הראשונה יופיע מספר 4, ועל השנייה – 3.

הסתברות המאורע הזה גם היא שווה ל- $\frac{1}{36}$.

שני המאורעות – $(3 - 4)$ ו- $(4 - 3)$ הם *מאורעות זרים* (עשויה להתממש רק אחת מהם). ההסתברות של *איחוד המאורעות הזרים* שווה לסכום ההסתברויות;

לכן נקבל סופית עבור הסתברות את ההופעה של הצמד 3 – 4:

$$P(3:4) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18} \qquad \triangleright$$

2. הופעת מספרים זהים מסוימים

מה הסיכוי להוציא (3 :3)?

הסתברות הופעה של 3 על-גבי קובייה ראשונה שווה ל - $\frac{1}{6}$.

הסתברות ההופעה של 3 על-גבי קובייה שנייה גם היא שווה ל - $\frac{1}{6}$.

המאורעות הם בלתי-תלויים, לכן ההסתברות הנדרשת שווה למכפלה:

$$\triangleright \quad P(3{:}3) = \frac{1}{6} x \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

3. הופעת מספרים זהים כלשהם

מה הסיכוי להוציא דַבֶּל כלשהו?

הסתברות ההופעה של צמד מספרים זהים <u>מסוימים</u> היא - $\frac{1}{36}$.

מכיוון שהופעות הצמדים (n:n) (הדבלים) השונים (1:1, 2:2, 3:3, 4:4, 5:5 ו- 6:6) הם מאורעות *זרים* (שאינם יכולים להתרחש בעת ובעונה אחת), ההסתברות הנדרשת שווה לסכום כל ההסתברויות:

$$\triangleright \quad P(n{:}n) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + ... + \frac{1}{36} = 6 \bullet \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

4. הופעת סכום המספרים מסוים

א) נרשום את כל הצירופים האפשריים המרכיבים את הסכום הנתון;

ב) נרשום את ההסתברות של כל הצירוף, כפי שמצאנו בסעיפים הקודמים;

ג) נחבר את ההסתברויות של כל המאורעות הזרים.

דוגמה 1 מה ההסתברות שסכום המספרים על-גבי שתי הקוביות יהיה 5?

א) הצירופים האפשריים: 1:4, 2:3;

ב) כפי שמצאנו בסעיף 1:

$$P(1{:}4) = \frac{1}{18}, \ P(2{:}3) = \frac{1}{18}$$

ג) המאורעות (1:4) ו- (2:3) הם מאורעות זרים, לכן:

$$\triangleright \quad P(5) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = \frac{1}{9}$$

דוגמה 2 מה ההסתברות שסכום המספרים על-גבי שתי הקוביות יהיה 8?

◄ א) הצירופים האפשריים: 2:6, 3:5; 4:4

ב) כפי שמצאנו בסעיף 1: $P(2:6)=\frac{1}{18},\ P(3:5)=\frac{1}{18}$

כפי שמצאנו בסעיף 2:

$$P(4:4) = \frac{1}{36}$$

ג) כל המאורעות הם מאורעות זרים, לכם מחברים את ההסתברויות:

$$P(8) = P(2:6) + P(3:5) + P(4:4) = \frac{1}{18}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{5}{36} \quad \triangleright$$

5. אי-הופעת מספר מסוים

כאשר היריב במשחק שש-בש צריך להחזיר אבנים ללוח, אנו מקווים, שלא יופיע מספר מסוים על-גבי הקוביות שהוא יטיל.
מה ההסתברות לכך?

ברור, שאי-הופעת מספר מסוים הוא <u>המאורע המשלים</u> להופעתו של מספר זה (ראו סעיף §42.1). לכן, די לחשב את הסתברות ההופעה של המספר הנדון, ולהשתמש בנוסחה למאורע המשלים.

דוגמה 1 מה הסיכוי שאם נטיל את הקובייה פעם אחת לא יתקבל המספר 3?

◄ הסיכוי שיופיע מספר 3 הוא $P(3) = \frac{1}{6}$ (מאורע רצוי אחד מתוך סה"כ 6 אפשרויות). הסיכוי <u>שלא יופיע</u> מספר 3 הוא *מאורע משלים*, שסיכויו:

$$P(\overline{3}) = 1 - \frac{1}{6}= \frac{5}{6} \quad \triangleright$$

דוגמה 2 מה הסיכוי שאם נטיל את הקובייה <u>פעמיים</u> לא יתקבל המספר 3 ולו פעם אחת?

◄ שתי ההטלות הן מאורעות בלתי-תלויים, לכן ההסתברות ששניהם יתקיימו שווה למכפלת ההסתברויות של כל אחד מהם:

$$P(\overline{3})\cdot P(\overline{3}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36} \quad \triangleright$$

§27 סביבון

על הפאות של סביבון חנוכה רשומות האותיות **נ**, **ג**, **ה** ו- **פ**.

מסובבים את הסביבון <u>פעם אחת</u>.

א) מה הסיכוי שתופיע אות מסוימת?

ב) מה הסיכוי <u>שלא תופיע</u> אות מסוימת?

◄ א) מתוך 4 אפשרויות היתכנות <u>המאורע הרצוי</u> (הופעת אות מסוימת) הוא אחד.

לכן הסתברות ההופעה של אות כלשהי שווה ל- $\frac{1}{4}$:

$$P(\text{נ}) = P(\text{ג}) = P(\text{ה}) = P(\text{פ}) = \frac{1}{4}$$

ג) <u>אי-הופעת</u> אות היא <u>מאורע משלים</u> להופעתה. לכן הסיכוי שאות מסוימת לא תופיע בסביבון שווה ל- $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$:

$$P(\overline{\text{נ}}) = P(\overline{\text{ג}}) = P(\overline{\text{ה}}) = P(\overline{\text{פ}}) = \frac{3}{4} \quad \triangleright$$

מסובבים סביבון <u>שתי פעמים</u>.

א) מה הסיכוי שאות מסוימת תופיע פעמיים?

ב) מה הסיכוי <u>שאות מסוימת לא תופיע</u> אפילו פעם אחת?

ג) מה הסיכוי שאות מסוימת תופיע <u>בדיוק</u> פעם אחת?

ד) מה הסיכוי שאות מסוימת תופיע <u>לפחות</u> פעם אחת?

◄ א) הסיכוי של הופעת האות בסיבוב הראשון שווה ל- $\frac{1}{4}$.

סיכוי הופעתה של אותה אות בסיבוב השני הוא גם $\frac{1}{4}$.

שני המאורעות הם בלתי תלויים (יכולים להתרחש יחד), לכן ההסתברות של ההתרחשות של שניהם שווה למכפלה:

$$P(\text{נ:נ}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16} \quad \triangleright$$

ב) אי-הופעת אות היא <u>מאורע משלים</u> להופעתה של האות.

לכן הסיכוי של אי-הופעתה של האות "נ" לדוגמה, שווה ל:

$$P(\overline{\text{נ}}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \triangleright$$

ג) יש שתי אפשרויות:

1) האות מופיעה בסיבוב הראשון ולא מופיעה בשני;
2) האות לא מופיעה בסיבוב הראשון ומופיעה בשני.

המאורעות 1) ו- 2) הם <u>מאורעות זרים</u> (יכול להתרחש או 1) או 2), ולא ביחד), לכן הסתברות המאורע המבוקש שווה לסכום שתי ההסתברויות:

$$P(\text{נ}) = P_1 + P_2$$

המאורע 1) מורכב משניים: הופעת האות בסיבוב הראשון (הסיכוי = $\frac{1}{4}$), ואי-הופעתה בסיבוב השני (ההסתברות = $\frac{3}{4}$). המאורעות הם בלתי-תלויים (המתרחשים יחד – אחד לאחר השני), לכן הסיכוי שווה למכפלה:

$$P_1 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$$

בדומה לכך, הסתברות המאורע 2) שווה ל-:

$$P_2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

נחבר את ההסתברויות ונקבל תשובה:

הסיכוי שאות מסוימת (למשל "נ") תופיע בדיוק פעם אחת לאחר שני סיבובים שווה ל:

$$\triangleright \quad P(\text{נ}) = P_1 + P_2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8}$$

ד) <u>דרך א</u> כמו במקרה הקודם, המאורע מורכב משני מאורעות זרים:

$$P(\text{נ}) = P_1 + P_2$$

כאשר P_1 הוא הסיכוי של הופעת האות בסיבוב הראשון (ובסיבוב השני יכולה להופיע כל אות), ו- P_2 הוא הסיכוי של הופעת האות בסיבוב השני (בסיבוב הראשון יכולה להופיע כל אות, מלבד האות המבוקשת, שהופעתה נלקחה בחשבון של P_1).

הסתברות המאורע שבו יכולה להופיע כל אות שווה ל- 1 (כל מאורע הוא רצוי). לכן:

$$P_1 = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

חישוב של P_2: סיכוי הופעת האות הרצויה בסיבוב השני = $\frac{1}{4}$;

סיכוי הופעת כל אות מלבד האות המבוקשת = $\frac{3}{4}$.

לכן: $P_2 = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$, וסיכוי הופעת האות לפחות פעם אחת הוא:

$$P(\text{נ}) = P_1 + P_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}$$

<u>תשובה</u>: $P = \frac{7}{16}$ ▷

<u>דרך ב</u> נמצא את ההסתברות שהאות <u>לא תופיע</u> ולו פעם אחת.

סיכוי לכך בסיבוב ראשון הוא: $\frac{3}{4}$ (3 <u>מאורעות רצויים</u> מסך כל 4 האפשרויות).

גם הסיכוי שהאות לא תופיע בסיבוב השני הוא שווה ל- $\frac{3}{4}$.

שני המאורעות הם בלתי תלויים; לכן הסיכוי שהאות לא תופיע בשני הסיבובים הוא המכפלה:

$$P(\bar{\text{נ}}) = \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$$

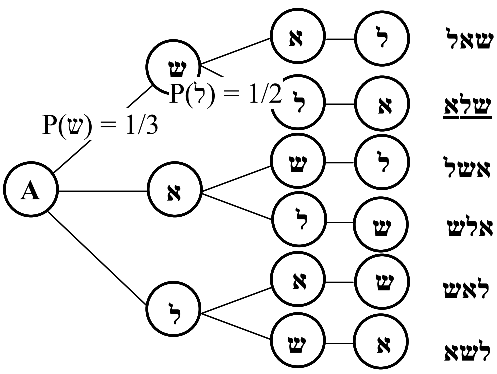
הסיכוי שהאות תופיע לפחות פעם אחת שווה להסתברות המאורע המשלים:

$$P(\text{נ}) = 1 - P(\bar{\text{נ}}) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$ ▷

§28 הסתברות של מאורע דו-שלבי. עץ האפשרויות

נתבונן בדוגמה:

דוגמה 1 בקופסה 3 קוביות-משחק זהות: אדומה (א), שחורה (ש) ולבנה (ל). מוצאים את הקוביות באקראי, אחת אחרי השנייה. מה ההסתברות, שסדר הופעת הקוביות יהיה **(ש)** – **(ל)** – **(א)**?



◀ את כל האפשרויות וביניהן המאורעות הרצויים אפשר להציג באמצעות *עץ האפשרויות* בדרך שלפניכם:

כל מסלול רציף **(ענף)** מייצג אפשרות מסוימת; לדוגמה הענף העליון מייצג משיכת קובייה שחורה (ש), אחריה – אדומה (א), ולבסוף לבנה (ל).

הענף המייצג את המאורע הרצוי (**ש–ל–א**) הוא אחד מ- 6 ענפי העץ ;

לכן ההסתברות שיתממש המאורע הרצוי היא - $\frac{1}{6}$.

נראה כיצד אפשר להגיע לתשובה בלי ספירה קפדנית של כל האפשרויות.

1) שלושת הענפים הם **מאורעות זרים** (כלומר, ענף אחד בלבד יכול להתממש) ;
לדוגמה, בשלב הראשון אפשר לבחור **או** כדור שחור, **או** אדום, **או** לבן) ;
כאשר כמה מהענפים הם **מאורעות רצויים**, מחברים את ההסתברויות של כל אחד מהם.
בדוגמה הנ"ל *רק ענף אחד הוא רצוי* (משיכת הכדור השחור בשלב ראשון), והסיכוי שהוא יתממש שווה ל- $P(\text{ש}) = \frac{1}{3}$.

2) המאורעות *בתוך הענף* הם **בלתי תלויים** (יכולים להתממש יחד, לדוגמה : לאחר בחירת הכדור השחור בשלב הראשון אפשר לבחור בשלב השני את אחד משני הכדורים הנותרים (אדום או לבן), ולהוסיף אותו לכדור השחור, שנבחר קודם.
הסתברות הבחירה של הכדור הלבן (המאורע הרצוי) שווה ל- $P(\text{ל}) = \frac{1}{2}$
(אפשרות אחת מתוך שתיים).
ההסתברות שיתממשו שני מאורעות בלתי תלויים **(איחוד מאורעות בלתי-תלויים)** שווה למכפלת ההסתברויות :

$$P(\text{ש:ל}) = P(\text{ש})xP(\text{ל}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

לאחר בחירת שני הכדורים (שחור ולבן) המאורע של בחירת הכדור האדום הוא *ודאי* (יתממש בהכרח) וההסתברות שלו שווה ל- 1.
לכן הסתברות המאורע המורכב היא :

$$P(\text{ש:ל:א}) = P(\text{ש})xP(\text{ל})xP(\text{א}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{6} \quad \triangleright$$

דוגמה 2

בקופסה שני כדורים לבנים ושלושה שחורים.

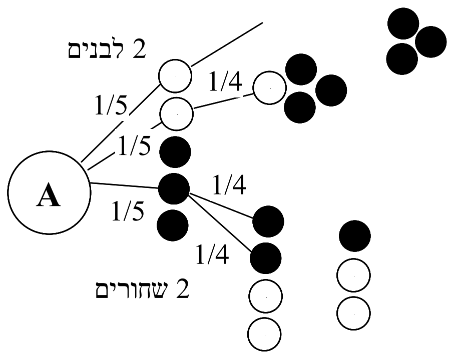
מוציאים באקראי שני כדורים יחד. מה הסתברות המאורע :

א) שני הכדורים הם לבנים ;

ב) שני הכדורים הם שחורים ;

ג) שני הכדורים הם : לבן ושחור.

א) קיימים שני ענפים מתאימים (ראו איור). ההסתברות של כל ענף היא מכפלת הסתברויות הבחירה של כדור ראשון לבן (1/5) וכדור שני לבן (1/4) (אחד מתוך 4 הכדורים שנשארו):



$$P_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

לכן סיכוי המקרה הראשון הוא:

$$P(1) = \frac{1}{20} + \frac{1}{20} = \frac{1}{10}$$

ב) עבור כל אחד מ- 3 הכדורים השחורים קיימים שני ענפים אפשריים (ראו ציור). לכן הסתברות המאורע 2) (שני כדורים שחורים) היא:

$$P(2) = 3 \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{10}$$

ג) ספירת ענפי העץ האפשריים: 2 ענפים המתחילים בכדור לבן ואחריו 3 ענפים העוברים דרך הכדורים השחורים; ו- 3 ענפים המתחילים בכדור שחור ואחריו 2 ענפים העוברים דרך כדור לבן:

$$P(3) = 2 \times \left(3 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) + 3 \times \left(2 \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{4}\right) = \frac{2 \cdot 6}{20} = \frac{3}{5}$$

סיכום:

את אוסף המאורעות ה**בלתי-תלויים** אפשר להציג בצורה של עץ, כאשר הענפים מייצגים את קבוצת המאורעות **הזרים (או** זה **או** אחר), וכל ענף מורכב מסדרת מאורעות בלתי-תלויים, שיכולים להתרחש יחד.

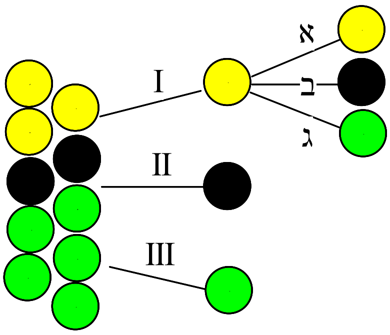
הסתברות המאורע הרצוי שווה לסכום הסתברויות כל הענפים "הרצויים" (**חיבור הסתברויות**), כאשר ההסתברות של כל ענף שווה **למכפלת ההסתברויות** של המאורעות הבלתי-תלויים, שמהם הענף מורכב.

דוגמה 3

בתיבה יש 3 כדורים צהובים, 2 כדורים שחורים ו- 5 כדורים ירוקים. מוציאים באקראי כדור אחד, ומחזירים אותו לתיבה ושוב מוציאים באקראי כדור אחד.

א) מה ההסתברות שבשתי הפעמים הוצא כדור צהוב?

◄ נשרטט את "עץ האפשרויות" המתאר את המאורע "פעמיים הוצא כדור צהוב".



מאורע זה הוא **דו-שלבי**. בשלב ראשון מוציאים כדור אחד. מכיוון שיכולים להוציא שלושה סוגים של כדורים: צהוב **או** שחור **או** ירוק, המאורעות האלה הם **זרים**, ומיוצגים על-ידי 3 ענפי עץ.

לתנאֵי השאלה מתאים ענף I (הוצאת כדור צהוב), שההסתברות שלו שווה ל- $\frac{3}{10}$ (יש 3 כדורים צהובים מתוך 10 כדורים).

בשלב השני, שוב יכולים להתרחש 3 מאורעות, **בלתי תלויים** במאורע של השלב הראשון (הוצאת הכדור השני לא תלויה בסוג הכדור הראשון, *מכיוון שמחזירים אותו לאחר הוצאתו*).

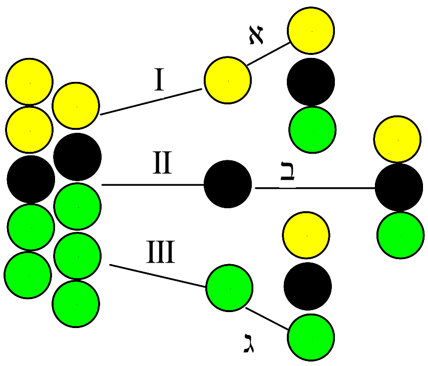
הסתברות ההוצאה של הכדור הצהוב שוב שווה ל- $\frac{3}{10}$.

מכיוון שהמאורעות המתאימים לשני השלבים של אותו ענף I הם בלתי תלויים, ההסתברות הכוללת שווה למכפלת ההסתברויות:

$$P(\text{I}א) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100} = 9\% \qquad \triangleleft$$

ב) מה ההסתברות שבשתי הפעמים הוצאו כדורים באותו צבע?

◄ מאורע זה יכול להתרחש בכל אחד משלושת ענפי העץ: I, II ו- III, שהם **מאורעות זרים** (בשלב ראשון אפשר להוציא רק כדור אחד בצבע איזה שהוא).



אולם, להבדיל מהמקרה הקודם, **המאורע הרצוי** (הוצאת שני כדורים מאותו צבע) **יכול להתרחש בכל אחד מהענפים האלה** (ראו את הענפים המתאימים בעץ האפשרויות: Iא, IIב, IIIג).

לכן המאורע המורכב הרצוי מהווה **חיבור** של המאורעות הזרים:

$$P(A) = P(\text{I}א) + P(\text{II}ב) + P(\text{III}ג)$$

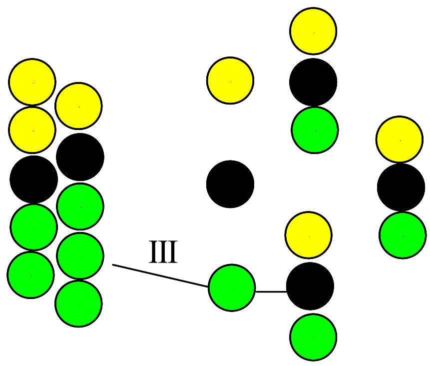
בתוך כל ענף, המאורעות הם **בלתי תלויים**, לכן הסתברות המאורע הדו-שלבי בכל ענף שווה **למכפלת ההסתברויות**:

$$P(\text{Iא}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}\ ,\ \ P(\text{IIב}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{4}{100}\ ,\ \ P(\text{IIIג}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{25}{100}$$

נחבר ונקבל תשובה:

$$P(A) = \frac{9}{100} + \frac{4}{100} + \frac{25}{100} = \frac{38}{100} = 38\% \qquad \triangleleft$$

ג) מה ההסתברות שתחילה הוצא כדור ירוק ואחריו כדור שחור?



◄ למאורע זה מתאים הענף התחתון, המורכב משני מאורעות בלתי תלויים:

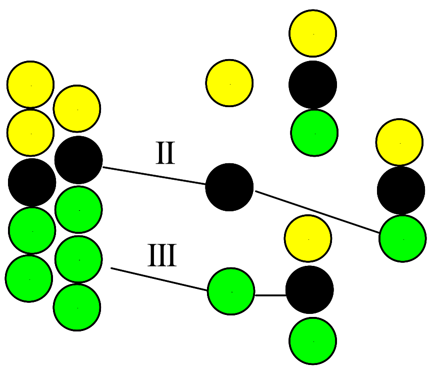
הוצאת כדור ירוק (הסתברות = $\frac{2}{10}$)

והוצאת כדור שחור (הסתברות = $\frac{5}{10}$).

הסתברות המאורע הדו-שלבי שווה למכפלה:

$$P(A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{10} = \frac{1}{10} \qquad \triangleright$$

ד) מה ההסתברות שאחד משני הכדורים שהוצאו הוא ירוק והשני שחור?



◄ לענף התחתון התווסף ענף, המייצג מקרה של בחירת הכדור השחור תחילה, ואחריו כדור ירוק.

הסתברות המאורע הזה שווה למכפלה:

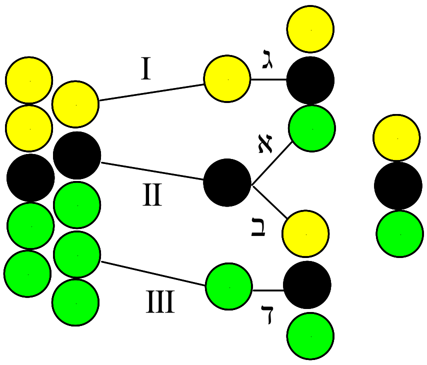
$$\frac{2}{10} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$$

וההסתברות המסכמת שווה לסכום ההסתברויות של שני הענפים:

$$P(A) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5} \qquad \triangleright$$

ה) מה ההסתברות **שבדיוק** אחד משני הכדורים שהוצאו הוא שחור?

◀ נתבונן בעץ האפשרויות. כל אחד משלושת הענפים I, II ו- III מכיל את המאורע הרצוי:



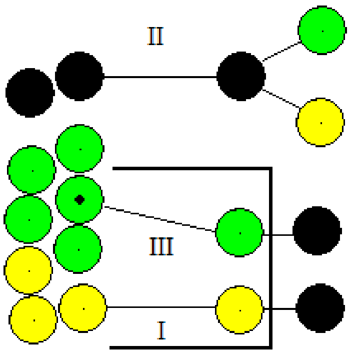
ענף II מייצג מקרה שבו בשלב הראשון הוצא כדור שחור;

ההסתברות של השלב הזה שווה ל- $\frac{2}{10}$.

המאורע של השלב השני ("לא יוצא כדור שחור") הוא **מאורע משלים** למאורע "הוצא כדור שחור", לכן ההסתברות שלו שווה ל- $1-\frac{2}{10}=\frac{8}{10}$.

שני השלבים בענף אחד הם מאורעות **בלתי תלויים**, לכן ההסתברות של הענף II שווה למכפלה:

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{4}{25}$$



שני הענפים I ו- III מתארים מקרים שבהם הכדור השחור לא יוצא בשלב הראשון, אלא בשלב השני.

אפשר לחשב את ההסתברויות לכך בעזרת עץ האפשרויות שבו שני הענפים I ו- III מהווים ענף אחד, שבו הכדור השחור **לא הוצא** בשלב הראשון.

ההסתברות למאורע זה גם היא שווה ל- $1-\frac{2}{10}=\frac{8}{10}$ (המאורע המשלים למאורע "הוצא כדור שחור").

בשלב השני בענף זה מתרחשת הוצאה של הכדור השחור. ההסתברות לכך היא $\frac{2}{10}$.

שני השלבים בענף אחד הם מאורעות **בלתי תלויים**, לכן ההסתברות של הענף המאוחד I ו- III שווה למכפלה:

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{8}{10}=\frac{4}{25}$$

המאורעות של שני הענפים II ו- (I+III) הם זרים (מתממש **או** מקרה ראשון **או** שני),

לכן המאורע הרצוי הוא **איחוד** שני המאורעות, וההסתברות שלו שווה לסכום:

$$\frac{4}{25}+\frac{4}{25}=\frac{8}{25}$$ ◁

בדיוק, לפחות וככל היותר...

כאשר מדובר על מאורעות **חוזרים**, כמו זריקת קוביית משחק, עולות שאלות גם לגבי סיכויי הופעתה של ספרה מסוימת, וגם לגבי סיכויי הופעתה **מספר פעמים** באותו משחק.

לדוגמה: הסתברות הופעת הספרה 3 על הפאה העליונה של קוביית משחק שווה ל- $\frac{1}{6}$ (תוצאה אחת רצויה מתוך 6 אפשרויות).

מה ההסתברות שגם בזריקה הבאה יופיע 3? גם היא שווה ל- $\frac{1}{6}$ (מכיוון שתוצאת הזריקה אינה תלויה במספר שיצא לפניה – המאורעות הם בלתי תלויים).

מה הסיכוי שהספרה 3 תופיע בשתי זריקות אחת אחרי השנייה?

מכיוון שהמאורעות הם בלתי תלויים, המאורע המורכב הוא **חיתוך** של שניהם, וההסתברות שלו שווה למכפלת ההסתברויות:

$$P(3{:}3) = P(3) \cdot P(3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

ומה הסיכוי שהספרה 3 תופיע שלוש פעמים ברצף?

בדומה למקרה הקודם, כל המאורעות (הופעת הספרה 3) הם בלתי תלויים, המאורע המורכב הוא חיתוך שלוש המאורעות, וההסתברות שווה ל-

$$P(3{:}3{:}3) = P(3) \cdot P(3) \cdot P(3) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$$

ואולם, ישנם מצבים, שלא רצוי לקבל "דַבֶּל" 3:3, אלא שספרה אחת תהיה 3 והשנייה כל ספרה אחרת (כלומר, שמתוך שתי זריקות 3 תופיע **בדיוק פעם אחת**). מה הסיכוי לכך?

בשפת תורת ההסתברות אפשר לומר, שהמאורע הרצוי מורכב משני מאורעות בלתי תלויים: האחד – הופעת הספרה 3, והשני – הופעת כל ספרה מלבד הספרה 3, כלומר – **אי-הופעה** של 3. זהו מאורע **משלים** למאורע של הופעה של 3, לכן ההסתברות שלו שווה ל-

$$P(\overline{3}) = 1 - P(3) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

והסתברות המאורע המורכב שווה למכפלה:

$$P(3:\overline{3}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{36}$$

דוגמה 4 זורקים קובייה שלוש פעמים.

א. מה הסיכוי שהספרה 2 תופיע שלוש פעמים?

◀ סיכוי הופעתה של 2 הוא $P(2) = \frac{1}{6}$;

המאורעות הם בלתי תלויים, לכן: $P(2:2:2) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$. ▷

ב. מה הסיכוי שמתוך 3 זריקות הספרה 2 תופיע **בדיוק** שתי פעמים?

◀ המאורע הרצוי מורכב משתי הופעות של 2 והופעה אחת של "לא 2", לכן:

$$P(2:2:\overline{2}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5}{216}$$ ▷

ג. מה הסיכוי שמתוך 3 זריקות הספרה 2 תופיע **בדיוק** פעם אחת?

◀ המאורע הרצוי מורכב מהופעה אחת של 2 ושתי הופעות של "לא 2", לכן:

$$P(2:\overline{2}:\overline{2}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{25}{216}$$ ▷

ד. מה הסיכוי שמתוך 3 זריקות הספרה 2 **לא תופיע** אף פעם?

◀ המאורע הרצוי מורכב מ- 3 הופעות של "**לא 2**", לכן:

$$P(\overline{2}:\overline{2}:\overline{2}) = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{125}{216}$$ ▷

ה. מה הסיכוי שמתוך שלוש זריקות הספרה 2 תופיע **לפחות** פעם אחת?

◀ נחשוב, מה המאורע <u>המשלים</u> למאורע המתואר "הספרה 2 תופיע **לפחות** פעם אחת"?

ברור שזה המאורע "הספרה 2 **לא תופיע אפילו פעם אחת**", שאת ההסתברות שלו חישבנו בסעיף הקודם.

לכן, ההסתברות הנדרשת שווה ל-

$$1 - P(\overline{2}:\overline{2}:\overline{2}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$ ▷

ו. מה הסיכוי שמתוך שלוש זריקות הספרה 2 תופיע **לפחות** פעמיים?

◀ למאורע זה מתאים **איחוד** המאורעות הבאים: **או** שהספרה 2 מופיעה שלוש פעמים

(ההסתברות שווה ל- $P(2:2:2) = \frac{1}{216}$), **או** שהיא **לא** מופיעה בהטלה ראשונה

(ההסתברות שווה ל- $P(\overline{2}:2:2) = \frac{5}{216}$), **או** שנייה, **או** שלישית, לכן ההסתברות של המאורע המורכב שווה ל-

$$P(2:2:2) + P(\overline{2}:2:2) + P(2:\overline{2}:2) + P(2:2:\overline{2}) = \frac{1}{216} + 3\cdot\frac{5}{216} = \frac{16}{216}$$

ז. מה הסיכוי שמתוך 3 זריקות הספרה 2 תופיע **ככל היותר** פעמיים?

◄ גם שאלה זו קל יותר לפתור אם לבדוק את **המאורע המשלים** : <u>הספרה 2 תופיע שלוש פעמים</u>. ההסתברות של המאורע הזה היא : $P(2:2:2) = \frac{1}{216}$.

לכן הסתברות המאורע המשלים היא :

$$P = 1 - \frac{1}{216} = \frac{215}{216} \qquad \triangleright$$

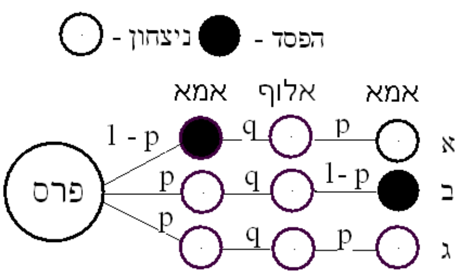
דוגמה 5 כדי לעודד את בתם הלומדת טניס, הוריה מציעים לה פרס אם תנצח ברצף **לפחות** שני משחקים בסדרה של שלושה שתשחק נגד האם ואלוף הליגה, כאשר יש שתי אפשרויות של סדר המשחקים : אימא – אלוף - אימא או אלוף – אימא – אלוף. האלוף משחק יותר טוב מהאימא.

איזה סדר משחקים עדיף לבחור לבת כדי שסיכוייה לזכות בפרס יהיו טובים יותר?

◄ נסמן את הסתברות הניצחון של הבת על אִמהּ ב- p, ועל האלוף ב- q.

על-פי הנתון, $p > q$.

נשרטט את עץ האפשרויות בסדרה <u>אימא-אלוף-אימא</u>.



שלושת הענפים המתאימים לתנאֵי הבעיה מתארים את התוצאות הבאות :

א. הפסד לאימא, ניצחון על האלוף, ניצחון על אימא.

מאורעות אלה הם בלתי תלויים, לכן ההסתברות של הענף א' שווה ל-

$$P(א) = (1 - p)\cdot q\cdot p$$

הערה : אם q היא הסתברות של ניצחון, אז $1 - q$ היא הסתברות של הפסד.

ב. ניצחון על אימא, ניצחון על האלוף, הפסד לאימא.

ההסתברות של הענף ב׳ שווה ל-

$$P(\text{ב}) = p\cdot q\cdot(1-p)$$

ג. ניצחון בכל המשחקים. ההסתברות של הענף ג׳ שווה ל-

$$P(\text{ג}) = p\cdot q\cdot p$$

שלושת הענפים מתארים מאורעות **זרים**, לכן הסתברות הניצחון בסדרה זו שווה לסכום:

$$P = (1-p)\cdot q\cdot p + p\cdot q\cdot(1-p) + p^2q = qp - p^2q + pq - p^2q + p^2q =$$

$$= 2pq - p^2q = pq\,(2-p) \qquad (1)$$

בדומה נחשב את הסתברות הניצחון של הבת בסדרה <u>אלוף – אימא – אלוף</u>:

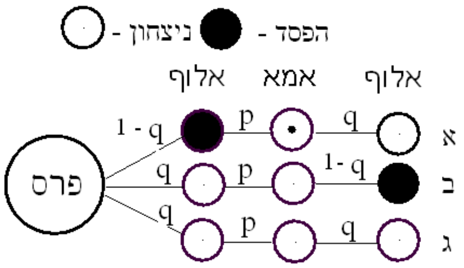
$$P(\text{א}) = (1-q)\cdot p\cdot q$$

$$P(\text{ב}) = q\cdot p\cdot(1-q)$$

$$P(\text{ג}) = q\cdot p\cdot q$$

$$P = (1-q)\cdot p\cdot q + q\cdot p\cdot(1-q) + q^2p =$$

$$= pq\,(2-q) \qquad (2)$$



מכיוון ש- $p > q$ (הסיכוי לנצח את אימא גבוה יותר מהסיכוי לנצח את האלוף),

ברור ש- $2-p < 2-q$, לכן ההסתברות לנצח בסדרה אימא-אלוף-אימא היא קטנה יותר מאשר בסדרה השנייה.

תשובה: כדי לזכות בפרס, על הבת לשחק בסדרה <u>אלוף – אימא – אלוף</u>. ▷

סיכום ביניים: כדי לפתור בעיות בהסתברות של מאורע מורכב יש לשרטט את עץ האפשרויות, לסמן עליו את כל הענפים האפשריים של שלב ראשון ולחשב את ההסתברויות של כל ענף.

לאחר מכן יש לשרטט את כל האפשרויות של השלב השני ולחשב את ההסתברויות שלהן.

לבסוף, יש לבדוק, אֵלו מהמאורעות הם זרים, אֵלו – בלתי תלויים, ולחשב את הסתברות המאורע המורכב.

חידה/פרדוקס (לפותר מובטח פרס ענק!)

פרדוקס הוא מסקנה (או תשובה לשאלה), שהתקבלה בדרך נכונה, אולם אינה נראית הגיונית. פתרון (או הסבר הגיוני) לשאלה הבאה עדיין לא נמצא, למרות חשיבותה רבה של השאלה בתחומים שונים (מתעשיית התרופות ועד לבחירות לכנסת).

ובכן, נתבונן במודל פשוט, הממחיש את הבעיה: בחדר שלושה שולחנות, א׳, ב׳ ו- ג׳. על כל שולחן שני כובעי קסמים, שחור ולבן. בכל כובע שני סוגי מטבעות – מכסף ומזהב, שלא ניתן להבדיל ביניהם על-ידי מישוש. ליד כל כובע כתוב, כמה מטבעות מכל סוג נמצאים בו. מותר להוציא מטבע פעם אחת בלבד.

ניגשים לשולחן א׳.

ליד כובע שחור כתוב: זהב - 5, כסף - 6.

ליד כובע לבן כתוב: זהב - 3, כסף - 4.

מאיזה כובע סיכוי גבוה יותר להוציא מטבע זהב?

◄ ההסתברות להוצאת מטבע זהב מכובע שחור היא:

$$\frac{5}{11} = 0.45$$

ההסתברות להוצאת מטבע זהב מכובע לבן היא:

$$\frac{3}{7} = 0.43$$

לכן הסיכוי גבוה יותר להוציא מטבע זהב הוא מכובע שחור.

ניגשים לשולחן ב׳.

ליד כובע שחור כתוב: זהב - 6, כסף - 3 .

ליד כובע לבן כתוב: זהב - 9, כסף - 5 .

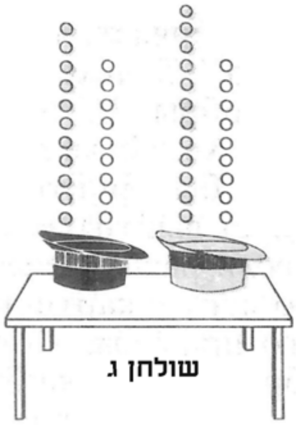
ההסתברות להוצאת מטבע זהב מכובע שחור היא

$$\frac{6}{9} = 0.67$$

ההסתברות להוצאת מטבע זהב מכובע לבן היא

$$\frac{9}{14} = 0.64$$

לכן יש סיכוי טוב יותר להוציא מטבע זהב ליד שולחן ב׳ גם הוא מכובע שחור.



כעת נכנס הקוסם, ומציע לחזור על הניסוי ליד שולחן ג׳, שגם עליו שני כובעים, שחור ולבן.

הקוסם העביר אליהם את תכולת הכובעים מהשולחנות א׳ ו- ב׳: לכובע שחור הוא העביר את כל המטבעות משני הכובעים השחורים (11 מזהב ו- 9 מכסף), וללבן – משני הלבנים (12 מזהב ו- 9 מכסף).

הגיוני לחשוב, שכדאי יותר גם הפעם לנסות את מזלנו עם הכובע השחור.

אולם חישוב ההסתברויות מראה לנו שזה לא כך:

ההסתברות להוצאת מטבע זהב מכובע <u>שחור</u> היא $\frac{11}{20}=0.55$,

ההסתברות להוצאת מטבע זהב מכובע <u>לבן</u> היא $\frac{12}{21}=0.57$.

כלומר: <u>כדאי יותר להוציא מטבע מכובע לבן</u>, מה שסותר כל ההיגיון:

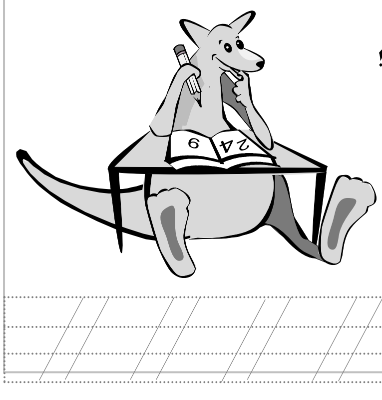
אם בתחרויות נפרדות הכובע השחור מנצח את הלבן, אז איך ייתכן שני השחורים יפסידו ביחד לשני הלבנים?

מודל זה מְדַמֶּה תרחישים מתחומים רבים:

א. שתי מפלגות מתמודדות לכנסת.
בהצבעות בשתי ערים גדולות מנצחת בכל עיר מפלגה אחת, ואילו אם תיערך הצבעה אחת כלל ארצית – המנצחת עלולה להיות המפלגה השנייה!

ב. משווים יעילות של שתי תרופות חדשות, א׳ ו- ב׳, על קבוצת נשים וקבוצת גברים.
בכל אחת מהקבוצות תרופה א׳ התגלתה כיעילה יותר מתרופה ב׳, ואילו נערך הניסוי השוואתי דומה בקבוצה מעורבת של נשים וגברים יחד, תרופה ב׳ עלולה להתגלות כיעילה יותר!

כאמור – לפִתְרון הפרדוקס מובטחת תהילה עולמית!



תרגילים

1. מטילים קוביית משחק פעמיים.

א) מה הסיכוי שתחילה תופיע הספרה 6 ולאחר מכן 3?

ב) מה הסיכוי שתחילה תופיע ספרה 3 ולאחר מכן 6?

ג) מה הסיכוי שבסיכום שתי ההטלות יופיע הצירוף 6:3?

2. מטילים שתי קוביות משחק בו-זמנית.

א) מה הסיכוי שיופיע הצירוף 2:3?

ב) מה הסיכוי שיופיע הצירוף 2:2?

ג) מה הסיכוי שיופיע הצירוף 6:6?

3. מסובבים סביבון פעמיים:

א) מה הסיכוי שהאות **נ** תופיע פעמיים?

ב) מה הסיכוי שהאות **ג** לא תופיע אפילו פעם אחת?

ג) מה הסיכוי שהאות **ה** תופיע בדיוק פעם אחת?

ד) מה הסיכוי שהאות **פ** תופיע לפחות פעם אחת?

4. מה, לדעתכם, שכיח יותר (הסתברות גבוהה יותר) במשפחה של ארבעה ילדים:
שני בנים ושתי בנות או שלושה מהמין האחד ואחד מהמין השני?

5. מה הסיכוי שבהטלת שלוש קוביות סכום הנקודות יִשווה למכפלתן?

6. בארץ מסוימת החליטו שכל אישה תפסיק ללדת אחרי הבן הראשון שייוולד לה.
איך זה ישפיע, לדעתכם, על יחס המינים באוכלוסייה?

7. אם יש סיכוי של 70% שאחרי יום חורף גשום יבוא עוד יום גשום, ויש סיכוי של רק 50% שלאחר יום ללא גשם יבוא יום גשום - מה הסיכוי שאחרי יום ראשון גשום יֵרד גשם ביום שלישי?

8. מטילים קובייה, ובו בזמן מסובבים סביבון שפאותיו מסומנות בספרות 1 עד 4.

א) מה הסיכוי שהקובייה והסביבון יֵראו את אותה הספרה?

ב) מה הסיכוי שהספרה שיראה הסביבון תהייה קטנה מזו שמראה הקובייה?

9. א) איזה מאורע סביר יותר בהטלת שלוש קוביות: "הסכום הוא זוגי" או "הסכום הוא אי- זוגי"?

ב) בהטלת 3 קוביות, הסכום 9 יכול להתקבל על ידי כל אחד משששת הצירופים:

(1,2,6), (1,3,5), (1,4,4), (2,2,5), (2,3,4), (3,3,3)

גם הסכום 10 מתקבל על ידי 6 צירופים:

(1,3,6), (1,4,5), (2,2,6), (2,3,5), (2,4,4), (3,3,4)

האם הסכומים 9 ו- 10 הם שווי הסתברות? נמקו.

10. אדם מפוזר מכניס באקראי שלושה מכתבים ממוענים לשלוש מעטפות שהכין עבורם.

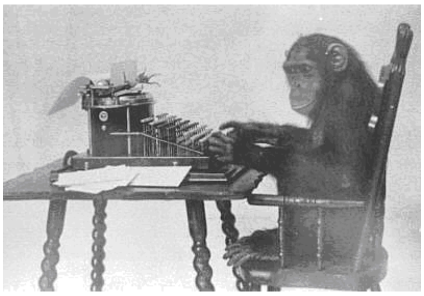
מה הסיכוי שכל שלושת המכתבים הוכנסו למעטפות הנכונות?

נסו לקבל את התשובה בשתי דרכים:

א. על-ידי מניית כל האפשרויות לסדר את המספרים 1, 2, 3

ב. על-ידי בניית עץ האפשרויות וחישוב ההסתברויות בכל הסתעפות.

11.



קוף מאולף יושב ליד מכונת כתיבה בעברית ומקיש באקראי על ארבעה ממקשי האותיות (יש 27 כאלה).

א) מה הסיכוי שארבע האותיות הראשונות שיקיש יהיו המילה 'בננה'? (במקרה הזה יזכה, כמובן, בבננה).

ב) מה הסיכוי שבניסיון הראשון שלו לא יזכה בבננה?

ג) מה הסיכוי שכשנערוך את אותו הניסוי באלף קופים, לא יזכה אף אחד מהם בבננה?

ד) מה הסיכוי שמתוך אלף קופים יזכה אחד מהם, לפחות, בבננה?

12. הסיכוי לגשם במקום מסוים הוא $\frac{1}{8}$ בערב חנוכה, $\frac{1}{5}$ בערב פורים ו- $\frac{1}{10}$ בערב פסח.

א) מה הסיכוי שיֵרֵד גשם בכל ערבי חג אלה?

ב) מה הסיכוי שיֵרֵד גשם בערב חנוכה ובערב פסח, אבל שלא ירד גשם בערב פורים?

ג) מה הסיכוי שלפחות אחד מערבי חג אלה יהיה בלי גשם?

13. במפעל מצויים שלושה מתקני התרעה נגד שרפה.

ההסתברות שהמתקן הראשון יפעל במקרה של שרפה היא 75%;

ההסתברות שהמתקן השני יפעל במקרה של שרפה היא 82%;

ההסתברות שהמתקן השלישי יפעל במקרה של שרפה היא 93%.

מה ההסתברות שלפחות שניים מן המתקנים יפעלו בעת השרפה?

14. שלושה קַלָּעִים יורים במטרה. ההסתברות שהראשון יפגע במטרה היא 0.65, שהשני יפגע בה – 0.85, ושהשלישי יפגע בה – 0.7.

א) מה ההסתברות שאף אחד מהם לא יפגע במטרה?

ב) מה ההסתברות שלפחות אחד מהם יפגע במטרה?

15. במכללה להנדסה 35% מהסטודנטים הן נשים.

בוחרים באקראי שלושה מהלומדים במכללה.

א) מה ההסתברות שייבחרו שני סטודנטים וסטודנטית אחת?

ב) מה ההסתברות שייבחרו לפחות שתי סטודנטיות?

16. בכל אחד משני שקים שמים 20 כדורים בשלושה צבעים: לבן, שחור וכתום.

א) כמה כדורים מכל צבע אפשר לשים בשק א', כדי שההסתברות להוציא כדור כתום משק זה תהיה $\frac{1}{4}$? (רִשמו אפשרות אחת).

ב) כמה כדורים מכל צבע אפשר לשים בשק ב', כדי שההסתברות להוציא כדור כתום משק זה תהיה $\frac{1}{5}$, והסתברות להוציא כדור לבן תהיה $\frac{1}{2}$?

ג) הסתמכו על התשובות שקיבלתם בסעיפים א' ו- ב' וענו:

בוחרים באקראי את אחד השקים, ולאחר מכן מוציאים ממנו באקראי כדור אחד. מה ההסתברות שהכדור שהוצא הוא כדור כתום?

§24

2. א) $\frac{2}{5}$ ב) $\frac{3}{5}$ ג) 0 ד) 1

3. א) $\frac{2}{9}$ ב) $\frac{1}{3}$ ג) $\frac{4}{9}$ ד) $\frac{7}{9}$ ה) $\frac{2}{3}$ ו) $\frac{5}{9}$

4. א) $\frac{1}{10}$ ב) $\frac{1}{2}$ ג) $\frac{3}{10}$ ד) $\frac{1}{5}$ ה) $\frac{1}{5}$ ו) $\frac{2}{5}$

5. א) $\frac{1}{10}$ ב) $\frac{1}{9}$

6. א) $\frac{1}{50}$ ב) $\frac{1}{10}$ ג) $\frac{3}{25}$ ד) $\frac{22}{25}$

7. $\frac{22}{25}$

8. א) $\frac{8}{27}$ ב) $\frac{4}{9}$ ג) $\frac{2}{9}$ ד) $\frac{1}{27}$

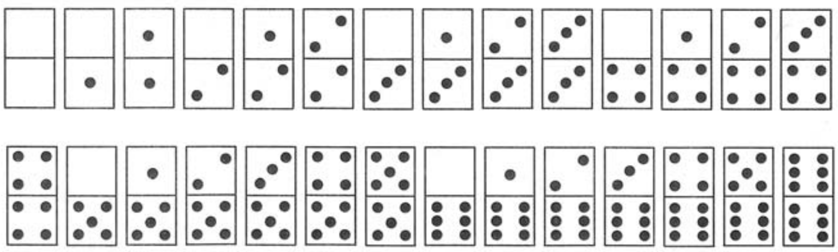
§25

2. א) 0.97 ב) $\frac{119}{121}$

3. 33.3%

4. $\frac{5}{6}$

5. **הדרכה**: בחנו את כל המערכת של אבני דומינו ומצאו, כמה ״דַבֳּלים״ יש ביניהן. **תשובה**: $\frac{3}{4}$.



6. **הדרכה**: חַשבו תחילה את ההסתברות של מאורע משלים.

א) $\frac{3}{4}$ ב) $\frac{2}{3}$ ג) $\frac{7}{12}$

§28

1. א) $\frac{1}{36}$ ב) $\frac{1}{36}$ ג) $\frac{1}{18}$
2. א) $\frac{1}{18}$ ב) $\frac{1}{36}$ ג) $\frac{1}{36}$
3. א) $\frac{1}{16}$ ב) $\frac{9}{16}$

ג) **הדרכה**: יש 2 אפשרויות: הופעה בפעם הראשונה ואי-הופעה בפעם שנייה, ולהפך. **תשובה**: $\frac{3}{8}$

ד) **הדרכה**: חַשבו, מה ההסתברות שהאות לא תופיע ולו פעם אחת?

תשובה: $\frac{7}{16}$

5. **הדרכה**: תחילה מִצאו, מה הצירופים האפשריים לקיום התנאי, אחר-כך חַשבו, כמה פעמים יכולים להופיע צירופים אלה ב- 3 הטלות. **תשובה**: $\frac{1}{36}$
6. לא ישפיע.
7. 0.64
8. א) 1.6 ב) 7.12
9. ב) **הדרכה**: בדקו, האם כל הצירופים הם שווי-סיכוי? למשל, האם הופעת הצירוף (3, 3, 4) היא בעלת אותו סיכוי כמו (3, 3, 3)?

תשובה: לא.

10. 1/6
12. א) **הדרכה**: חִפשו (בעמוד 235) את המושג **איחוד מאורעות בלתי-תלויים.**

תשובה: $\frac{1}{400}$.

ב) **הדרכה**: חַשבו, מה המאורעות המתוארים בסעיף זה? האם הם תלויים או בלתי תלויים? מהו מאורע משלים למאורע "ירד גשם"? **תשובה**: 1%.

ג) **הדרכה**: חשבו, מה המאורע **המשלים** למאורע "לפחות פעם אחת ירד גשם"? הלא זה "גשם לא ירד אף פעם"? **תשובה**: $\frac{399}{400}$.

13. **הדרכה**: סמנו את המאורעות ב- A, B, C (הפעלת המתקנים), והמאורעות המשלימים (אי-הפעלה) ב- $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$. המאורע "לפחות שניים יפעלו" הוא איחוד המאורעות הבאים: כל שלושת המתקנים יפעלו יחד, **או** ששניים יפעלו והשלישי לא יפעל (שלוש אפשרויות כאלה). ההסתברות שווה ל-

$$P = P(A,B,C) + P(\overline{A},B,C) + P(A,\overline{B},C) + P(A,B,\overline{C})$$

תשובה: 0.931

14. א) **רמז**: מה ההסתברויות שהקלעים לא יפגעו במטרה?

תשובה: 0.016.

ב) **רמז**: מה המאורע המשלים למתואר?

תשובה: 0.984.

15. א) **הדרכה**: מנו את כל הצירופים האפשריים של השלושה (לדוגמה: גבר-אישה-גבר).

תשובה: 0.444.

ב) **הדרכה**: מנו את כל הצירופים האפשריים של השלושה (לדוגמה: אישה-אישה-אישה).

תשובה: 0.282.

16. א) **הדרכה**: היעזרו בהגדרת ההסתברות, וחַשבו את מספר הכדורים הכתומים; יתר הכדורים יהיו לבנים ושחורים.

תשובה: 5 כתומים, 15 לבנים ושחורים יחד, למשל: 7 לבנים ו- 8 שחורים.

ב) 4 כתומים, 10 לבנים ו- 6 שחורים.

ג) **הדרכה**: המאורע המתואר הוא מאורע מורכב דו-שלבי. בנו את עץ האפשרויות

ובחרו בו את הענפים הרצויים.

תשובה: 0.225.